Alguns Comentários sobre a Automação do Método εN para Dimensionamento à Fadiga sob Carregamentos Complexos

Some Comments on the Automation of the εN Method for Fatigue Design under Complex Loading

Jaime Tupiassú Pinho de Castro
Marco Antonio Meggiolaro*
Departamento de Engenharia Mecânica PUC-Rio
22453-900 Rio de Janeiro, RJ, Brasil
e-mail: jtcastro@mec.puc-rio.br
*atualmente no Mech.Eng.Dept., M.I.T.
e-mail: meggi@mit.edu

Abstract

The εN fatigue design method is non-linear and depends on the loading order and on the initial state of the piece. Therefore, the traditional procedure based on rain-flow counting of the loading followed by Neuber, Ramberg-Osgood, Coffin-Manson and Miner rules does **not** guarantee the prediction of physically admissible hysteresis loops at the notches in the complex loading case. Solutions for this problem are proposed, and their implementation in a powerful language named ViDa, developed to automatize the fatigue design process, is discussed.
Key-Words: εN Method, Fatigue Design Automation, Complex Loading.

Resumo

O método εN de projeto à fadiga é não-linear e sensível à ordem do carregamento e ao estado inicial da peça. Logo, o procedimento tradicional que aplica as regras de Neuber, Ramberg-Osgood, Coffin-Manson e Miner à contagem *rain-flow* de um carregamento complexo ***não*** garante a previsão de laços de histerese fisicamente admissíveis nos entalhes. São propostas soluções para este problema, e é discutida sua implementação numa poderosa linguagem chamada ViDa, desenvolvida para automatizar o dimensionamento à fadiga sob carregamentos complexos.
Palavras-Chave: Método εN, Automação do Projeto à Fadiga, Carregamentos Complexos.

Introdução

Fadiga é o tipo de falha estrutural causada primariamente pela aplicação repetida de carregamentos variáveis. Estas falhas são localizadas, progressivas e cumulativas, e caracterizam-se pela geração e/ou propagação de uma *trinca*, a qual diminui paulatinamente a resistência da peça, podendo leva-la à fratura. Por isto, o projeto à fadiga é um problema *local* que depende dos *detalhes* da geometria, do material e do carregamento do *ponto* mais solicitado da peça.

O principal parâmetro gerador de trincas por fadiga é a gama das tensões $\Delta\sigma$ (ou das deformações $\Delta\varepsilon$) atuantes no ponto crítico. Por isto, as trincas geralmente partem das raízes de entalhes concentradores de tensão. Quando as solicitações cíclicas *locais* são baixas em relação à resistência ao escoamento S_Y, o processo é muito influenciado pelos detalhes (i) do acabamento superficial, (ii) do gradiente das tensões atuantes (incluindo as tensões residuais) e (iii) das propriedades mecânicas. Nestes casos, a resistência à iniciação de uma trinca por fadiga tende a aumentar com a resistência à ruptura S_u, com a melhoria do acabamento superficial, com o aumento do gradiente de tensões e com a presença de tensões residuais compressivas. Entretanto, a medida que as cargas alternadas aumentam, o escoamento cíclico localizado torna estes detalhes superficiais cada vez menos importantes, e a ductilidade passa a ser o principal parâmetro controlador da resistência à geração da trinca.

Já a propagação das trincas por fadiga é um fenômeno controlado primariamente pela gama de variação do fator de intensidade de tensões, ΔK_I, e independe das características superficiais da peça (o problema da propagação das trincas sob carregamentos complexos é discutido em Meggiolaro & Castro (96, 97), enquanto que em Castro & Kenedi (95) encontra-se um estudo do correlacionamento entre a iniciação e a propagação das trincas).

Para modelar adequadamente o problema de fadiga são requeridas informações em seis áreas, que funcionam como uma corrente cuja precisão é controlada pelo seu elo menos acurado:

(i)	**Dimensões Geométricas** (incluindo principalmente as dos entalhes e das trincas, caso presentes)
(ii)	**Cargas de Serviço** (devem ser medidas e não estimadas, pois influenciam diretamente as previsões)
(iii)	**Propriedades dos Materiais** (também devem ser preferencialmente medidas, pela mesma razão)
(iv)	**Análise das Tensões Elastoplásticas** (nos pontos críticos, para prever a iniciação das trincas)
(v)	**Análise das Trincas** (para prever a sua propagação, segundo os conceitos da Mecânica da Fratura)
(vi)	**Análise do Acúmulo de Dano** (e.g., o modelo de Wöhler-Goodman-Miner no método SN)

Para se otimizar o dimensionamento à fadiga, todos estes elos devem ser conhecidos dentro da mesma precisão e confiabilidade. Não se pode pela sofisticação dos três últimos (que dependem de erudição acadêmica) suprir as informações experimentais indispensáveis aos três primeiros elos. Por outro lado, é impossível prever adequadamente a vida à fadiga usando modelos de cálculos que não descrevam a física do problema de forma apropriada. Dentro desta ótica, os objetivos deste trabalho são:

1. apontar as limitações da metodologia εN tradicional de projeto à iniciação de uma trinca por fadiga, no caso de carregamentos complexos,
2. detalhar as correções que devem ser implementadas no método εN para que se possa obter previsões fisicamente corretas naquele caso, e
3. descrever sua implementação numa poderosa linguagem chamada ViDa, desenvolvida para automatizar *todos* os métodos tradicionalmente usados no dimensionamento mecânico à fadiga (Meggiolaro & Castro 95, 96 e 98).

Note-se que neste trabalho a *filosofia* do método εN não é questionada. Este é um enfoque consagrado pelo uso e corroborado por forte suporte experimental. Apenas mostra-se aqui como suas equações devem ser corrigidas para se garantir a previsão de laços de histerese fisicamente admissíveis no caso de carregamentos complexos.

Resumo do Método εN Clássico

O dimensionamento mecânico à iniciação de uma trinca por fadiga pelo método εN tradicional correlaciona o número de ciclos que inicia a trinca, N, com a gama das deformações atuantes no ponto crítico da peça, $\Delta\varepsilon$ (que é um parâmetro diretamente mensurável, e é numericamente mais robusto que $\Delta\sigma$ no caso plástico). Esta modelagem requer quatro tipos de informação:

- uma relação $\Delta\sigma$·$\Delta\varepsilon$, para descrever os laços de histerese elastoplástica na raiz do entalhe,
- uma regra de concentração de deformações, para correlacionar as tensões nominais $\Delta\sigma_n$ aplicadas sobre a peça com as deformações $\Delta\varepsilon$ por elas induzidas na raiz do entalhe,
- uma relação entre a amplitude de deformações $\Delta\varepsilon$ e a vida à fadiga N, e
- uma regra de acúmulo de dano.

O método εN só se aplica ao dimensionamento à fadiga de peças não-trincadas mas, por quantificar explicitamente as deformações plásticas cíclicas macroscópicas, pode ser usado para prever qualquer vida de iniciação. (O método εN *tem que* ser usado quando o problema for fadiga oligocíclica ou de pouca ciclagem, isto é, quando a gama das deformações plásticas $\Delta\varepsilon_p$ atuantes na raiz do entalhe for da mesma ordem ou maior que as elásticas $\Delta\varepsilon_e$, e *pode* ser usado também para o dimensionamento às vidas longas). Na prática, o εN é um método moderno e poderoso, mas que apresenta certas idiossincrasias que devem ser respeitadas sob pena de graves insucessos.

A metodologia εN clássica (Farahmand 97, Dowling 93, Bannantine et al. 90, Hertzberg 89, Rice 88, Fuchs & Stephens 80, Mitchell 79, Duggan & Byrne 77, Sandor 72 e Manson 65, e.g.) trabalha com tensões e deformações reais, usa relações $\Delta\sigma$·$\Delta\varepsilon$ tipo Ramberg-Osgood e considera o amolecimento ou endurecimento cíclico do material, mas *não* o seu transiente a partir do comportamento monotônico. Este método assume uma relação única entre as amplitudes das deformações e das tensões impostas sobre a peça, logo uma equação única para todos os laço de histerese, expressa por:

$$\varepsilon_a = \frac{\Delta\varepsilon}{2} = \frac{\Delta\varepsilon_e}{2} + \frac{\Delta\varepsilon_p}{2} = \frac{\Delta\sigma}{2E} + \left(\frac{\Delta\sigma}{2K'}\right)^{1/n'} \tag{1}$$

onde E é o módulo de Young, K' o coeficiente e n' o expoente de encruamento da curva σε cíclica estabilizada. Estas propriedades devem ser medidas experimentalmente.

Valores *típicos* para o expoente de encruamento cíclico estão entre $0.1 < n' < 0.2$, enquanto que o expoente de encruamento monotônico n varia mais, tipicamente entre $0 < n < 0.5$. K' é o valor da tensão (real) que corresponde à deformação plástica (real) de 100% na curva cíclica ou no seu prolongamento.

A relação de Ramberg-Osgood ajusta-se bem à resposta cíclica de muitos materiais, mas é apenas uma de muitas relações empíricas que podem ser usadas com este mesmo propósito. Sua maior limitação é não reconhecer um comportamento puramente elástico nem sequer para as deformações muito pequenas, e sua maior vantagem é a simplicidade matemática.

Na metodologia εN tradicional geralmente usa-se a regra de Neuber para modelar o problema da concentração de deformações nos entalhes. Quando aplicada a carregamentos cíclicos, esta regra pode ser escrita como:

$$K_t^2 = \frac{\Delta\sigma \cdot \Delta\varepsilon}{\Delta\sigma_n \cdot \Delta\varepsilon_n} \tag{2}$$

onde $\Delta\sigma$ e $\Delta\varepsilon$ são as gamas de tensão e deformação provocadas na raiz do entalhe pelas gamas de tensão e deformação nominais $\Delta\sigma_n$ e $\Delta\varepsilon_n$ (o termo nominal refere-se ao carregamento em relação ao qual é definido o valor de K_t, o fator de concentração de tensões linear elástico). No caso onde as tensões nominais sejam elásticas, obtém-se:

$$K_t^2 = \frac{\Delta\sigma \cdot \Delta\varepsilon \cdot E}{\Delta\sigma_n^2} \tag{3}$$

Neste ponto é interessante notar uma contradição na metodologia εN tradicional, a qual reconhece um comportamento linear elástico para as tensões nominais enquanto usa Ramberg-Osgood para modelar as tensões nos entalhes. É possível eliminar esta incongruência, mas o custo computacional não se justifica (a menos que as tensões nominais sejam da ordem ou maiores que a resistência ao escoamento do material).

Quanto à relação entre a amplitude das deformações atuantes na raiz do entalhe, $\Delta\varepsilon/2$, e a vida à fadiga dada em número de reversões, 2N, ela é tradicionalmente expressa pela regra de Coffin-Manson:

$$\frac{\Delta\varepsilon}{2} = \frac{\sigma'_f}{E}(2N)^b + \varepsilon'_f (2N)^c \tag{4}$$

onde σ'_f, ε'_f, b, c são constantes do material, que devem ser obtidas experimentalmente.

Estimativas das Constantes εN

Na ausência de resultados experimentais específicos, vale a pena lembrar que os expoentes b e c têm valores *típicos* entre $-0.2 < b < -0.05$ e $-0.7 < c < -0.5$ (ver, por exemplo, SAE 96, que tem uma boa tabela de dados experimentais). Para estes casos, Manson propôs empiricamente em 65 o chamado método das Inclinações Universais:

$$\Delta\varepsilon = 3.5\frac{S_u}{E} N^{-0.12} + \left[\ln\left(\frac{1}{1-RA}\right)\right]^{0.6} N^{-0.6} \tag{5}$$

onde $\ln[1/(1-RA)] = 2\ln(d_0/d_f) = \varepsilon_f$, sendo RA a redução de área, d_0 e d_f os diâmetros inicial e final, e ε_f a deformação real na ruptura do espécime de tração, respectivamente (assumindo constância de volume das deformações plásticas mesmo após a estricção). Note-se que este método estima b = -0.12 e c = -0.6 para todos os materiais.

Na mesma época, Morrow (65) estimou os valores de b e de c a partir do expoente de encruamento cíclico n' como:

$$b = -n'/(1 + 5n') \quad e \quad c = -1/(1 + 5n') \tag{6}$$

o que implicaria numa relação entre os três expoentes: $b/c = n'$. Deve-se notar que neste caso, usando-se os valores de b e c propostos em (5), o valor de n' também seria invariável e igual a 0.20.

As constantes σ'_f e ε'_f podem ser estimadas a partir de um teste de tração usando-se as aproximações de (5) mas, como esta equação trabalha com $\Delta\varepsilon$ e N e não com $\Delta\varepsilon/2$ e 2N, deve-se notar que a estimativa de Manson prevê que:

$$\sigma'_f = 3{,}5 \cdot S_u/2^{1+b} = 1{,}90 \cdot S_u \quad e \quad \varepsilon'_f = 0.76 \cdot \varepsilon_f^{0,6} \tag{7}$$

Há diversas outras estimativas similares propostas na literatura como, por exemplo:

$$\sigma'_f \approx \sigma_f \approx S_u \cdot (1+e_f) \approx S_u \cdot (d_0/d_f)^2 \tag{8}$$

$$\sigma'_f \approx (S_u + 345)MPa \tag{9}$$

$$\varepsilon'_f \approx \varepsilon_f \approx 2\ln(d_0/d_f) \tag{10}$$

O correlacionamento de resultados experimentais com estimativas como as apresentadas acima foi avaliado recentemente por Ong (93) e por Brennan (94).

Uma relação útil para se definir o limiar da fadiga oligocíclica é dada pela chamada vida de transição, N_T, na qual as deformações elásticas e plásticas da equação de Coffin-Manson são iguais. Para vidas menores que N_T há predominância das deformações plásticas sobre as elásticas, e aquelas certamente não podem ser desprezadas nos cálculos:

$$N_T = \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma'_f}{E\varepsilon'_f}\right)^{\frac{1}{c-b}} \tag{11}$$

Segundo Landgraf (70), N_T decresce exponencialmente com a dureza Brinell (HB) dos aços, variando da ordem de 15000 ciclos para HB no entorno de 2GPa até tão baixo quanto 1 ciclo para HB ≈ 7GPa. Ajustando seus resultados experimentais, a vida de transição N_T dos aços pode ser estimada por:

$$N_T \approx 6.8 \cdot 10^5 \exp(-1.9 \cdot HB) \qquad \text{(HB em GPa)} \tag{12}$$

Por fim, assumindo que deva haver coerência entre as partes elásticas e plásticas dos ajustes dos laços de histerese por Ramberg-Osgood e da curva εN por Coffin-Manson, igualando as equações (1) e (4) obtém-se:

$$\frac{\Delta\sigma}{2} = \sigma'_f (2N)^b = K'\varepsilon_f'^{n'} (2N)^{cn'} \Rightarrow \quad K' = \frac{\sigma'_f}{\varepsilon_f'^{n'}}; \quad b = c \cdot n' \tag{13}$$

Logo, só quatro entre as seis constantes {K', n', σ'_f, ε'_f, b, c} seriam independentes. Deve-se tomar cuidado, entretanto, para não assumir que este algebrismo possa ser usado para substituir experimentos. Tanto Coffin-Manson quanto Ramberg-Osgood são relações empíricas que podem descrever adequadamente testes de fadiga de vários materiais, mas não são leis físicas. O que realmente importa são os resultados efetivamente medidos, e todas as seis constantes devem, sempre que possível, ser obtidas pelo ajuste de resultados experimentais confiáveis.

Dimensionamento εN Clássico no Caso de Carregamentos Complexos

De fato, há vasto suporte experimental para justificar o uso das simplificações do método εN tradicional no caso do dimensionamento mecânico à fadiga sob carregamentos simples, mas em geral a literatura não reconhece explicitamente a *fundamental importância do estado inicial da peça e da ordem do carregamento no resultado das previsões feitas com o seu uso no caso de carregamentos complexos*.

A forma tradicional de se projetar pelo método εN nestes casos tem sido:

- calcular o dano d_i provocado pela aplicação das $n_i/2$ reversões ou 1/2 ciclos do i-ésimo carregamento nominal $\Delta\sigma_{ni}$, contadas pelo método Rain-Flow como se os diversos ciclos do carregamento fossem independentes: $d_i = n_i/2N_i$, sendo N_i o número de ciclos que a peça duraria se somente o carregamento nominal $\Delta\sigma_{ni}$ estivesse atuando, e
- usar a regra de Miner para acumular o dano total causado pelos diversos eventos do carregamento.

Como o método tradicional não leva em consideração a história do carregamento, ele pode ser facilmente resumido à aplicação sucessiva de dois conjuntos de equações quando os carregamentos nominais são elásticos:

(i) Dado o i-ésimo evento do carregamento $\Delta\sigma_{ni}$, calcula-se a tensão $\Delta\sigma_i$ na raiz do entalhe usando Neuber:

$$\Delta\sigma_i^2 + 2E \cdot \Delta\sigma_i \cdot \left(\frac{\Delta\sigma_i}{2K'}\right)^{\frac{1}{n'}} = \left(K_t \Delta\sigma_{ni}\right)^2 \tag{14}$$

(ii) A seguir calcula-se o $\Delta\varepsilon_i$ causado por $\Delta\sigma_i$, e os correspondentes N_i e d_i:

$$\Delta\varepsilon_i = \frac{\Delta\sigma_i}{E} + 2 \cdot \left(\frac{\Delta\sigma_i}{2K'}\right)^{\frac{1}{n'}} = \frac{2\sigma'_f}{E}\left(2N_i\right)^b + 2\varepsilon'_f\left(2N_i\right)^c \Rightarrow d_i = \frac{n_i}{2N_i} \tag{15}$$

Estas equações não são inversíveis, logo o uso do método εN é computacionalmente trabalhoso, o que explica (mas não justifica) a pouca divulgação dos problemas que o seu uso não criterioso pode acarretar. Por isto, é indispensável reconhecer e enfatizar que:

a aplicação destas equações a uma contagem rain-flow do carregamento
***NÃO** permite a previsão de laços de histerese fisicamente admissíveis.*

De fato, para se poder usar confiavelmente o método εN, antes de mais nada deve-se garantir que o modelo de cálculo reproduza os laços de histerese que atuam na raiz do entalhe, para só então calcular o dano por eles provocado. Como a prática ensinou dolorosamente aos autores que a única maneira de se evitar erros com o uso do εN é *desenhando* os laços de histerese previstos, a seguir são didaticamente discutidos vários problemas que ilustram os cuidados necessários à correta aplicação desta metodologia.

Problema do 1º Evento Elastoplástico

Segundo a idéia básica do método εN, a trinca de fadiga será gerada pelo dano cumulativo causado pelas sucessivas gamas de deformação $\Delta\varepsilon_i$ atuantes no ponto mais solicitado da peça, em geral na raiz de um entalhe. É claro que para modelar este problema é indispensável calcular corretamente estes $\Delta\varepsilon_i$. Mas qualquer solicitação que cause plasticidade, ainda que pontualmente localizada, é *memorizada* pela peça, devido à irreversibilidade deste processo. Logo, a trajetória do material no plano σ·ε *depende da história* do carregamento.

Além disto, mesmo que a peça seja virgem, que o estado de tensões e deformações residuais no entalhe seja zero, e que se possa desprezar os transientes de amolecimento ou de endurecimento cíclico, ainda assim é necessário distinguir entre o comportamento do primeiro evento do carregamento σ_{n1} e os subseqüentes: a peça virgem parte da origem do plano σ·ε, logo o primeiro 1/2 ciclo do carregamento segue a equação da curva σ·ε cíclica,

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{K'}\right)^{\frac{1}{n'}} \tag{16}$$

e **não** as equações do laço de histerese, como mostrado na figura 1. Portanto, para se calcular o dano d_1 do primeiro 1/2 ciclo do carregamento é necessário usar:

$$\sigma_1^2 + E\cdot\sigma_1\cdot\left(\frac{\sigma_1}{K'}\right)^{\frac{1}{n'}} = \left(K_t\sigma_{n1}\right)^2 \tag{17}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} + \left(\frac{\sigma_1}{K'}\right)^{\frac{1}{n'}} = \frac{2\sigma'_f}{E}\left(2N_1\right)^b + 2\varepsilon'_f\left(2N_1\right)^c \Rightarrow d_1 = \frac{1}{2N_1} \tag{18}$$

Note-se que como $\sigma_0 = \varepsilon_0 = 0$, $\Delta\sigma_1 = \sigma_1 - \sigma_0 = \sigma_1$, mas não se usou a notação Δ nas equações acima, para enfatizar que o primeiro evento é diferente dos subseqüentes, os quais têm que ser modelados pela equação do laço de histerese (*devidamente corrigida*, como discutido abaixo).

Note-se também que do ponto de vista físico esta separação do evento inicial deveria ser mais apropriadamente enunciada como *deve-se separar o primeiro evento do carregamento capaz de gerar plasticidade (na raiz do entalhe crítico), o qual segue a curva* $\sigma\times\varepsilon$*, dos eventos subseqüentes, que seguem curvas do laço* $\Delta\sigma\times\Delta\varepsilon$. Isto porque respostas completamente elásticas são reversíveis, logo isentas de memória. Entretanto, como já mencionado acima, a modelagem de Ramberg-Osgood prevê plasticidade para qualquer carregamento, e sempre gera no entalhe efeitos de memória que devem ser considerados.

Para exemplificar os problemas que podem ser gerados se o 1º ciclo não for separado dos subseqüentes, nada melhor do que desenhar alguns laços simples mas representativos. Na figura 2a plota-se a previsão dos laços de histerese elastoplástica corrigidos, para a seqüência de carregamento {0 → 400 → 0 → 400}MPa, imposta sobre um corpo de prova (CP) εN não-entalhado. Nos cálculos usam-se as constantes de um aço 1020 (SAE 96):

$E = 203GPa$, $K' = 772MPa$, $n' = 0.18$, $\sigma'_f = 896MPa$, $\varepsilon'_f = 0.41$, $b = -0.12$, $c = -0.51$.

A deformação máxima resultante no CP neste caso é de 2.8%, e o dano causado por este evento, calculado segundo Coffin-Manson, é $d = 9.9\cdot10^{-4}$. Já na figura 2b, plotam-se os laços previstos para este mesmo evento sem separar o 1º ciclo dos demais. A máxima deformação prevista neste caso é de 0.31%, e o dano é de apenas $d = 8\cdot10^{-6}$, uma diferença ***não-conservativa*** de 12300%! É também importante notar que a figura 2a reproduz a forma e a aparência dos laços experimentalmente medidos, enquanto que a figura 2b é incompatível com a física do problema.

Este exemplo justifica muito bem a máxima "*desenhe seus laços de histerese*", mas não deve ser tomado como representativo dos erros numéricos que podem ser esperados em *todos* os casos práticos, caso não se separe o primeiro evento dos demais. Não é possível quantificar a priori a magnitude dos erros que podem ser cometidos, mas pode-se garantir que laços fisicamente inadmissíveis geram previsões não confiáveis.

Problema da Limitação Física dos Laços de Histerese

Separar o primeiro evento elastoplástico dos demais não é suficiente para garantir que a previsão de *todos* os laços de histerese esteja correta. E, novamente, o desenho dos laços calculados na raiz do entalhe é quase indispensável para que se possa compreender a complexidade mínima necessária à modelagem deste problema. Para ilustra-lo, aplica-se o carregamento da figura 3a (um evento principal que é interrompido por dois pequenos descarregamentos, na seqüência {0 → 300 → 100 → 400 → -100 → 100 → -300}MPa) sobre um CP idêntico ao do exemplo acima.

Note-se que tanto a figura 3b, onde se usa o método εN tradicional, quanto a 3c, onde se aplica a curva σ·ε ao primeiro evento do carregamento e as equações do laço aos demais, mostram previsões absurdas. Como pode ser visto na figura 3d, para que os laços previstos sejam fisicamente admissíveis, eles também devem ser corrigidos para:

- serem limitados pela curva σ·ε cíclica ou pelos maiores laços de histerese previamente gerados, e para
- forçarem a simetria dos laços já iniciados.

Para isto, ao se calcular a seqüência dos laços induzidos por um dado carregamento complexo, deve-se verificar se a previsão cruza ou a curva σ·ε cíclica ou o maior dos laços previamente induzidos (aqui chamado de "olhão"). No caso de cruzamento, deve-se abandonar a equação do laço a partir de sua interseção com a curva σ·ε (ou com o olhão), e passar a seguir a curva σ·ε (ou a do olhão) até o fim do carregamento. Esta correção é complicada, mas é tão indispensável quanto a do 1º evento, sob pena de se fazer previsões:

(i) fisicamente inadmissíveis, **e**

(ii) provavelmente ***não-conservativas*** (o dano segundo Coffin-Manson da figura 3b é $2.9 \cdot 10^{-5}$ e o da 3c $6.1 \cdot 10^{-5}$, enquanto os laços corrigidos da figura 3d geram um dano de $1.3 \cdot 10^{-3}$, um valor duas ordens de grandeza ***maior***).

Deve-se notar que simetria dos laços tem prioridade sobre a curva σ·ε, isto é, *a curva s·e cíclica deve ser cruzada para forçar a simetria de um olhão já iniciado*, como ilustrado na figura 4a (Meggiolaro & Castro 96). Este carregamento é dado em deformação: {0 → 5000 → 3500 → 8000 → 5000 → 6500 → -1500 → 2000 → 500 → 8000}μm/m. O CP é idêntico ao dos exemplos acima. Na figura 4b vê-se que o olhão do laço de histerese vai de -1500 a 8000μm/m, e que para forçar sua simetria e fechamento é necessário cruzar a curva σ·ε duas vezes. Deve-se também observar nesta figura os três descarregamentos parciais de Δε = 1500μm/m, devidamente contidos por seus limites: o primeiro pela curva σ.ε, o segundo pela curva inferior e o terceiro pela curva superior do olhão. Para comparação, a figura 4c mostra quão absurdos ficariam os laços previstos se nenhuma das correções já discutidas fosse aplicada.

Um outro ponto muito interessante também pode ser ilustrado por este exemplo: como foi imposta uma história de *deformações* sobre a peça, os danos causado pelos laços das figuras 4b e 4c são idênticos! Em ambos os casos calcula-se um dano de $1.24 \cdot 10^{-4}$, porque o modelo de Coffin-Manson só depende dos $\Delta\varepsilon_i$, sem considerar os efeitos da carga média ou a forma dos laços. Logo, deve-se enfatizar que:

> *não se pode usar resultados experimentais de vida à fadiga obtidos em controle de deformação para justificar o comportamento de problemas controlados por tensão.*

Para fugir destes problemas, as vezes é recomendada a reordenação dos carregamentos: colocando-se o maior deles em primeiro lugar todos os outros eventos estariam contidos dentro do olhão inicial, eliminando a necessidade das correções discutidas acima. Entretanto, este também não é um procedimento adequado, conforme mostrado a seguir.

Problema do Efeito da Ordem do Carregamento

A importância da ordem dos carregamentos é ilustrada através de mais um exemplo simples e convincente: Seja uma história de carregamentos e alívios crescentes como a mostrada na figura 5a, novamente aplicada sobre um CP não entalhado de aço 1020, idêntico aos dos exemplos acima. Os carregamentos e alívios foram escolhidos para gerarem laços espaçados aproximadamente da mesma distância, seguindo a seqüência:

{0→200→0→250→0→300→0→320→0→340→0→360→0→..........→480→0→500→0→500→0}MPa

Os laços correspondentes, devidamente corrigidos, são mostrados na Figura 5b: a maior tensão (real) aplicada é de 500MPa e a máxima deformação obtida chega a 9%. Já na figura 5c desenham-se os laços gerados pelo método εN tradicional, para mostrar como a forma dos laços previstos pelos procedimentos tradicionais é incompatível com a física do carregamento, ao contrário dos resultados que incluem as correções necessárias nos cálculos dos laços.

Aplicando-se Coffin-Manson aos laços da figura 5b para calcular o dano ciclo a ciclo, chega-se a $d = 2.1 \cdot 10^{-3}$. (Para efeito de comparação, na figura 5c o dano calculado por Coffin-Manson é de $2.0 \cdot 10^{-4}$, cerca de dez vezes *menor* que o obtido a partir dos laços corrigidos). Mas provavelmente este é o tipo de carregamento que deve ser melhor analisado pelos modelos que consideram o efeito da carga média na relação εN, como:

$$\frac{\Delta\varepsilon}{2} = \frac{\sigma'_f - \sigma_m}{E}(2N)^b + \varepsilon'_f (2N)^c \qquad \text{(Morrow)} \qquad (19)$$

$$\frac{\Delta\varepsilon}{2} = \frac{\sigma'_f - \sigma_m}{E}(2N)^b + \varepsilon'_f \left(1 - \frac{\sigma_m}{\sigma'_f}\right)(2N)^c \qquad \text{(Morrow modificado)} \qquad (20)$$

$$\frac{\Delta\varepsilon}{2} = \frac{\sigma'^2_f}{E \cdot \sigma_{max}}(2N)^{2b} + \frac{\sigma'_f \cdot \varepsilon'_f}{\sigma_{max}}(2N)^{b+c} \qquad \text{(Smith-Topper-Watson)} \qquad (21)$$

onde σ_m e σ_{max} são a componente média e o valor máximo da tensão atuante.

Nas mesmas condições de cálculo do dano ciclo a ciclo nos laços corrigidos, o modelo de Morrow prevê um dano de $2.4{\cdot}10^{-3}$, o de Morrow modificado $4.2{\cdot}10^{-3}$ e o de STW $3.9{\cdot}10^{-3}$, todos valores coerentes entre si. Isto porque o modelo de Morrow só considera o efeito das cargas médias na componente elástica dos laços, enquanto que os modelos de Morrow modificado e de STW também quantificam dano causado pela carga média na componente plástica dos laços.

Para ilustrar os efeitos da ordem do carregamento, mostra-se na figura 6a o carregamento anterior aplicado na ordem invertida, e na figura 6b os laços obtidos, devidamente corrigidos. Deve-se notar como a forma dos laços gerados é totalmente diferente, isto é, como a inversão da ordem dos carregamentos altera completamente os laços de histerese induzidos no corpo de prova. Conforme afirmado acima, sem desenhar os laços de histerese previstos fica realmente difícil visualizar o problema da fadiga elastoplástica, quiçá equacioná-lo corretamente.

Problema do Momento Certo para se Efetuar a Contagem *Rain-Flow*

As histórias de carregamento das figuras 5 e 6 também servem para ilustrar problemas que podem ocorrer na contagem de dano: quando se calcula ciclo a ciclo o dano causado pelos laços da figura 6b, obtém-se um valor uma ordem de grandeza *maior* que o obtido dos laços da figura 5b! (por Coffin-Manson $1.2{\cdot}10^{-2}$, por Morrow $1.3{\cdot}10^{-2}$, etc.). Isto apesar de nestes dois casos tanto o "olhão" como os laços internos terem amplitudes similares.

É claro que este problema é causado pelo procedimento de cálculo de dano ciclo a ciclo, o qual ***não*** reconhece todos os eventos do carregamento. Para se resolver este problema deve-se efetuar uma contagem tipo *rain-flow*. De fato, só após recalcular o dano causado pelos laços da figura 5b aplicando-se a contagem rain-flow às deformações induzidas, chega-se a valores de dano similares àqueles calculados na figura 6b. Isto porque nesta o 1º evento do carregamento também é o máximo, enquanto que na figura 5b justamente este maior valor não é contabilizado pela contagem ciclo a ciclo.

Note-se que a contagem *rain-flow* foi aplicada nas deformações calculadas. Mas a prática usual, como se sabe, é contar o carregamento, com uma eventual filtragem de amplitude, como mostrado na figura 7. (A filtragem das pequenas cargas é um recurso muito útil para diminuir o esforço computacional nos cálculos de dano à fadiga sob carregamentos complexos, mas deve ser usada com cuidado para não eliminar carregamentos capazes de causar dano à peça Castro et al., 94). Quando se trabalha com um método linear elástico como o SN esta prática é correta e recomendável, pois a ordem dos carregamentos é irrelevante.

Mas no caso elastoplástico, contar o *carregamento* (neste caso as tensões impostas) e não o seu *efeito* (as deformações resultantes) é um procedimento totalmente *inadequado*, como ilustrado nas figuras 8: na 8a o carregamento complexo não-filtrado da figura 7 é tratado seqüencialmente, incluindo todas as correções recomendadas acima; na 8b plota-se o resultado obtido mantendo todas as correções dos laços mas fazendo a contagem *rain-flow* das tensões; e na figura 8c apresenta-se o resultado da metodologia εN tradicional. Os danos calculados nos três casos são:

Caso	Coffin-Manson	Morrow	Morrow mod.	S-T-W
Laços corrigidos, *rain-flow* nas deformações (fig.8a)	$1.4{\cdot}10^{-4}$	$1.7{\cdot}10^{-4}$	$2.4{\cdot}10^{-4}$	$2.2{\cdot}10^{-4}$
Laços corrigidos, *rain-flow* nas tensões (fig.8b)	$1.1{\cdot}10^{-4}$	$1.3{\cdot}10^{-4}$	$1.8{\cdot}10^{-4}$	$1.9{\cdot}10^{-4}$
Método εN tradicional (fig.8c)	$2.5{\cdot}10^{-5}$	$3.3{\cdot}10^{-5}$	$4.1{\cdot}10^{-5}$	$8.4{\cdot}10^{-5}$

Note-se que este carregamento se aproxima bem mais dos casos reais que os exemplos didáticos discutidos anteriormente, e que pode ser usado para ilustrar o tipo de erro que se pode obter na prática do dimensionamento mecânico. Por isto vale a pena enfatizar que a não linearidade do método εN tem sempre que ser considerada antes de sua aplicação. E como o método *rain-flow* tradicional gera uma tabela na qual a *ordem* dos carregamentos é alterada, o procedimento de cálculo de dano correto no caso de carregamentos complexos é:

- calcular *primeiro* os laços de histerese induzidos pelo carregamento $\Delta\sigma_{ni}$ na raiz do entalhe, *na seqüência em que eles efetivamente ocorrem* (incluindo todas as correções necessárias!), e
- só depois então se fazer a contagem *rain-flow* nas deformações $\Delta\varepsilon_i$ resultantes.

Deve-se enfatizar que a contagem das deformações $\Delta\varepsilon_i$ resultantes é indispensável para o cálculo correto do dano! Isto porque a história das deformações resultantes de um carregamento complexo também é complexa, e só a contagem *rain-flow* pode quantificar o dano causado por todos os eventos.

Problema da Aplicação Correta da Regra de Neuber

No problema do dimensionamento mecânico real é indispensável considerar todas as correções discutidas acima na modelagem do comportamento elastoplástico cíclico dos pontos críticos das peças. Portanto, é indispensável estudar-se o comportamento *da raiz de concentradores de deformação*, que é onde as trincas de fadiga quase sempre se iniciam. Seguindo as idéias tradicionais, para isto deve-se aplicar a regra de Neuber em conjunto com as correções necessárias para garantir a qualidade dos laços previstos. Mas nestes casos não se pode usar a equação (14), que só se aplica quando o material permanece numa *mesma* curva $\sigma \cdot \varepsilon$.

Neste ponto vale a pena lembrar que o problema na realidade resolvido por Neuber em 61 foi a concentração de tensões e deformações na torção *monotônica* de corpos prismáticos feitos de qualquer material não-linear elástico. Portanto, o uso da regra de Neuber no método εN tradicional é uma aproximação que, segundo Fuchs & Stephens (80), só é corroborada experimentalmente nos casos de tensão plana dominante na raiz do entalhe (por isto aqueles autores recomendam o uso da regra Linear de concentração de deformações ($K_t = K_\varepsilon = \Delta\varepsilon/\Delta\varepsilon_n$) para os casos de deformação plana). Para usar esta mesma aproximação nos casos das mudanças de curvas $\sigma\varepsilon$ necessárias para garantir a admissibilidade física dos laços de histerese, basta manter a constância dos produtos $\Delta\sigma\cdot\Delta\varepsilon = (K_t\cdot\Delta\sigma_n)^2/E$. Esta tarefa é conceitualmente simples, como ilustrado na figura 9, apesar de exigir uma implementação numérica não-trivial.

A idéia é aplicar o carregamento $\Delta\sigma_n$ em pequenos incrementos $\Delta\sigma_{nj}$, e ir construindo o caminho $\Delta\sigma_j$, $\Delta\varepsilon_j$ correspondente no plano $\sigma \cdot \varepsilon$, seguindo primeiro a curva 1 da figura 9 até o seu cruzamento com uma das curvas limitadoras do olhão, que no caso é a curva 2. O ponto de parada na curva 2 é localizado comparando-se a cada incremento do carregamento o valor do produto $\Delta\sigma_j.\Delta\varepsilon_j$ com $(K_t\cdot\Delta\sigma_n)^2/E$, que é um valor conhecido.

Note-se que este procedimento pode facilmente ser generalizado para carregamentos nominais elastoplásticos. Entretanto este caso, que é mais de interesse acadêmico do que prático, não será discutido aqui tendo em vista que o esforço computacional necessário dificultaria seu uso em uma ferramenta capaz de rodar em micros.

Problema da Solução Numérica dos Sistema de Coffin-Manson e de Neuber

A solução numérica das equações (14) e (15) merece ser comentada. Para resolve-las foi desenvolvido um método baseado no fato daquelas equações constituírem essencialmente a combinação de duas retas, quando traçadas em escala bi-logarítmica. Uma vez que o método de Newton-Raphson é muito eficaz para resolver equações que possuam derivada aproximadamente constante, esse método foi adaptado a uma escala logarítmica, escrevendo-se as equações de Neuber e de Coffin-Manson na forma geral:

$$\delta = \beta\cdot\exp(B\cdot x) + \gamma\exp(C\cdot x) \tag{22}$$

onde x é a incógnita a ser calculada numericamente. No caso da equação (14), tem-se:

$$\delta = (K_t\Delta\sigma_n)^2,\ \ \beta = 1,\ \ B = 2,\ \ \gamma = 2E/(2K')^{1/n'},\ \ C = 1 + 1/n',\ \ x = \ln(\Delta\sigma_i) \tag{23}$$

e no caso da equação (15)

$$\delta = \Delta\varepsilon/2,\ \ \beta = \sigma_f'/E,\ \ B = b,\ \ \gamma = \varepsilon_f',\ \ C = c,\ \ x = \ln(2N) \tag{24}$$

O procedimento para a solução da equação (16) pode ser resumido por:

- encontra-se o valor de x_0 para a primeira iteração através de

$$x_0 = \min\left(\frac{\ln(\delta/\beta)}{B}, \frac{\ln(\delta/\gamma)}{C}\right) \tag{25}$$

  onde a função min retorna o menor dentre dois valores. No caso da regra de Coffin-Manson, a equação (19) avalia se o gradiente de deformações está na região predominantemente elástica ou plástica, tomando como valor inicial aquele que mais se aproximar da solução.

- calcula-se o valor de x_{i+1} da nova iteração em função do valor de x_i ($i \geq 0$):

$$x_{i+1} = x_i - \left(\beta e^{Bx_i} + \gamma e^{Cx_i}\right)\cdot\ln\left[\frac{1}{\delta}\frac{\beta e^{Bx_i} + \gamma e^{Cx_i}}{\beta B e^{Bx_i} + \gamma C e^{Cx_i}}\right] \tag{26}$$

- sendo (ξ-1) o erro relativo máximo admissível, prosseguem-se as iterações até que a expressão

$$\ln\left[\frac{\left(\beta e^{B(x_i+\ln(\xi))} + \gamma e^{C(x_i+\ln(\xi))}\right)}{\delta}\right] \tag{27}$$

seja negativa. Para exemplificar o uso deste método, calcula-se a vida residual de um espécime cujo material (um aço) possui as propriedades dadas: E = 203GPa, σ_f'= 896MPa, ε_f'= 0,41, b = -0,12 e c = -0,51. A partir da equação (14), para um gradiente de deformações $\Delta\varepsilon$ = 2000$\mu\varepsilon$ e ξ = 1,001 (erro máximo de 0,1%), calcula-se então :

$x_0 = 6{,}60$; $x_1 = 11{,}12$; $x_2 = 11{,}87$; $x_3 = 11{,}91 \rightarrow 2N = e^{11,91} = 149000$ reversões e o processo converge em 3 iterações. Se o método tradicional de Newton-Raphson fosse utilizado, considerando-se um valor inicial de 1 para 2N, seriam necessárias 15 iterações para calcular-se a solução na precisão de 0,1%. Além disso, mesmo se fosse utilizada a condição inicial definida no primeiro passo do algoritmo apresentado acima, o método de Newton-Raphson ainda necessitaria de 10 iterações para a convergência.

A Linguagem ViDa 98

Como o método εN é bem menos simples do que aparenta, para poder aplica-lo aos casos reais de carregamento complexo é indispensável usar suporte computacional adequado. Para isto, foi recentemente desenvolvida a linguagem ViDa (Meggiolaro e Castro 96), atualmente na sua versão 98, da qual se faz uma breve descrição a seguir.

Esta linguagem foi concebida para automatizar *todos* os métodos tradicionalmente usados no projeto mecânico à fadiga sob carregamentos complexos: o SN, o IIW (para estruturas soldadas) e o εN para prever a iniciação da trinca, e o da/dN para estudar a propagação das trincas planas e 3D usando conceitos da Mecânica da Fratura. Nela também se incluiu inúmeras facilidades úteis ao projetista, como vários bancos de dados inteligentes, dois contadores *rain-flow* e um filtro *race-track*, gerador de laços de histerese elastoplástica (incluindo *todas* as correções necessárias no método εN, seguindo os procedimentos discutidos acima), ajuste automático de dados experimentais, interpretador de equações, e várias outras ferramentas similares, todas com uma interface gráfica amigável que roda num ambiente Windows.

Com o ViDa 98 pode-se também desenhar a curva εN e sobre ela a curva SN tradicional, e forçar a componente elástica da deformação a atingir a curva SN no limite. O programa calcula o dano εN por todos os métodos discutidos (Coffin-Manson, IU, Morrow, STW, etc.), de forma seqüencial, e pode aplicar o rain-flow nas deformações resultantes. Há também as opções de trocar a regra de Neuber pela regra Linear de concentração de deformações, e de desenhar os laços de histerese *devidamente corrigidos* ou os previstos pelos métodos tradicionais (para quando não se conhecer a história prévia da peça e ainda assim se quiser fazer uma *estimativa* εN, ou para quando se quiser desconsiderar os efeitos do ordenamento apesar de todos os problemas de incompatibilidade física das previsões). Na realidade, todos os laços apresentados neste trabalho, bem como todos os danos calculados nos exemplos, foram gerados usando-se o ViDa num micro AMD586 de 133MHz, com 16MB de memória RAM.

Conclusões

Foram discutidas várias limitações do tradicional método εN de projeto à fadiga, e apresentadas soluções para eliminá-las. Também foi apresentada uma nova linguagem chamada ViDa 98, que automatiza o dimensionamento à fadiga sob carregamentos complexos e na qual estas soluções foram implementadas.

Os problemas causados pelo ordem do carregamento e pela limitação dos laços de histerese elastoplática nos levam a questionar o uso dos procedimentos tradicionais εN em peças *usadas* cuja história elastoplástica seja ignorada: o desconhecimento do estado inicial de tensões e deformações residuais na raiz do entalhe crítico *pode invalidar* as previsões feitas a partir da solução repetida das equações do laço de histerese. Para se aplicar adequadamente o método εN em peças que não sejam virgens, deve-se primeiro localizar a origem dos laços de histerese no plano σ·ε. Isto provavelmente requer a medição do estado inicial de tensões e deformações residuais no ponto crítico da peça (e, como é a história σ·ε na raiz do entalhe que importa, não adianta medir as tensões residuais fora deste ponto!). Esta é a única forma de prever os laços subseqüentes usando as correções necessárias para garantir sua admissibilidade física.

Referências

Bannantine,J.A.; Comer,J.J. & Handrock,J.L. "Fundamentals of Metal Fatigue Analysis", Prentice Hall 90.

Brennan,F.P. "The Use of Approximate Strain-Life Fatigue Crack Initiation Predictions", Fatigue, v.16, pp.351-356, 94.

Castro,J.T.P.; Freire,J.L.F. & Vieira,R.D. "Fatigue Life Prediction of Repaired Welded Structures", J. Constructional Steel Research, Vol.28, pp.187-195, 94.

Castro,J.T.P. & Kenedi,P.P. "Previsão das Taxas de Propagação de Trincas de Fadiga Partindo dos Conceitos de Coffin-Manson", Rev.Bras.Ciênc.Mecânicas XVII(3), pp.292-303, 95.

Dowling,N.E. "Mechanical Behavior of Materials", Prentice-Hall 93.

Duggan,T.V. & Byrne,J. "Fatigue as a Design Criterion", Macmillan 77.

Farahmand,B. "Fatigue and Fracture Mechanics of High Risk Parts", Chapman & Hall 97.

Fuchs,H.O. & Stephens,R.I. "Metal Fatigue in Engineering", Wiley 80.

Hertzberg,R.W. "Deformation and Fracture Mechanics of Engineering Materials", Wiley 89.

Landgraf,R.W. "The Resistance of Metals to Cyclic Deformation", ASTM STP 467, 70.

Manson,S.S. "Fatigue: A Complex Subject - Some Simple Approximations", Exp.Mech. v.5 n.4, pp.193-226, 65.

Meggiolaro,M.A. & Castro,J.T.P. "**VIDA -** Programa para Previsão de Vida à Fadiga sob Carregamentos Complexos", Anais do III Simpósio de Análise Experimental de Tensões, pp.7-10, ABCM 95.

Meggiolaro,M.A. & Castro,J.T.P. "Desenvolvimentos na Automação do Projeto à Fadiga sob Carregamentos Complexos", II Sem.Mec.Fratura, pp.99-118, ABM 96.

Meggiolaro,M.A. & Castro,J.T.P. "Uma Nota Sobre o Projeto à Fadiga sob Carregamentos Complexos Segundo o Método εN", Anais do IX SIBRAT (COTEQ 96), pp.157-160, IBP e ABCM 96

Meggiolaro,M.A. & Castro,J.T.P. "Alguns Comentários Sobre a Propagação de Trincas por Fadiga sob Carregamentos Complexos", Anais do IX SIBRAT (COTEQ 96), pp.145-148, IBP e ABCM 96.

Meggiolaro,M.A & Castro,J.T.P. "Modelagem dos Efeitos de Seqüência na Propagação de Trincas por Fadiga", Anais do 2º Cong. Int. de Tecnologia Metalúrgica e de Materiais (III Sem. Mec. Fratura), em CD, ABM 97.

Meggiolaro,M.A. & Castro,J.T.P. "ViDa 98 - Danômetro Visual para Automatizar o Projeto à Fadiga sob Carregamentos Complexos", a ser publicado na Rev.Bras.Ciênc.Mecânicas.

Mitchell,M.R. "Fundamentals of Modern Fatigue Analysis for Design", in "Fatigue and Microstructure", ASM 79.

Morrow,J "Cyclic Plastic Strain Energy and Fatigue of Metals", ASTM STP 378, 65.

Neuber,H. "Theory of Stress Concentration for Shear- Strained Prismatical Bodies with Arbitrary Non-Linear Stress-Strain Law", J.Appl.Mech. 28, pp.544-551, 61.

Ong,J.H. "An Evaluation of Existing Methods for the Prediction of Axial Fatigue Life from Tensile Data", Int.J.Fatigue, v.15, n.1, pp.13-19, 93.

Rice,R.C., ed. "Fatigue Design Handbook", SAE 88.

SAE Handbook, 96.

Sandor,B.I. "Fundamentals of Cyclic Stress and Strain", U.Wisconsin 72.