



**Fernando Hey**

**Estratégias de Controle Aplicadas ao Problema de  
Dirigibilidade de Veículos Terrestres em Trajetórias  
Fechadas Pré-Definidas**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para  
obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-  
Graduação em Engenharia Mecânica da PUC-Rio.

Orientadores: Marco Antonio Meggiolaro  
Mauro Speranza Neto

Rio de Janeiro  
Março de 2008



**Fernando Hey**

**Estratégias de Controle Aplicadas ao Problema de  
Dirigibilidade de Veículos Terrestres em Trajetórias  
Fechadas Pré-Definidas**

Dissertação apresentada como requisito parcial para  
obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-  
Graduação em Engenharia Mecânica da PUC-Rio.  
Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Marco Antonio Meggiolaro**  
Orientador  
DEM/PUC-Rio

**Mauro Speranza Neto**  
Co-Orientador  
DEM/PUC-Rio

**Fernando Ribeiro da Silva**  
DEM/IME

**Ricardo Tanscheit**  
DEE/PUC-Rio

**Alexandre de Lima Spinola**  
PUC-Rio

**Prof. José Eugenio Leal**  
Coordenador Setorial do Centro  
Técnico Científico - PUC-Rio

Rio de Janeiro, 14 de março de 2008

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### **Fernando Hey**

Engenheiro de Controle e Automação formado pela PUC-Rio em 2005, ingressou para o mestrado, no departamento de engenharia mecânica da própria PUC em 2005. Durante a graduação estagiou na área de engenharia, no desenvolvimento de sistemas integrados de gestão envolvendo softwares de análise estrutural e estabilidade para a indústria offshore. Depois de formado trabalha no ramo offshore, na área de operações e instalações submarinas.

### Ficha Catalográfica

Hey, Fernando

Estratégias de controle aplicadas ao problema de dirigibilidade de veículos terrestres em trajetórias fechadas pré-definidas / Fernando Hey ; orientadores: Marco Antonio Meggiolaro, Mauro Speranza Neto. – 2008.

99 f. : il.(color.) ; 29,7 cm

1. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

Inclui bibliografia

1. Engenharia mecânica – Teses. 2. Dinâmica veicular. 3. Controle de sistemas automotivos. 4. Aplicações de controle clássico e moderno. 5. Controle ótimo. 6. Controle de trajetórias fechadas. I. Meggiolaro, Marco Antonio. II. Speranza Neto, Mauro. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Mecânica. IV. Título.

CDD: 621

Aos meus familiares e em especial à minha namorada Carolina.

## Agradecimentos

Ao meu orientador Professor Mauro Speranza pelo estímulo e orientação na realização desse trabalho.

À minha namorada Carolina Caldas pelo grande incentivo e companheirismo nos momentos decisivos do trabalho.

Aos meus amigos Mauro Lawall e Pedro Drummond pela ajuda e pelos momentos de descontração.

Aos meus pais pela educação e conselhos valiosos.

À CAPES pelo incentivo e credibilidade depositada neste trabalho.

## Resumo

Hey, Fernando; Speranza Neto, Mauro. **Estratégias de Controle Aplicadas ao Problema de Dirigibilidade de Veículos Terrestres em Trajetórias Fechadas Pré-Definidas**. Rio de Janeiro, 2008. 99p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Apresenta-se o uso das ferramentas lineares de Controle Clássico (Lugar Geométrico das Raízes) e Moderno (Realimentação de Estado e de Saída e Alocação de Pólos) para estabelecer os ajustes dos controladores adotados no problema de acompanhamento de trajetórias em traçados fechados por veículos terrestres, procurando reproduzir o comportamento do ser humano no comando deste tipo de sistema. Os modelos adotados para o veículo são lineares (funções de transferência e matrizes de estado e de entrada), porém a caracterização da trajetória fechada é geometricamente não-linear. Verifica-se deste modo como o projeto de um controle linear satisfaz as condições não lineares associadas. Os conceitos e ferramentas conhecidos são aplicados em diversos tipos de traçados, para diferentes condições do veículo – velocidade, limites de esterçamento, etc – e, a partir das simulações realizadas, são analisadas as características de comportamento do veículo – acelerações, estabilidade, etc - e comparadas as previsões dos projetos lineares com os resultados encontrados. É feita ainda uma breve introdução ao emprego do Controle Ótimo no problema de acompanhamento de traçados, utilizando um modelo bastante simplificado do veículo, e verificando as condições necessárias para se estabelecer a trajetória ótima em um traçado aberto, dado como critério o tempo mínimo para percorrê-lo.

## Palavras-chave

Dinâmica Veicular; Controle de Sistemas Automotivos; Aplicações de Controle Clássico e Moderno; Controle Ótimo; Controle em Trajetórias Fechadas.

## Abstract

Hey, Fernando; Speranza Neto, Mauro (Advisor). **Control Strategies Applied to Ground Vehicles Handling Problem in Pre-Defined Closed Trajectories**. Rio de Janeiro, 2007. 99p. MSc. Dissertation - Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The use of classic and modern linear control tools (root locus and output regulation) is presented to determine the parameters of controllers used to follow a pre-defined closed path, in a way to approach the vehicle behavior and human actions when driving a car. The car is represented by linear models (transfer functions, state-space matrix), but the relation between the car and the closed path is non linear. It is verified how the project of a linear controller deals with the non linear characteristics of the closed loop. The concepts and tools of linear control are applied to some kinds of paths in different vehicle conditions (speed, steering angle limits, etc), and the results of simulations show the characteristics of the car, like accelerations, stability and position on the track. It's also presented a little introduction to the problem of determine an optimal trajectory to run a corner, given the initial and final velocities and initial and final positions. In this case a very simple model is considered and the solution is based on open paths analysis.

## Keywords

Vehicular dynamics; Control of automotive systems; Applications of classic and modern control; Optimal control; Closed path control.

## Sumário

1. Introdução	10
1.1. Motivação	12
1.2. Objetivo Geral	13
1.3. Objetivos Específicos	14
1.4. Revisão Bibliográfica	15
1.5. Estrutura da Dissertação	15
2. Malha de Controle	18
2.1. Construção da Pista	19
2.2. Implementação da Malha de Controle	24
2.3. Geração do Sinal de Erro	26
3. Modelo Cinemático do Veículo	29
3.1. Construção da Malha de Controle	32
3.2. Simulações	33
4. Modelo Linear de Quatro Graus de Liberdade	39
4.1. Malha de Controle com Transferência de Referencial Linear	40
4.1.1. Função de Transferência do Modelo	41
4.1.2. Construção da Malha	43
4.1.3. Simulações Para um Controlador Proporcional	46
4.1.4. Controlador Proporcional Derivativo Duplo	49
4.2. Transferência de Referencial Não Linear	54
5. Realimentação do Ângulo de Yaw	60
5.1. Simulações	61

6. Controlador de Estado	69
6.1. Cálculo da Matriz de Ganho (K)	70
6.2. Simulações Para o Controlador de Estado	73
7. Definição da Trajetória via Controle Ótimo	80
7.1. Descrição do Problema de Tempo Mínimo	81
7.1.1. Condições Iniciais e Finais de Velocidade Livres	81
7.1.2. Condições Iniciais e Finais de Velocidade Definidas	88
7.2. Tratar um Problema Real	94
8. Conclusões	96
9. Referencias Bibliográficas	98

# 1 Introdução

O trânsito nas estradas está ficando cada vez mais intenso, ao passo que os acidentes, o tempo de percurso, e o *stress* aumentam a cada dia devido a esse fato. Resultados de pesquisas já mostram que, em pouco tempo, será necessário ampliar as estradas de modo a comportar o crescimento do número de veículos circulando e não prejudicar o escoamento de cargas entre os estados.

Pesquisas sobre sistemas de transportes inteligentes para melhorar a segurança, a eficiência e o conforto do trânsito de veículos, estão sendo feitas em todo o mundo. Construtoras de veículos, centros de pesquisa e entidades governamentais estão trabalhando em grandes programas objetivando tornar os veículos cada vez mais autônomos e menos suscetíveis a acidentes. Pode-se destacar, dentre esses programas, o *Advanced Cruise-Assist Highway System*, *Intelligent Vehicle Initiative* e o *Partners for Advanced Transit and Highway*. Todos eles empreendendo pesquisas, principalmente na área de controle e sensoriamento para aplicação em veículos e nas próprias estradas.

Uma das soluções discutidas há algum tempo para resolver esse problema sem a necessidade de ampliação de grandes vias é o chamado *Automatic Vehicle Control* (AVC) introduzido nos *Automated Highway Systems* (AHS) (Shladover, IEEE), mais conhecido como estradas inteligentes, onde o veículo recebe informação dos carros ao redor e da estrada, e controla sua trajetória na via de acordo com um objetivo pré-determinado (Figura 1), maximizando a velocidade, a segurança e conseqüentemente o tempo para o destino, diminuindo ainda o *stress*. Para que isso aconteça é necessário um total controle do veículo e uma complexa coordenação entre eles e a estrada, abrindo um grande campo para pesquisas nessa área.

Uma das partes mais importantes em um sistema veicular, o ser humano, é também a parte mais frágil, sujeita ao *stress*, a fadiga e ao cansaço. A grande maioria dos acidentes de carro são causados por falha humana. Para aqueles engenheiros envolvidos com a automação e a robótica, a solução é simples, trocar o homem pelo computador ou, não sendo tão radical, supervisionar e agir de maneira a evitar um acidente.

Pode-se distinguir três tipos de sistemas de controle veicular: aquele que informa com antecedência sobre possíveis colisões ou problemas, aquele que avisa a tempo de o motorista tomar alguma ação corretiva, e aquele que de forma parcial ou integral toma a ação pelo motorista.

Sistemas de desvio de obstáculos, mudanças de pista inteligente e previsão de colisões estão no escopo de pesquisa de instituições empenhadas nos AHS. Esse é um problema complicado que requer um grande conhecimento da dinâmica do veículo em questão e técnicas de controle apuradas. Resultados dessas pesquisas já estão aparecendo no mercado e grande parte dos veículos mais modernos estão vindo equipados com dispositivos que não só ajudam o motorista na tomada de decisões como também durante a realização de manobras.

Como sugere o nome, sistema de estrada automatizada, o conceito prega a automação completa do veículo e da rodovia, deixando ao motorista poucas escolhas de dirigibilidade. Os principais argumentos dos idealizadores são segurança e rapidez.



Figura 1: Veículos autônomos percorrendo uma estrada.

A idéia é de formar grandes grupos de carros a medida que eles vão entrando na estrada. A distância entre os veículos desses grupos pode ser bem

menor que a distância de segurança determinada hoje em dia, pois o sistema tem uma capacidade de reação mais rápida do que o homem. Dessa forma pode-se organizar melhor os veículos nas pistas e aumentar a eficiência de transporte e tempo de percurso. No caso de colisões, como a distância entre eles é menor, a velocidade relativa de impacto também é menor, outra vantagem de se manter uma distância entre veículos curta é o benefício aerodinâmico do arraste, que quando diminui economiza no consumo de combustível.

Para tal é necessário que os veículos sejam completamente automatizados, o que requer o desenvolvimento de novos sistemas de comunicação, sensoriamento e atuadores, assim como análise de inteligência, hierarquia e estruturas de controle.

Dentro do cenário introduzido, esse trabalho se propõe a estudar diversas técnicas de controle de trajetória aplicado a veículos terrestres, atuando na dinâmica lateral a partir de informações do veículo e do meio que ele se desloca. Diferentes metodologias de controle sobre modelos do veículo com complexidade distinta serão estudadas de modo a identificar suas limitações e ponderar entre o tipo de modelo e de controle. É importante ressaltar que apesar de os modelos e os controladores serem lineares, a relação entre o veículo e a pista é não linear ao passo que envolve transformações trigonométricas de senos e co-senos.

### **1.1. Motivação**

Esse trabalho visa contribuir não só na área de transporte mas também no âmbito industrial, diante das seguintes motivações:

- Pode ser aplicado no controle de frotas de veículos para teste de componentes, aumentando o tempo de testes e diminuindo o risco para o piloto.
- Transporte de carga e material no interior de indústrias.
- Incursão em regiões de risco, sem necessidade da presença humana.
- Situações perigosas como extinção de incêndios e transporte de carga perigosa.

- Pode ser adaptado para máquinas agrícolas para plantio e colheita.
- Reconhecimento de falhas humanas e a partir delas testes de colisão podem ser realizados, melhorando a segurança do passageiro.

Dentre todas, as maiores motivações são os AHS (*Automated Highway Systems*) que implementarão sistemas de controle de trajetórias apurados para remanejamento dos veículos e otimização do trânsito e a reprodução do comportamento humano na direção do veículo, que pode contribuir para o estudo de colisões e melhorar a segurança.

Uma grande motivação pessoal de trabalhar com esse tema é o interesse na área de veículos com possibilidade de desenvolver sistemas de controle que melhorem o desempenho e tragam mais segurança para todos os usuários.

## **1.2. Objetivo Geral**

O objetivo geral (ou principal) desse trabalho é apresentar uma metodologia para se estudar o problema de controle da dinâmica lateral de um carro percorrendo um percurso pré-definido. Serão aplicadas técnicas de controle clássico e controle moderno no rastreamento de trajetórias pré-definidas e manobras de mudança de pista. O comportamento do veículo será analisado para diferentes velocidades. Essas técnicas de controle serão aplicadas ao modelo cinemático e a um modelo linear de quatro graus de liberdade. Pretende-se estudar o comportamento dos controladores projetados a partir de técnicas lineares em malhas de controle que possuam não linearidades (Tabela 1).

	Controle Clássico	Controle Moderno	Controle Ótimo
Modelo cinemático			
Modelo linear em malha linear			
Modelo linear em malha não linear			

Tabela 1 : Tipos de Modelo x Estratégias de Controle.

Com essa comparação espera-se observar as limitações das técnicas de controle e dos modelos utilizados e poderá se observar a influência dos efeitos dinâmicos entre o modelo cinemático e o modelo linear assim como a influência das não linearidades da malha.

### 1.3. Objetivos Específicos

Outro objetivo é poder avaliar qual o melhor modelo, ou o modelo suficiente que atende a uma dada situação. Uma mudança de pista talvez não precise de um modelo tão complexo como o não linear, já uma manobra de emergência pode requerer tal complexidade. Só a comparação entre os resultados irá dizer quais as diferenças significativas que aparecem em um modelo e são desprezadas no outro.

Pode-se ainda avaliar qual dos controladores melhor representa o comportamento de um homem ao volante. A tentativa de se obter um controlador que se aproxime ao máximo de um motorista faz parte de um outro grande campo de pesquisa, que trabalha com o objetivo de simular não só o tráfico de carros em ruas e estradas como também tentar reconstituir acidentes e prever as ações humanas ao volante para que se possa auxiliar nas manobras.

#### 1.4. Revisão Bibliográfica

Na referencia [8] de Speranza e Spinola, foi abordado o problema de rastreamento de trajetórias abertas com a utilização de um modelo cinemático do veículo, nos trabalhos [6] e [7] de Speranza, Spinola e Hey o mesmo modelo cinemático foi utilizado, mas a condição de trajetória fechada foi considerada, sendo que em [7] foi também utilizado um modelo dinâmico do veículo. A referência [10] de Hedrick oferece um panorama geral de *automated highway systems* (AHS) e fala das motivações, áreas de pesquisa e grupos de trabalho espalhados pelo mundo.

Na dissertação de Spinola [9], são desenvolvidos modelos lineares e não lineares para o veículo e são aplicadas técnicas de controle linear e não linear para representar a manobra de mudança de pista de um veículo.

Horowitz [13] aborda um pouco de controle aplicado às AHS, tratando o sistema estrada+veículo como um todo e definindo uma hierarquia de controle. Shladover [12] segue a mesma linha de pesquisa falando do protótipo de estrada na California e da linha de pesquisa abordada pelo *California PATH Program*. Por fim, Freund [14] descreve uma técnica não linear para controle de veículos autônomos.

Em nenhum dos trabalhos foi observado o tratamento dado aqui para o problema. Essa dissertação reúne a definição das pistas do modelo e de alguns controladores, as referencias bibliograficas contribuíram para a formação da base da dissertação e o rumo que ela tomou.

#### 1.5. Estrutura da Dissertação

O primeiro capítulo da dissertação mostra uma introdução da área de aplicação do trabalho, assim como algumas motivações e objetivos.

No segundo capítulo é mostrada a topologia da malha de controle, como é representada a referência e como se compara as variáveis do modelo com a referência.

O terceiro capítulo começa apresentando o modelo cinemático de um veículo. É mostrado como se constrói a malha de controle com esse modelo e

técnicas de controle clássico são utilizadas para controlar o veículo sobre trajetórias abertas e fechadas.

No quarto capítulo é apresentado o modelo linear de quatro graus de liberdade. São obtidas as funções de transferência desse modelo e controladores clássicos do tipo proporcional e proporcional derivativo são usados para controlar o veículo. Na primeira parte do capítulo toda a malha de controle é linear, em seguida avalia-se o desempenho do controlador projetado para a malha linear em uma malha não linear, ou seja, com troca de referencial não linear.

O capítulo cinco considera o mesmo controlador e a mesma malha linear, mas realimenta além da posição do C.G. do veículo o ângulo de *yaw* na malha de controle.

O capítulo seis trata o problema por controle moderno. O modelo é o mesmo de quatro graus de liberdade, mas se tenta obter melhores resultados com um controlador de estado.

O sétimo capítulo é um primeiro passo para se pensar na definição de uma trajetória ótima para ser percorrida pelo veículo, ele trata o problema de tempo mínimo para se percorrer uma curva.

O capítulo oito conclui o trabalho com comentários e sugestões para futuras pesquisas.

Para que se possa controlar um dado sistema é necessário observar e medir suas variáveis de saída para determinar o sinal de controle, que deve ser aplicado ao sistema a cada instante. Em geral, para tornar o sistema mais preciso e fazer com que ele reaja à perturbações externas, o sinal de saída é comparado com um sinal de referência, gerando assim um erro que será usado para determinar o sinal de controle. O sinal de controle é calculado de forma a corrigir esse erro. O que determina o sinal de controle a ser aplicado ao sistema é o chamado controlador ou compensador. Essa estrutura é chamada de malha de controle. Para se projetar um sistema de controle é preciso conhecer o modelo do sistema a ser controlado para que se possa calcular o controlador ideal, e também que as variáveis usadas pelo controlador possam ser medidas ao longo do processo. Visto isso é possível simular toda a malha computacionalmente e obter um ajuste de controlador que possa ser testado no sistema real.

A malha de controle que será adotada nesse trabalho é composta pelo modelo do veículo, pelo modelo do controlador e por um sistema que calcula o erro entre as variáveis do veículo e os seus valores desejados em relação a pista que se segue. Perturbações externas não serão consideradas nas simulações nem no projeto dos controladores.

## 2 Malha de Controle

Para que se possa controlar um dado sistema é necessário observar e medir suas variáveis de saída para determinar o sinal de controle, que deve ser aplicado ao sistema a cada instante. Em geral, para tornar o sistema mais preciso e fazer com que ele reaja à perturbações externas, o sinal de saída é comparado com um sinal de referência, gerando assim um erro que será usado para determinar o sinal de controle. O sinal de controle é calculado de forma a corrigir esse erro. O que determina o sinal de controle a ser aplicado ao sistema é o chamado controlador ou compensador. Essa estrutura é chamada de malha de controle. Para se projetar um sistema de controle é preciso conhecer o modelo do sistema a ser controlado para que se possa calcular o controlador ideal, e também que as variáveis usadas pelo controlador possam ser medidas ao longo do processo. Visto isso é possível simular toda a malha computacionalmente e obter um ajuste de controlador que possa ser testado no sistema real.

A malha de controle que será adotada nesse trabalho é composta pelo modelo do veículo, pelo modelo do controlador e por um sistema que calcula o erro entre as variáveis do veículo e os seus valores desejados em relação a pista que se segue. Perturbações externas não serão consideradas nas simulações nem no projeto dos controladores.

A malha apresentada na Figura 2 é uma representação genérica que será usada ao longo do trabalho. O modelo do veículo pode ser alterado, dependendo do grau de complexidade e precisão desejados e podem ser utilizados modelos lineares ou não, com efeitos dinâmicos ou não. O tipo do controlador também varia de acordo com o modelo do veículo, já que seu projeto depende das suas características. O sistema que calcula o erro também pode ser alterado dependendo das técnicas de controle aplicadas.

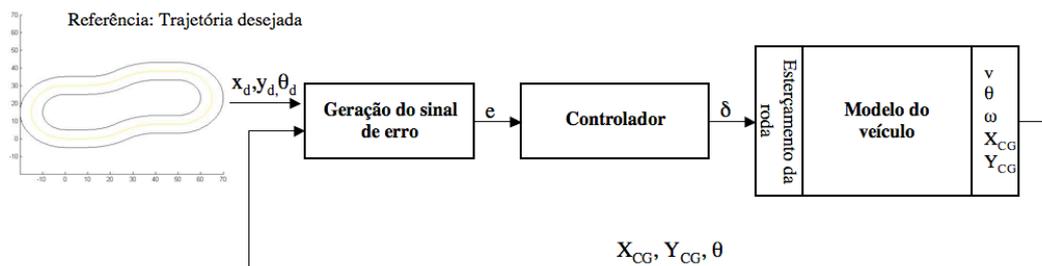


Figura 2: Topologia da malha de controle.

## 2.1. Construção da Pista

A construção da pista é feita através de funções do *Matlab*. Através das quais é possível desenhar uma pista escolhendo trechos como retas, definidas por seu comprimento, e curvas, definidas pelo arco e pelo raio desejado. As curvas não podem possuir um arco maior que 90 graus. Uma curva em U, ou de 180 graus, deve ser construída através de duas curvas de arco 90 graus. A orientação das curvas é definida pelo sinal do arco e do raio. Arcos positivos levam à curvas no sentido anti-horário, arcos negativos levam a curvas no sentido horário.

Durante a construção, a função armazena as coordenadas da pista em uma matriz onde cada linha representa um trecho. Como são duas as coordenadas, existe uma matriz os valores de  $x$ , que armazena as coordenadas de cada trecho e uma matriz para os valores de  $y$ . Essas matrizes armazenam os trechos com suas posições iniciais sempre em zero e sua orientação também zero em relação ao referencial local, como mostra a Figura 3. Conseqüentemente para formar a pista e saber onde se posiciona cada trecho com sua devida orientação, é necessária uma matriz que armazene a posição inicial de cada trecho e sua orientação. Cada linha dessa matriz guarda a posição  $x$ , a posição  $y$  e a orientação do trecho em relação ao referencial global, respectivamente. Essa forma de armazenar a pista, dividida em trechos, será útil para desenvolver o algoritmo de controle.

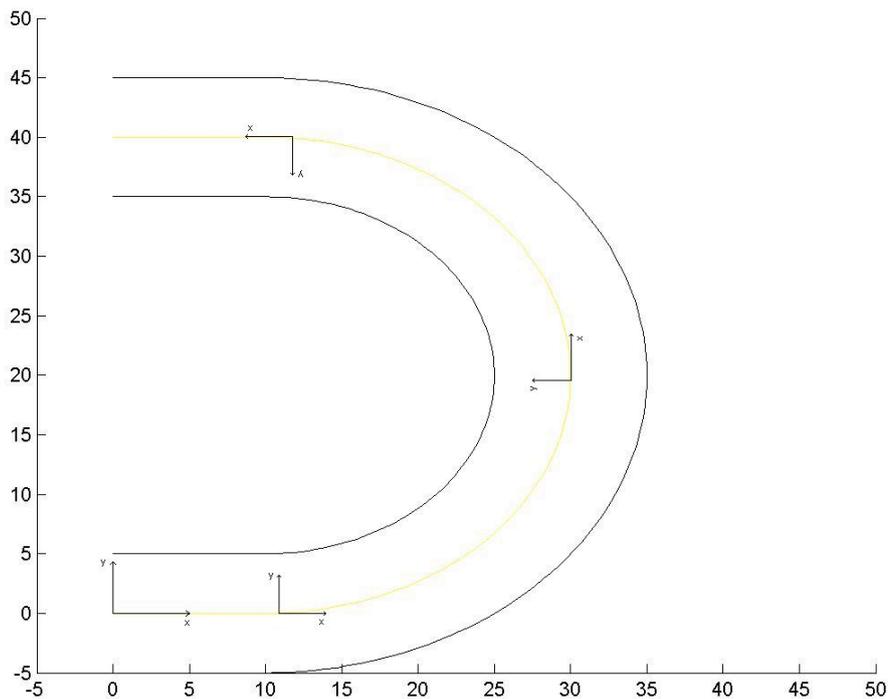


Figura 3: Os trechos são escritos e armazenados sempre em relação à um referencial onde a posição inicial é zero tal como a orientação.

O sinal de erro de posicionamento é gerado comparando a posição do centro de massa do veículo com o centro da pista. Note que os trechos estão escritos em relação a referenciais locais, assim o algoritmo de controle transporta a posição e orientação do veículo para esses referenciais a medida que o carro se desloca pelos trechos. A troca de referencial é feita apenas para se calcular o erro, que é um valor absoluto, ou seja, independe do referencial que se está trabalhando. Todos os outros elementos da malha de controle estão relacionados no referencial global.

Para que isso seja feito é preciso saber em que trecho o veículo se encontra e quando que ele mudou de um trecho para o outro. Para isso definem-se as regiões de abrangência de cada trecho de acordo com a Figura 4, Figura 5 e Figura 6.

Retas

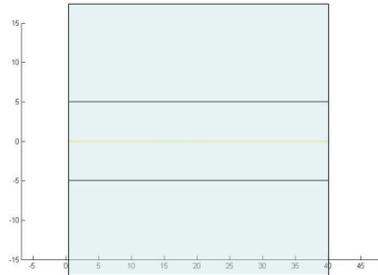


Figura 4: Abrangência: retas.

Curvas no sentido anti-horário

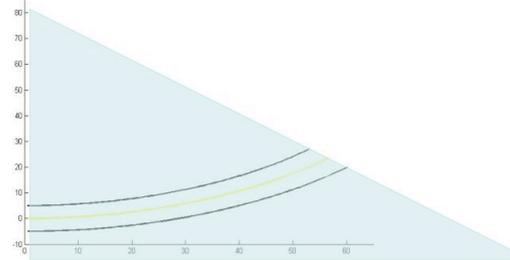


Figura 5: Abrangência: Curvas no sentido anti-horário.

Curvas no sentido horário

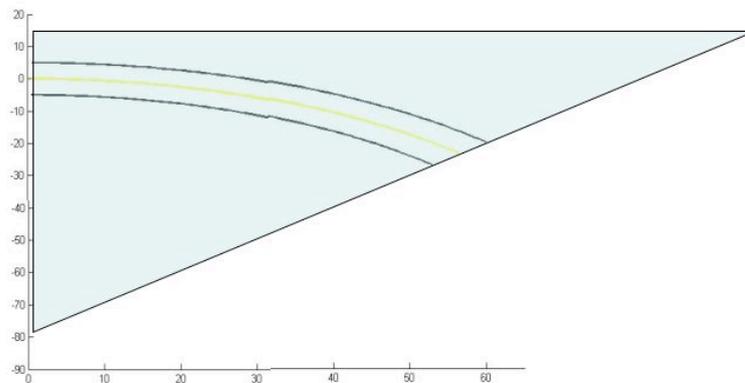


Figura 6: Abrangência: Curvas no sentido horário.

Quando o veículo se encontra dentro das faixas hachuradas, se diz que ele pertence ao trecho em questão e o erro é calculado de acordo com sua posição no referencial local daquele trecho. Quando o carro está fora da área marcada, o algoritmo passa para o trecho seguinte. Essa verificação é feita da seguinte forma:

no caso da reta, quando ele ultrapassa a posição  $x$  que marca o fim da reta e, no caso de curvas, quando ele ultrapassa o arco que define o semi-círculo do trecho. O último caso fica melhor explicado pelos cálculos a seguir, para um arco de 90 graus, como ilustra a Figura 7.

O ângulo  $\gamma$  visto na Figura 7 pode ser escrito no referencial  $(x',y')$  como sendo:

$$\gamma = \text{tg}^{-1}\left(\frac{y'_v}{x'_v}\right) \quad (1)$$

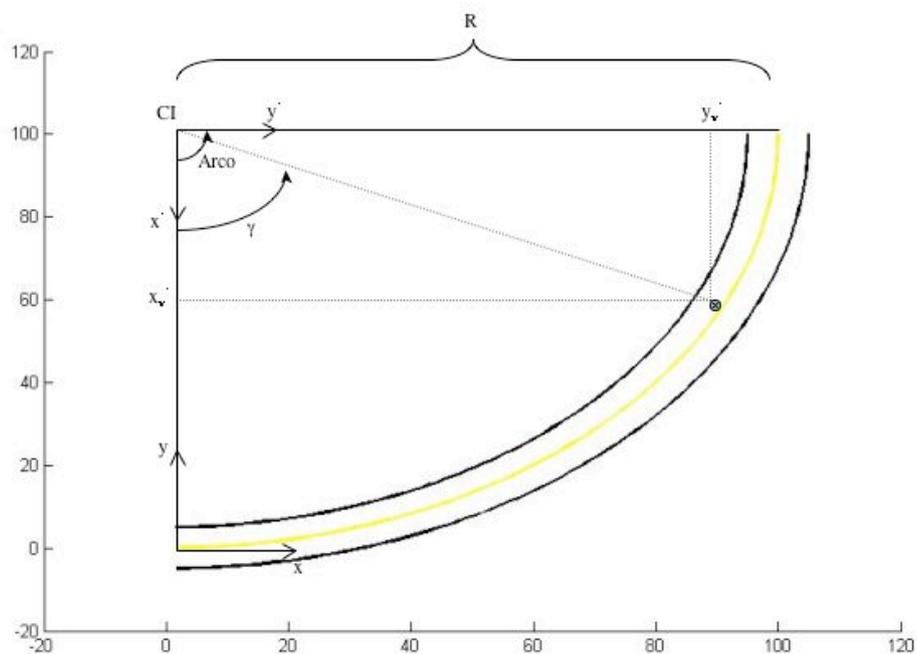


Figura 7: Veículo em um trecho de arco 90 graus.

Pode-se escrever os pontos  $x_v'$  e  $y_v'$  no referencial  $(x,y)$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_v' & y_v' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} CI_x - x_v & CI_y - y_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-90) & \text{sen}(-90) \\ -\text{sen}(-90) & \cos(-90) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} CI_x & CI_y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & R \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_v' & y_v' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} R - y_v & x_v \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

Substituindo em (1) se tem que o ângulo que o veículo faz em relação ao centro da trajetória é dado por:

$$\gamma = \text{tg}^{-1} \left( \frac{x_v}{R - y_v} \right) \quad (3)$$

Dessa forma quando o ângulo calculado por (3) for maior que o arco de círculo do trecho, o veículo passou para outro trecho. O mesmo cálculo é feito quando as curvas são para baixo ( $-90^\circ$ ).

Agora que se pode identificar em que trecho da pista está o veículo e quando se deve trocar de trecho, pode-se determinar o erro em relação ao centro da pista, assumindo que a posição do centro de massa do veículo está escrita no referencial local.

## 2.2. Implementação da Malha de Controle

Nota-se que a única variável relevante para o cálculo do erro e conseqüentemente para a determinação do sinal de controle é a posição (x,y) do veículo em relação a pista e sua orientação. Dessa forma a malha de controle está organizada da seguinte forma, uma função chamada monitora a posição do veículo e identifica em que trecho da pista ele se encontra. De acordo com essa informação, sua posição (x,y) é transportada do referencial global para o referencial local do trecho em questão, usando-se uma matriz de transformação. Após a transformação calcula-se a distância equivalente do C.G. do veículo para o centro da pista, gerando dessa forma o erro que segue para o controlador.

É importante notar que essa transformação de referenciais está sendo feita somente para se obter o erro, o resto da malha de controle, tal como as variáveis de estado do modelo continuam referenciadas no referencial global. Por este motivo não é preciso se preocupar com as condições finais e iniciais de cada trecho, pois o modelo se comporta sempre em relação a um único referencial global fixo. A topologia da malha implementada em *Simulink* pode ser vista na Figura 8.

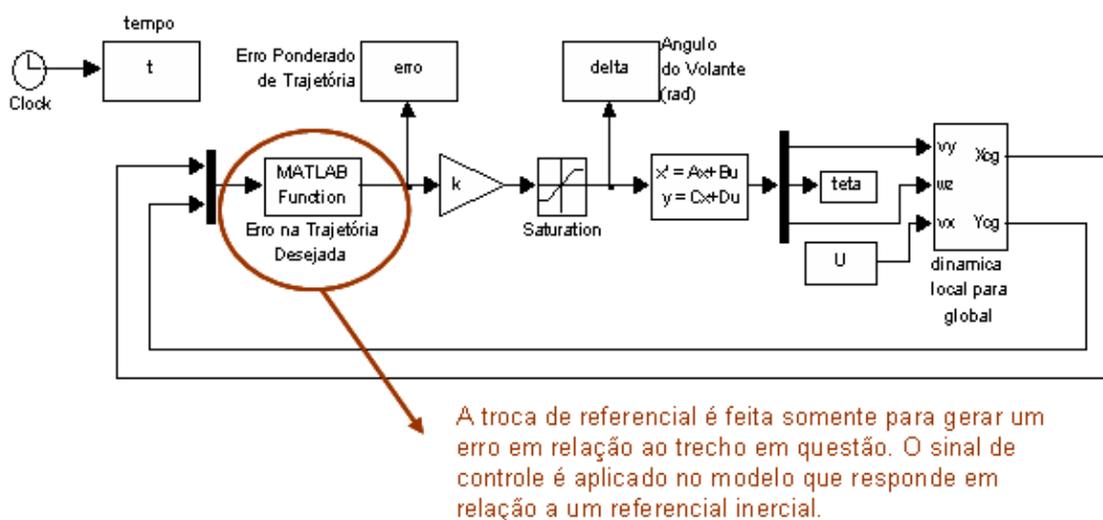


Figura 8: Implementação em *Simulink* da Malha de Controle.

Essa estratégia foi adotada porque se a pista fizesse curvas de 180°, ou seja, se houvessem pontos da pista que tivessem as mesmas coordenadas em X

para diferentes  $Y$ , não era possível realizar a interpolação, pois esta é feita em cima de funções. Dessa forma foi necessário segmentar a pista em vários trechos. Os trechos foram referenciados da maneira descrita acima para que a função de interpolação fosse feita sempre em relação a variável  $x$ . Note que referenciando os trechos, como feito acima, as únicas possibilidades de segmentos são curvas no sentido horário, curvas no sentido anti-horário e retas, partindo todas da origem de seus respectivos referenciais locais como mostra a Tabela 2. Dessa forma é como se o controle estivesse sendo feito sempre em cima de trajetórias abertas e, além disso é possível identificar em que trecho da pista se encontra o veículo.

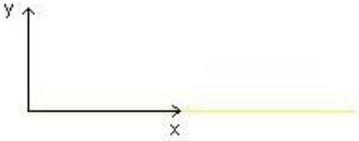
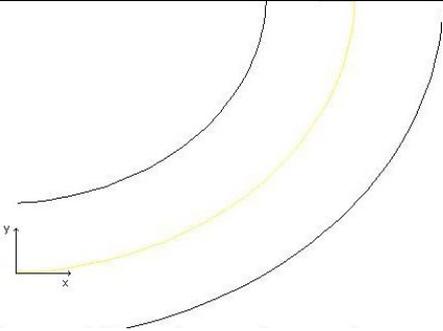
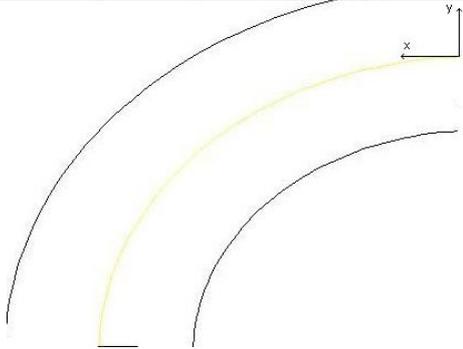
 <p>Figura 9: Retas.</p>	<p>Erros positivos fazem o controlador virar o volante para a esquerda e erros negativos fazem o controlador virar o volante para direita. Onde '<i>erro = y desejado - y atual</i>'</p>
 <p>Figura 10: Curvas para cima.</p>	<p>Erros positivos fazem o controlador virar o volante para a esquerda e erros negativos fazem o controlador virar o volante para direita. Onde '<i>erro = y desejado - y atual</i>'</p>
 <p>Figura 11: Curvas para baixo.</p>	<p>Erros positivos fazem o controlador virar o volante para a direita e erros negativos fazem o controlador virar o volante para esquerda. Nesse caso note que existe uma <b>troca de sinal do erro</b>.</p>

Tabela 2: Tipo de curva.

### 2.3. Geração do Sinal de Erro

Existem duas formas de saber que o veículo não está percorrendo o percurso desejado. Uma é medindo a distância entre seu centro de gravidade e o centro da pista e outra maneira de melhorar o resultado é observar o ângulo de *yaw* do veículo e compará-lo com a tangente da curva, pois a situação desejada é que o centro de gravidade percorra o centro da pista com a orientação correta. Essas duas formas de se avaliar o comportamento do veículo podem ser ponderadas de forma a se obter um resultado satisfatório, assim como podem ser utilizadas de forma independente. Nesse trabalho avalia-se as duas possibilidades.

Para trechos de reta o erro é simplesmente a diferença entre a coordenada *y* da pista e a coordenada *y* do veículo, como mostra a Figura 12. Nas curvas, a idéia é a mesma, mas o cálculo do erro é um pouco diferente, pode-se ver na Figura 13 como é determinado seu valor dado pela expressão

$$D = \sqrt{x_c^2 + (R - y_c)^2} \quad (4)$$

$$Erro = D - R$$

onde *R* é um valor conhecido, pois foi usado na construção da pista (ver Item 2.1). A Figura 14 mostra o ângulo de *yaw* desejado para o veículo dado sua posição na pista e (5) mostra como ele é calculado.

É importante ressaltar que o sinal de erro que chega no controlador é sempre unidimensional. Quando se trabalha com mais de uma comparação entre as variáveis de saída e as referencias, os erros são ponderados e somados de forma a resultar em um único sinal. Nesse trabalho, independente da complexidade do modelo, a variável de controle é sempre unidimensional também, representada pelo ângulo de esterçamento das rodas ou do volante.

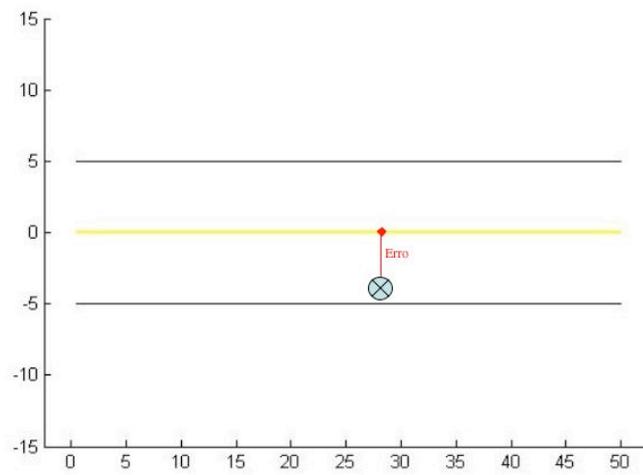


Figura 12: Erro nas retas.

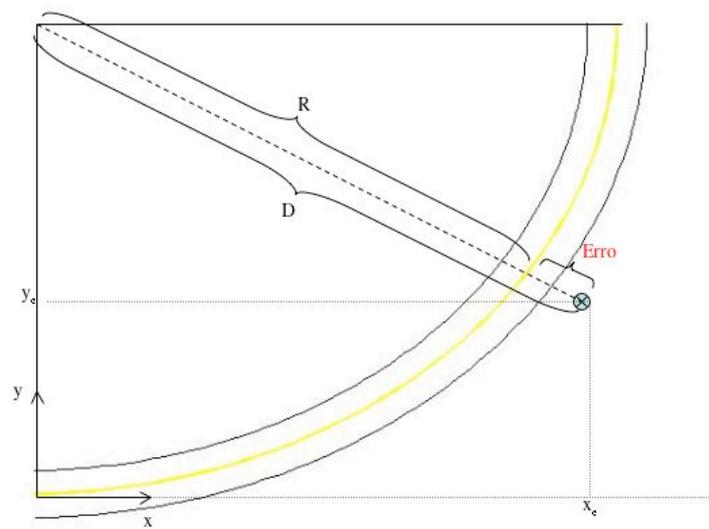


Figura 13: Erro nas curvas.

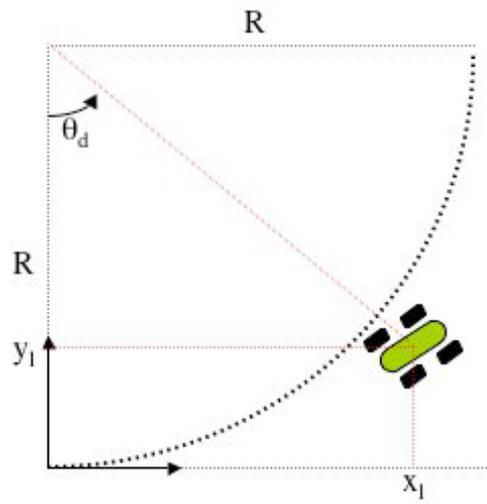


Figura 14: Ângulo de yaw desejado.

$$\theta_d = \text{tg}^{-1}\left(\frac{x_l}{R - y_l}\right) \quad (5)$$

### 3 Modelo Cinemático do Veículo

Nesse capítulo se faz uma breve apresentação do modelo cinemático do veículo, descrito em (Speranza, Spinola, 2005) e em seguida projeta-se a malha de controle onde são feitos os testes com diferentes ajustes de controlador. Alguns parâmetros relevantes para o entendimento do modelo, assim como os referenciais inercial e local, podem ser vistos na Figura 15.

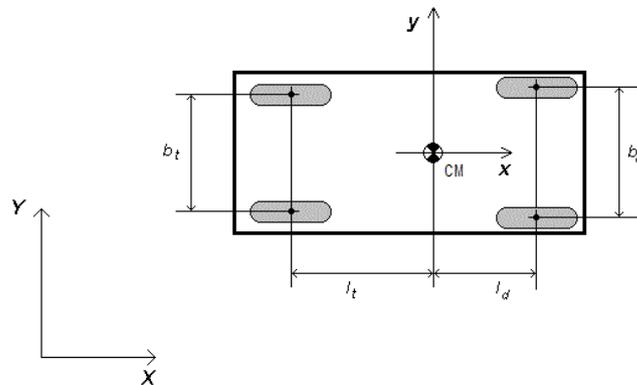


Figura 15: Sistemas de coordenadas e parâmetros do veículo.

O referencial global é representado pelos eixos  $(X, Y)$ , o referencial local, embarcado no veículo é representado pelos eixos  $(x, y)$ ;  $b_d$  e  $b_t$  representam as bitolas dianteiras e traseiras;  $l_d$  e  $l_t$  são as distâncias entre o centro de gravidade e os eixos dianteiros e traseiros respectivamente. A distância entre eixos é dada por  $l = l_d + l_t$ .

Para a implementação do modelo cinemático é preciso também conhecer a relação entre o ângulo de esterçamento do volante e o ângulo de esterçamento das rodas. Essa relação é descrita pela geometria de Ackermann, onde dado um esterçamento no volante é possível determinar o raio de curvatura instantâneo do veículo ( $R$ ) em baixas velocidades. A Figura 16 mostra a geometria de Ackermann e (6) deduz essa relação, onde  $k_d$  e  $\delta_f$  são, respectivamente, a relação de transmissão e a folga do sistema de direção.

$$\begin{cases}
 \text{Para } \delta < \delta_f \left\{ \begin{array}{l} \delta_d = k_d \cdot \delta \\ R = \frac{l}{\operatorname{tg}(\delta_d)} - \frac{b_d}{2} \\ \delta_e = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{l}{R - b_d/2}\right) \end{array} \right. \\
 \text{Para } \delta > \delta_f \left\{ \begin{array}{l} \delta_e = k_d \cdot \delta \\ R = \frac{l}{\operatorname{tg}(\delta_e)} - \frac{b_d}{2} \\ \delta_d = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{l}{R - b_d/2}\right) \end{array} \right.
 \end{cases} \quad (6)$$

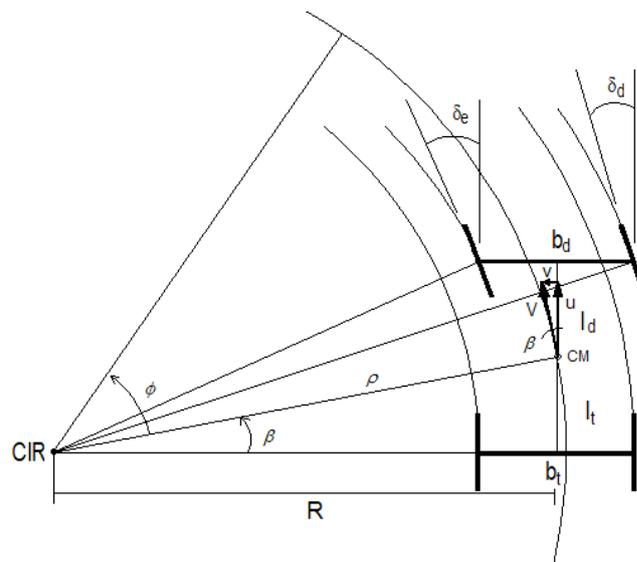


Figura 16: Geometria de Ackermann.

A relação de transmissão do sistema de direção é estabelecida a partir do ângulo de esterçamento máximo (o da roda interna -  $\delta_{\text{máx}}$ ) para uma curva de raio mínimo ( $R_{\text{mín}}$ ) pré-estabelecida, também a partir da geometria de Ackermann, considerando um ângulo de esterçamento máximo do volante ( $\delta_{\text{máx}}$ ) desejado. Limita-se portanto, o ângulo do volante entre

$$|\delta_f| \leq |\delta| \leq |\delta_{\text{máx}}| \quad (7)$$

sendo  $\delta$  positivo para curvas à esquerda e negativo para curvas à direita.

A partir do raio de curvatura instantâneo e da velocidade longitudinal constante do veículo, pode-se obter as variáveis cinemáticas do modelo: velocidade lateral ( $v$ ), velocidade de *yaw* ( $w$ ) e aceleração lateral ( $a_y$ ), todas em relação ao referencial local do carro. O raio de curvatura do centro de massa ( $\rho$ ) é calculado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \text{Para } R > 0 \left\{ \begin{array}{l} \beta = \operatorname{tg}^{-1}(l_t / R) \\ V = u / \cos(\beta) \\ v = u \cdot \operatorname{tg}(\beta) \\ \rho = \sqrt{R^2 + l_t^2} \\ \omega = V / \rho \\ a_y = \omega \cdot u \end{array} \right. \\
 \text{Para } R < 0 \left\{ \begin{array}{l} \beta = -\operatorname{tg}^{-1}(l_t / R) \\ V = u / \cos(\beta) \\ v = u \cdot \operatorname{tg}(\beta) \\ \rho = -\sqrt{R^2 + l_t^2} \\ \omega = V / \rho \\ a_y = \omega \cdot u \end{array} \right.
 \end{aligned} \tag{8}$$

onde  $\beta$  é o ângulo da velocidade absoluta  $V$  em relação ao eixo  $x$  do referencial local. Lembrando-se que  $R$  é positivo para curvas à esquerda e negativo para curvas à direita.

Conhecida as velocidades no referencial local ( $u$  e  $v$ ), é possível projetá-las para obter o deslocamento do carro no referencial inercial, como mostram as relações a seguir:

$$\theta = \int \omega \, dt \tag{9}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \tag{10}$$

### 3.1. Construção da Malha de Controle

Tendo em mãos as variáveis cinemáticas do veículo e calculando-se o deslocamento de seu C.G., dada uma velocidade longitudinal constante ( $u$ ), pode-se pensar em uma malha de controle que faça com que o veículo percorra uma dada trajetória pré-definida. Pode-se ver na Figura 17 a malha com um controlador proporcional. Em destaque nota-se que a topologia é a mesma proposta no Capítulo 2.

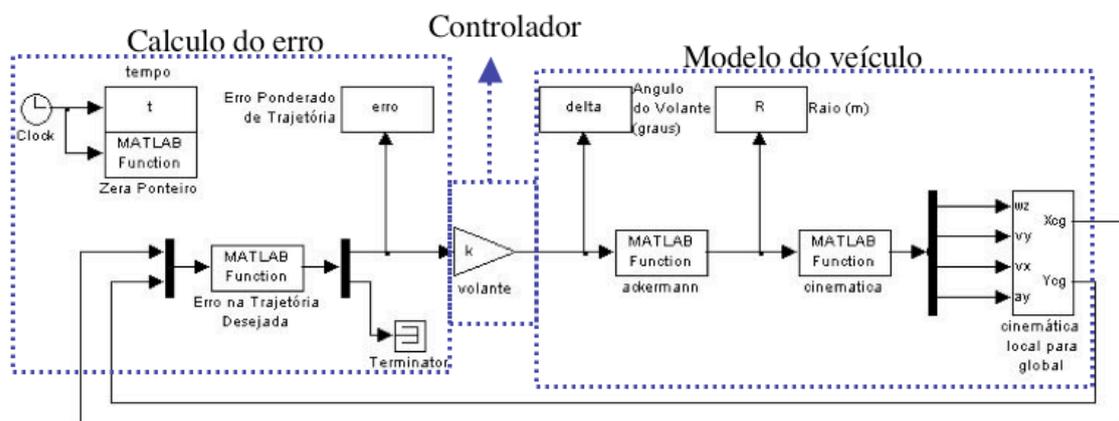


Figura 17: Implementação em *simulink* da malha de controle com controlador proporcional.

Na Figura 17 o primeiro bloco representa a função que calcula o erro entre o centro de gravidade do veículo e o centro da pista, como visto anteriormente. O bloco a seguir representa o ganho do volante, no caso o controlador, em seguida tem-se a relação de ackermann, vista em (8). Com essas variáveis determina-se o deslocamento do veículo no referencial global.

### 3.2. Simulações

Primeiramente considera-se um controlador proporcional com ganho ajustado em 100. É importante ressaltar que o ajuste do ganho é empírico e que o objetivo do trabalho não é obter um controlador ótimo para o sistema, mas sim desenvolver uma metodologia de projeto que facilite a implementação e o teste de tal controlador.

A trajetória mostrada na Figura 18 simula uma troca de pista, com uma reta inicial de 20m, duas curvas em sentidos opostos de arco 20m e raio 50m e mais um trecho de reta de 20m. Dados a pista e o ajuste do controlador pode-se observar o deslocamento do C.G. do veículo ao longo da pista.

A linha vermelha representa o deslocamento do C.G. e a linha amarela representa o meio da pista. Pode-se notar que o C.G. se desloca muito próximo do centro da pista que é a referência adotada. Mas é importante analisar as demais variáveis como erro, ângulo de esterçamento do volante e aceleração lateral, para observar a coerência dos resultados.

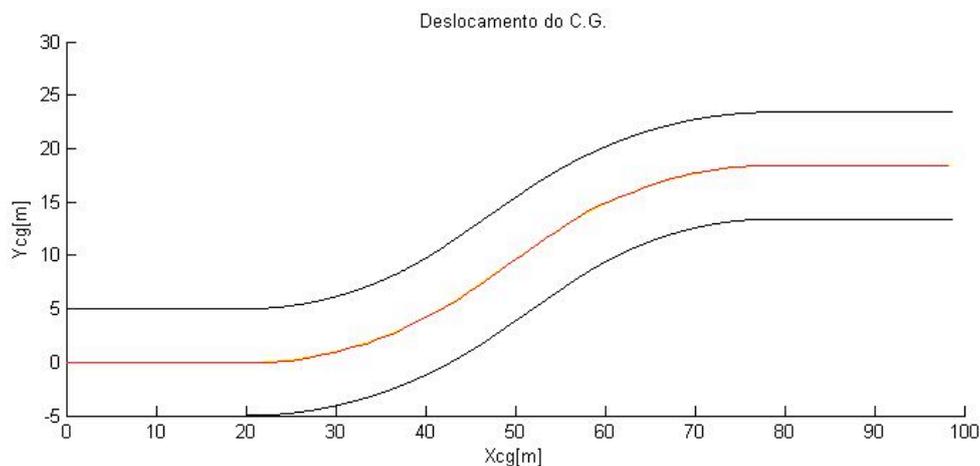


Figura 18: Deslocamento do C.G. - P=100.

Como notado na Figura 18, o erro (Figura 19) é bem pequeno em relação ao centro da pista, o ângulo de esterçamento do volante (Figura 19) se encontra dentro dos limites reais, mas o seu perfil é bastante oscilatório. A aceleração lateral do veículo (Figura 20) também está coerente com a realidade.

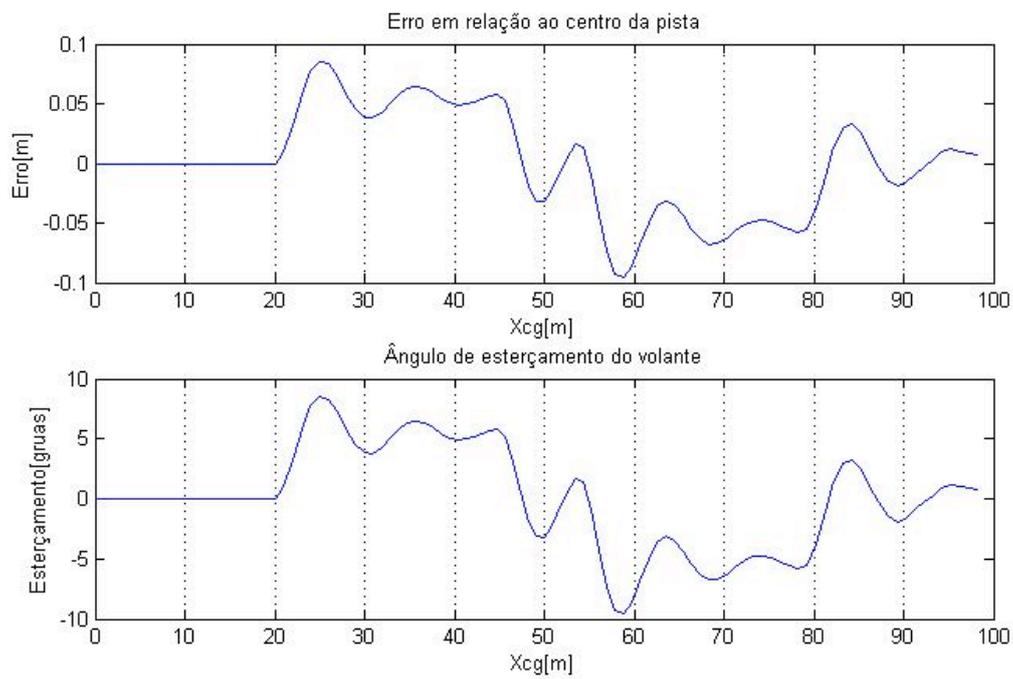


Figura 19: Erro e esterçamento do volante - P-100.

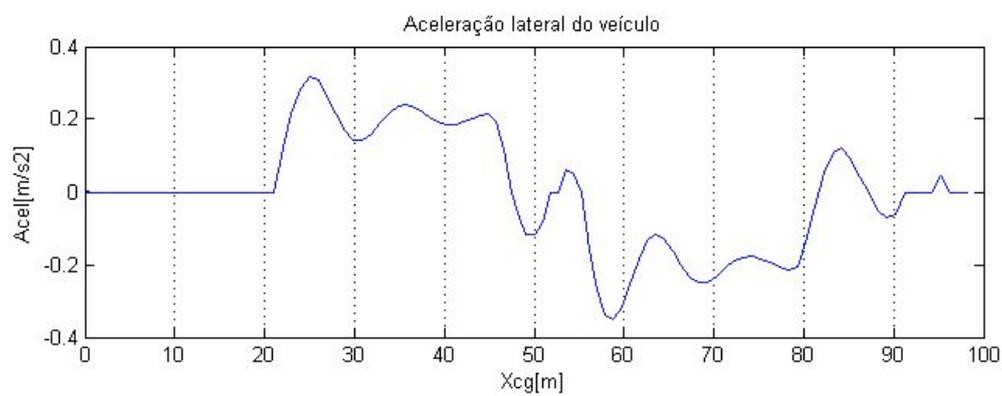


Figura 20: Aceleração lateral - P-100.

Para tentar melhorar o problema de oscilação utiliza-se a seguir um controlador do tipo proporcional derivativo, que controlador leva em consideração não só o erro mas também sua taxa de variação ao longo do tempo. Isso pode melhorar a oscilação do sistema de direção. Um controlador desse tipo pode ser implementado a partir da adição de um zero e um pólo não representativo ao sistema. Dessa forma, através de uma função de transferência se posicionou um pólo em  $-10$  e um zero em  $-3$ . O resultado é visto na Figura 21,

O comportamento do sistema em relação ao rastreamento da trajetória não se alterou muito em relação ao caso anterior. Mas as oscilações no erro e conseqüentemente no ângulo de esterçamento do volante melhoraram bastante, como visto na Figura 22. A aceleração lateral na Figura 23 também não sofreu alteração com a troca do controlador.

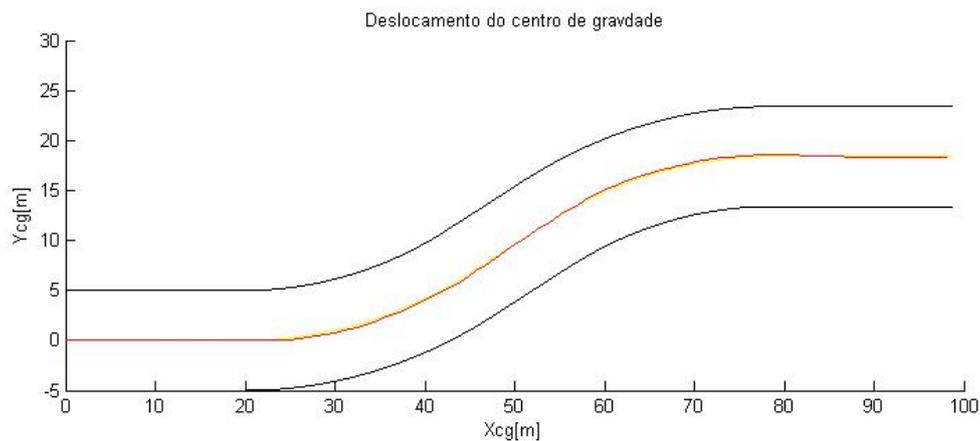


Figura 21: Deslocamento do C.G. – P:100 – D:Pólo -10 Zero -3.

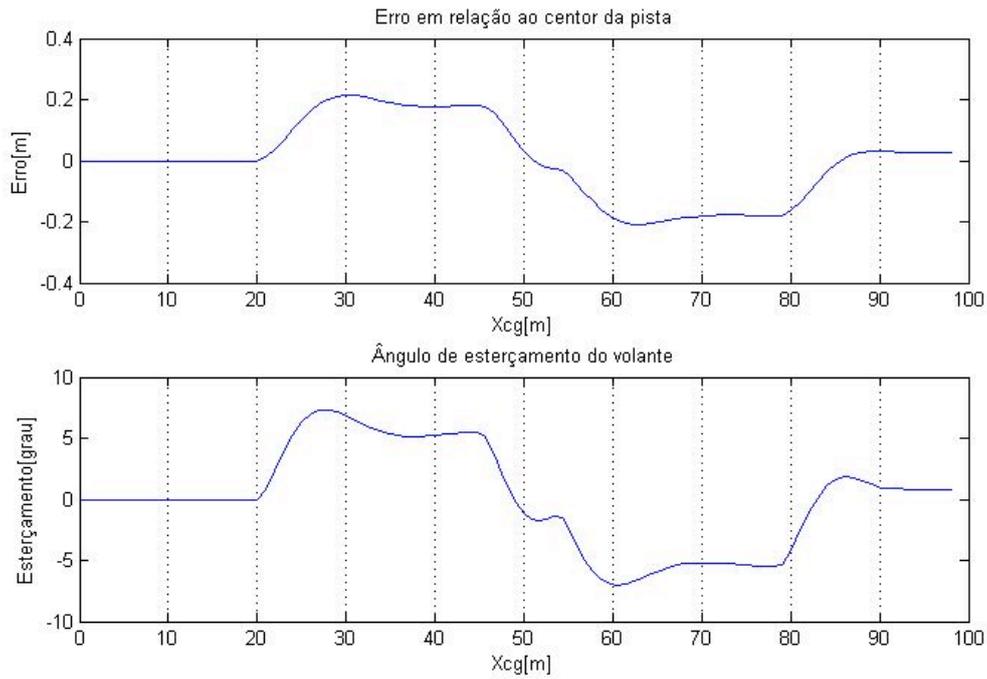


Figura 22: Erro e esterçamento do volante – P:100 – D:Pólo -10 Zero -3.

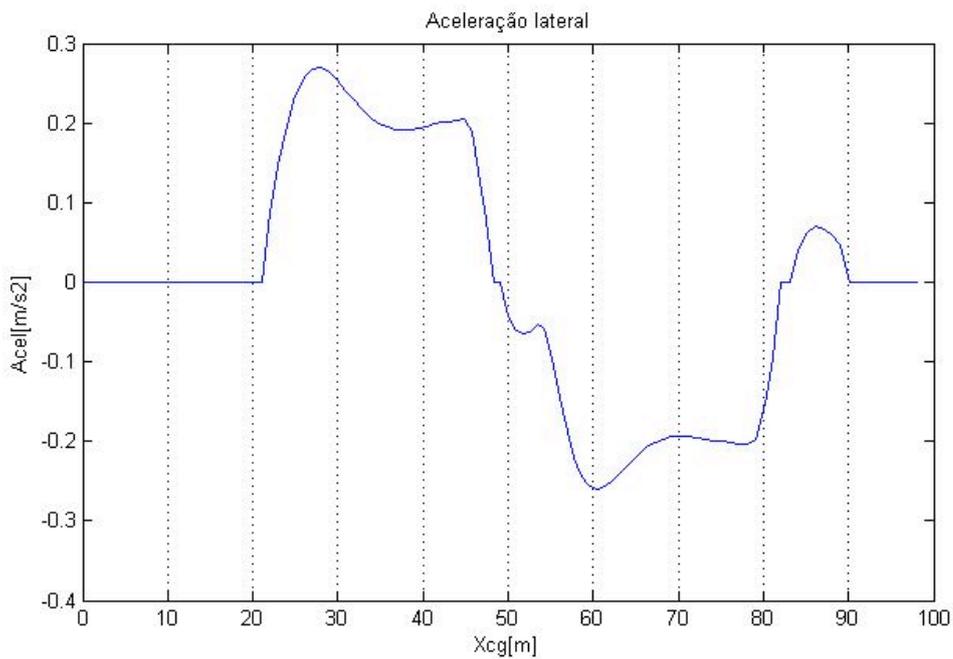


Figura 23: Aceleração lateral – P:100 – D:Pólo -10 Zero -3.

Já que se conseguiu um ajuste satisfatório para o controlador proporcional derivativo, apresenta-se a seguir uma simulação com um circuito fechado. As curvas têm o mesmo raio das utilizadas anteriormente. Essa simulação tem como objetivo validar a implementação do procedimento descrito no Capítulo 2.1 de construção e tratamento de trajetórias fechadas.

Como se pode ver na Figura 24, o veículo segue a trajetória dentro dos limites da pista. O erro é bem pequeno, como visto na Figura 25, assim como as oscilações são pequenas e o limite máximo de esterçamento não foi atingido. Pode-se também notar que a aceleração lateral (Figura 26) do carro se mantém dentro de limites aceitáveis.

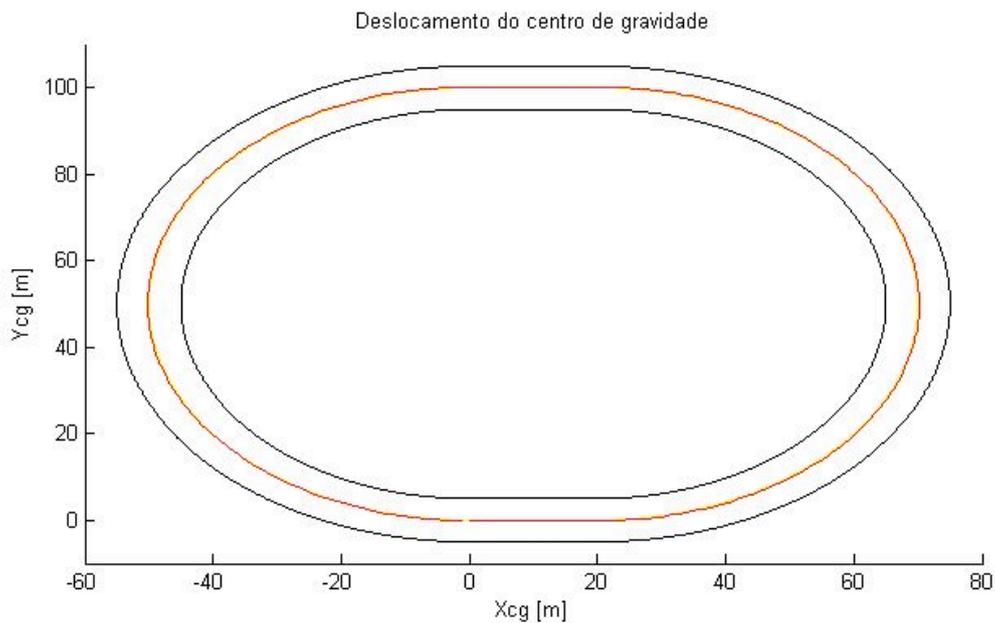


Figura 24: Pista Oval - CG – P:100 – D:Pólo -10 Zero -3.

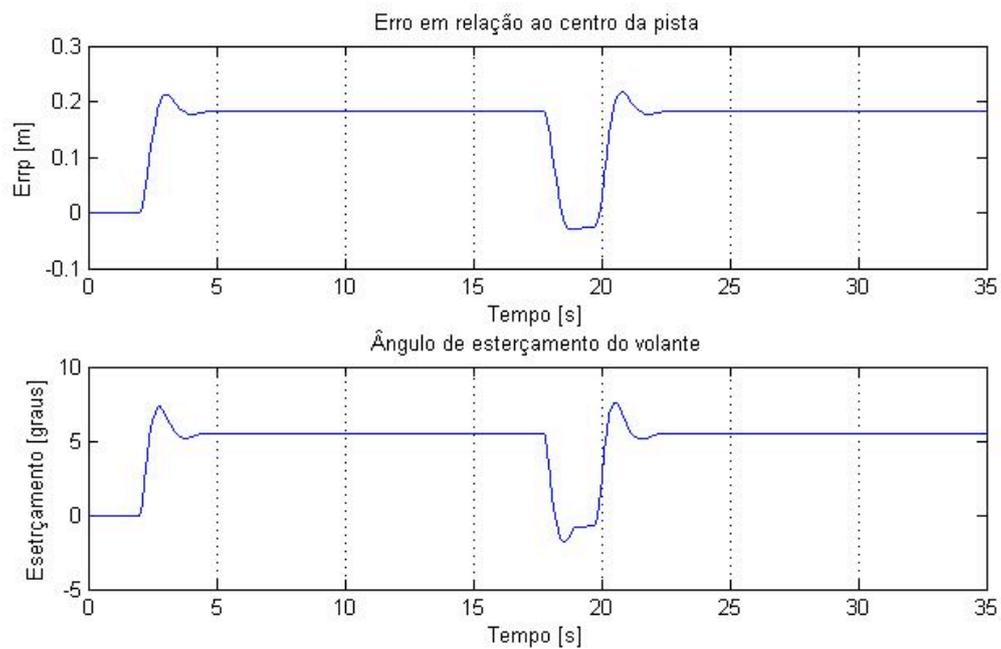


Figura 25: Pista Oval - Erro e delta – P:100 – D:Pólo -10 Zero -3.

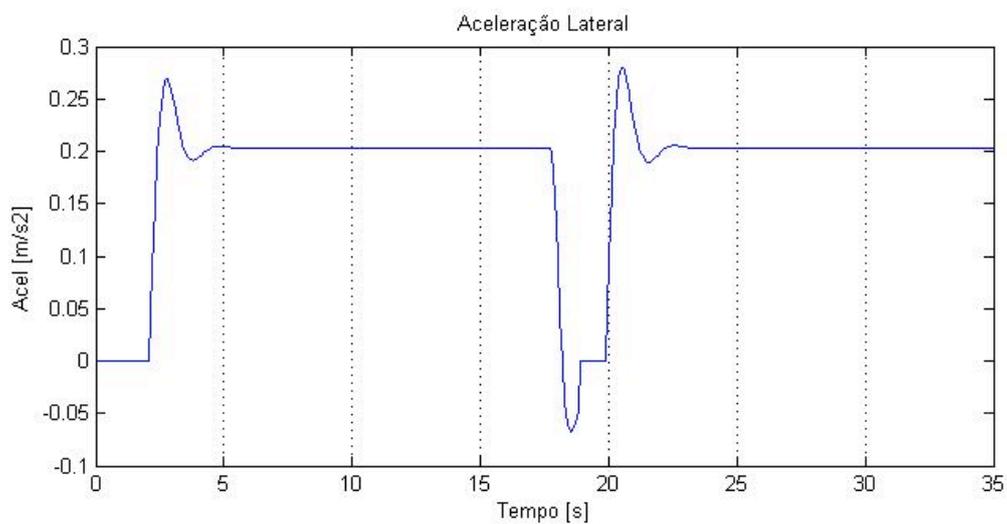


Figura 26: Pista Oval - Aceleração lateral – P:100 – D:Pólo -10 Zero -3.

## 4

### Modelo Linear de Quatro Graus de Liberdade

O modelo linear descrito em (Spinola, 2003) na forma de estado (11) representa um veículo de dois graus de liberdade: velocidade lateral em relação ao referencial embarcado no veículo e velocidade de *yaw*. O ângulo de *yaw* é obtido através da integração da velocidade de *yaw* e o deslocamento na direção Y do referencial global é obtido através da linearização da expressão que descreve essa variável, mostrada adiante.

Esse modelo assume linearizações nos pneus, ou seja, limita o ângulo de deriva dos pneus a pequenos ângulos, assim como linearizações na transferência do referencial local do veículo para o global, limitando o ângulo de *yaw* a pequenos valores. A Tabela descreve os parâmetros para um veículo de passeio de porte médio e as variáveis adotadas.

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2(C_f + C_r)}{m_{tot}u} & 0 & \frac{-2(aC_f - bC_r) - m_{tot}u^2}{m_{tot}u} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-2(aC_f - bC_r)}{I_{yaw}u} & 0 & \frac{-2(a^2C_f + b^2C_r)}{I_{yaw}u} & 0 \\ -1 & -u & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \theta \\ \omega \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2C_f}{m_{tot}} \\ 0 \\ \frac{2aC_f}{I_{yaw}} \\ 0 \end{bmatrix} \delta_f \quad (11)$$

Símbolo	Descrição	Valor assumido
$C_f, C_r$	Rigidez lateral dos pneus dianteiros e traseiros.	20000 N/rad
$m_{tot}$	Massa total do veículo	1495 kg
$u$	Velocidade longitudinal.	X
$a$	Distância do C.G. ao eixo dianteiro.	1,203 m
$b$	Distância do C.G. ao eixo traseiro.	1,217 m
$I_{yaw}$	Momento de inércia de <i>yaw</i> .	2500 kgm <sup>2</sup>
$v$	Velocidade lateral no referencial do veículo.	Variável de estado
$\theta$	Ângulo de <i>yaw</i>	Variável de estado
$\omega$	Velocidade de <i>yaw</i> .	Variável de estado
$Y$	Deslocamento do C.G. na direção Y	Variável de estado
$\delta_f$	Ângulo de esterçamento das rodas.	Variável de controle

Tabela 3: Parâmetros e variáveis do modelo.

#### 4.1. Malha de Controle com Transferência de Referencial Linear

A malha de controle da Figura 27 é composta de elementos lineares. Será avaliado o desempenho de controladores da família PID no controle do sistema escrito por (11). O objetivo do sistema é acompanhar uma trajetória pré-definida. O erro é obtido através da diferença entre a posição do C.G. do veículo e o centro da pista. Como em um primeiro momento está sendo considerada a velocidade longitudinal constante, a posição X do C.G. é calculada por uma simples integração da velocidade longitudinal ( $u$ ). O detalhamento da malha pode ser visto pela Figura 28, Figura 29 e Figura 30.

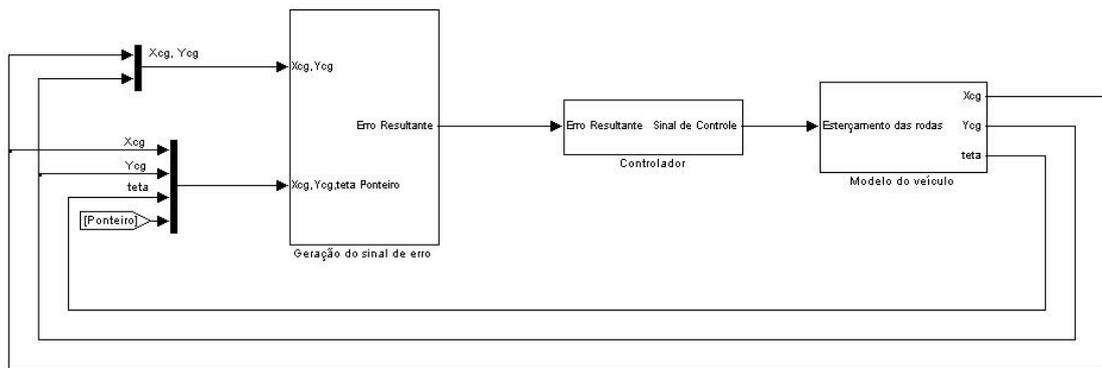


Figura 27: Implementação em simulink da malha de controle para o modelo linear.

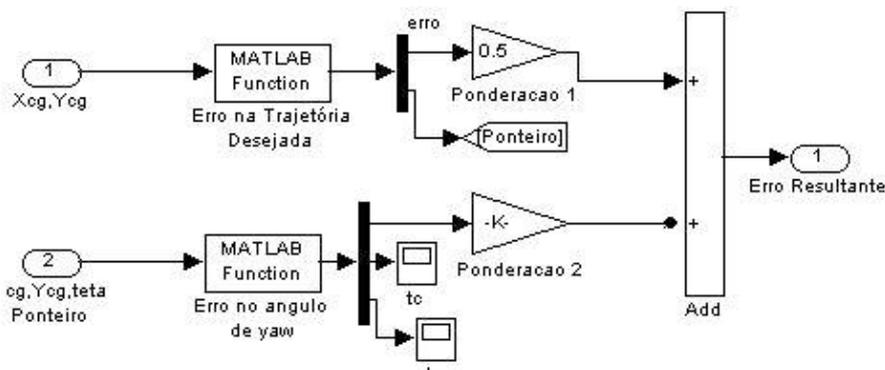


Figura 28: Implementação em *Simulink* da geração do sinal de erro.

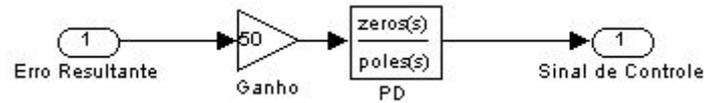


Figura 29: Implementação em *Simulink* do controlador.

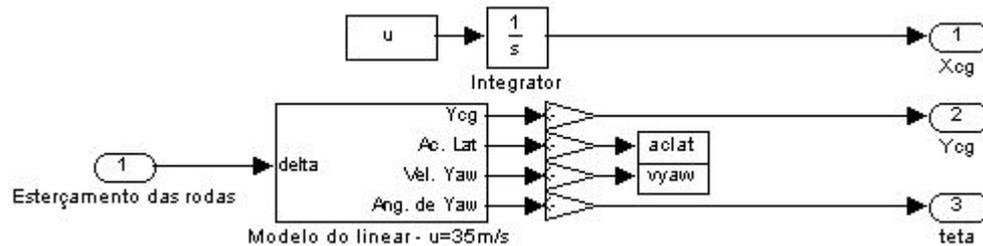


Figura 30: Modelo do veículo.

#### 4.1.1. Função de Transferência do Modelo

Para facilitar a análise pelo lugar geométrico das raízes, escreve-se a seguir a malha da Figura 27 na forma de funções de transferência. Primeiramente considera-se o modelo de dois graus de liberdade sem a adição das variáveis  $\theta$  e  $Y$ , dado por,

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2(C_f + C_r)}{m u} & \frac{-2(aC_f - bC_r) - m u^2}{m u} \\ \frac{-2(aC_f - bC_r)}{I_{yaw} u} & \frac{-2(a^2 C_f + b^2 C_r)}{I_{yaw} u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2C_f}{m} \\ \frac{2aC_f}{I_{yaw}} \end{bmatrix} \delta \quad (12)$$

Em seguida se deduz as funções de transferência de  $v$  em relação a  $\delta$  e de  $\omega$  em relação a  $\delta$ , a partir de,

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix} \delta \quad (13)$$

ou,

$$\begin{aligned} \dot{v} &= Av + B\omega + E\delta \\ \dot{\omega} &= Cv + D\omega + F\delta \end{aligned} \quad (14)$$

da primeira equação matricial tem-se no domínio de Laplace,

$$s.v(s) = A.v(s) + B.\omega(s) + E.\delta(s) \quad (15)$$

$$\frac{v(s).(s - A) - E.\delta(s)}{B} = \omega(s)$$

e da segunda equação:

$$\omega(s) = \frac{C.v(s) + F.\delta(s)}{s - D} \quad (16)$$

Igualando (15) e (16),

$$\frac{C.v(s) + F.\delta(s)}{s - D} = \frac{v(s).(s - A) - E.\delta(s)}{B}$$

$$\frac{v(s)}{\delta(s)} = \frac{B.F + E(s - D)}{(s - A)(s - D) - BC} = \frac{E.s + B.F - E.D}{s^2 + (-D - A)s + (A.D - B.C)} \quad (17)$$

Da mesma forma encontra-se que:

$$\frac{\omega(s)}{\delta(s)} = \frac{E.C + F(s - A)}{(s - A)(s - D) - BC} = \frac{F.s + (C.E - F.A)}{s^2 + (-D - A)s + (A.D - B.C)} \quad (18)$$

#### 4.1.2. Construção da Malha

Sabe-se que a projeção das velocidades do referencial local do veículo para o global é dada pelo seguinte par de equações:

$$\begin{cases} \dot{X} = u \cos \theta - v \cdot \text{sen} \theta \\ \dot{Y} = -u \text{sen} \theta - v \cdot \text{cos} \theta \end{cases} \quad (19)$$

Como a variável de controle é  $Y$ , usa-se apenas a segunda equação. Linearizando essa equação tem-se:

$$\dot{Y} = -u\theta - v \quad (20)$$

Assim o diagrama de blocos que representa a malha de controle envolvendo o modelo do veículo e o controlador é ilustrado na Figura 31,

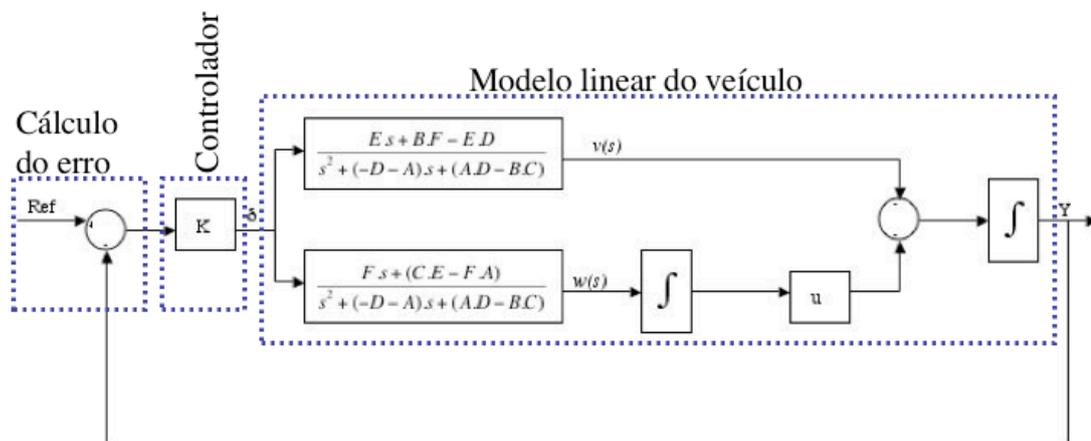


Figura 31: Malha de controle linear com as FT's.

A função de transferência que relaciona o ângulo de esterçamento da roda com o deslocamento global em  $Y$  é dada pelo desenvolvimento da seguinte expressão,

$$\frac{Y(s)}{\delta(s)} = \left( -H1 - \frac{H2}{s} \cdot u \right) \cdot \frac{1}{s}$$

onde,

H1 -> Função de transferência que relaciona  $v(s)$  com  $\delta$ .

H2 -> Função de transferência que relaciona  $w(s)$  com  $\delta$ .

$$\frac{Y(s)}{\delta(s)} = -\frac{E s + (B.F - E.D)}{s^2 + (-D - A)s + (A.D - B.C)} \cdot \frac{1}{s} - \frac{F s + (C.E - F.A)}{s^2 + (-D - A)s + (A.D - B.C)} \cdot \frac{u}{s^2}$$

$$\frac{Y(s)}{\delta(s)} = -\frac{1}{s^2 + (-D - A)s + (A.D - B.C)} \left[ \frac{E s + (B.F - E.D)}{s} + \frac{F s + (C.E - F.A)}{s^2} \cdot u \right]$$

$$\frac{Y(s)}{\delta(s)} = -\frac{1}{s^2 + (-D - A)s + (A.D - B.C)} \left[ \frac{E s^2 + (B.F - E.D + F.u)s + (C.E - F.A).u}{s^2} \right]$$

$$\frac{Y(s)}{\delta(s)} = \frac{E s^2 + (B.F - E.D + F.u)s + (C.E - F.A).u}{s^4 + (-D - A)s^3 + (A.D - B.C)s^2}$$

De modo a fazer com que o ângulo de *yaw* seja positivo quando  $\delta$  crescer (a fim de simplificar a análise do sistema), a saída do sistema é multiplicada por  $-1$ . Isso está implícito na malha da Figura 27, pois essa multiplicação está sendo feita na matriz de estado C. Sendo assim tem-se:

$$\frac{Y(s)}{\delta(s)} = \frac{-E s^2 - (B.F - E.D + F.u)s - (C.E - F.A).u}{s^4 + (-D - A)s^3 + (A.D - B.C)s^2} \quad (21)$$

Substituindo os valores da Tabela 1 encontra-se os pólos e zeros da função de transferência, e em seguida, de modo a possibilitar a escolha de pólos para a malha fechada e conseqüente ajuste do controlador, é traçado o Lugar

Geométrico das Raízes para duas velocidades distintas do veículo, 10 m/s e 20 m/s.

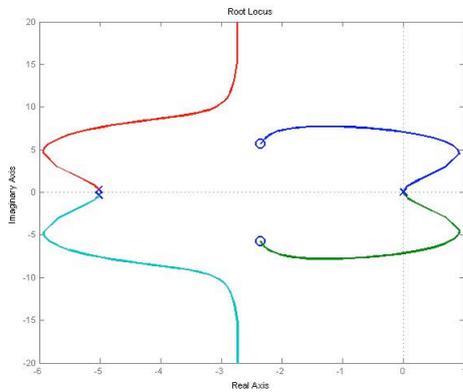


Figura 32: Lugar geométrico das raízes para  $u=10\text{m/s}$

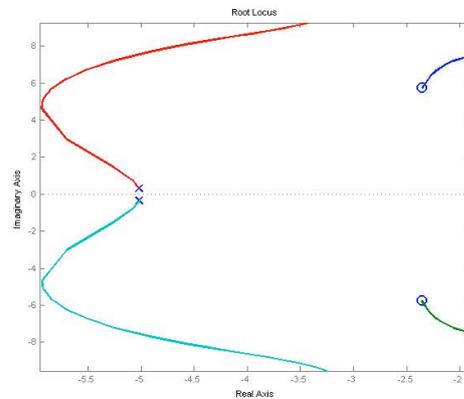


Figura 33: Lugar geométrico das raízes para  $u=10\text{m/s}$  - Vista Ampliada.

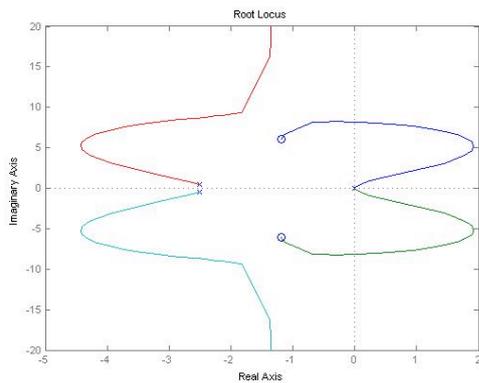


Figura 34: Lugar geométrico das raízes para  $u=20\text{m/s}$ .

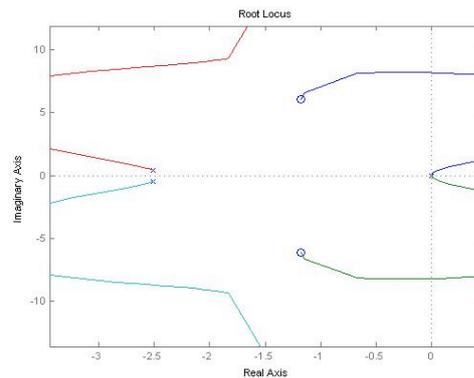


Figura35: Lugar geométrico das raízes para  $u=20\text{m/s}$  - Vista Ampliada.

Quando a velocidade é baixa, no caso 10 m/s (Figura 32 e Figura 33), o sistema apresenta uma faixa de instabilidade, mas com o ajuste correto do ganho ele retorna para a região de estabilidade. Nesse caso o ganho mínimo para haver estabilidade é 4,03. É possível notar que o sistema sempre terá um comportamento oscilatório, ao passo que sempre existirão pólos complexos conjugados, independente do ajuste do ganho. Comparando com o caso de  $u=20\text{m/s}$  (Figura 34, Figura 35) percebe-se que quando se aumenta a velocidade a faixa de instabilidade aumenta e para maiores velocidades a dinâmica do sistema se torna

mais lenta, ou seja, sistema demora mais tempo para responder á excitações de entrada.

#### 4.1.3. Simulações Para um Controlador Proporcional

Em seguida mostra-se duas simulações que comprovam a análise anterior. O ganho do controlador foi fixado inicialmente em 10.

Como se pode ver pela Figura 36 o sistema é estável , o veículo acompanha a trajetória e o erro (Figura 37) tende a zero de maneira um pouco oscilatória, como era de se esperar pela análise do lugar geométrico das raízes. O valor máximo do sinal de esterçamento não ultrapassa o limite físico de 45 graus. A aceleração lateral também se mantém dentro de limites coerentes para o veículo em questão.

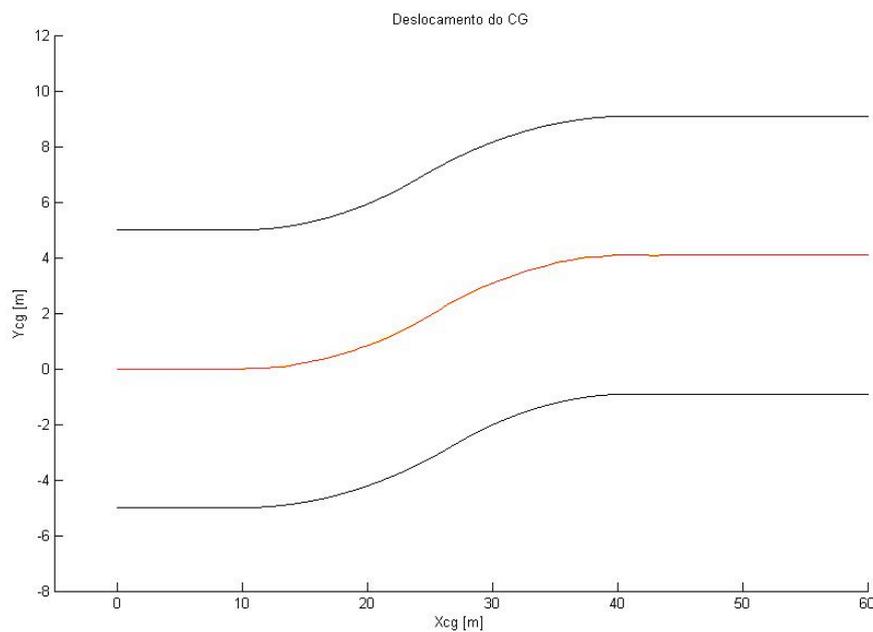


Figura 36: Deslocamento do CG -  $u = 10\text{m/s}$  -  $P=10$ .

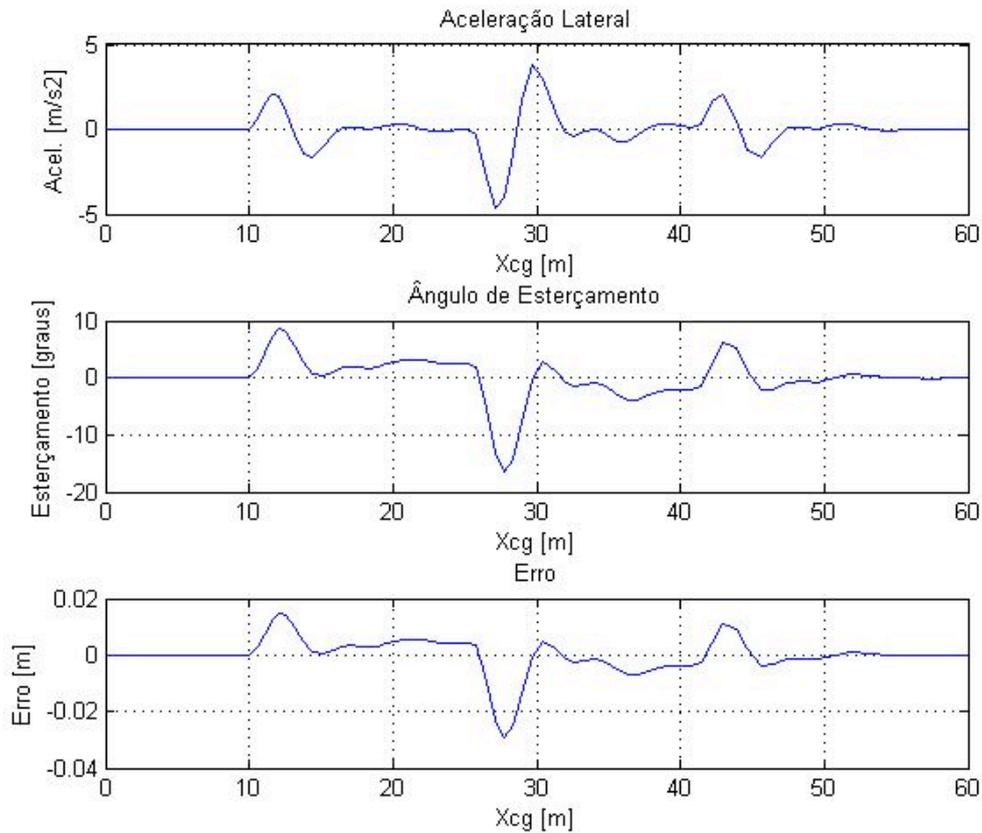


Figura 37: Variáveis de estado -  $u=10m/s$  -  $P=10$ .

Pode-se perceber que quando a velocidade é maior (Figura 38), o comportamento do veículo é diferente, a precisão com que ele segue a trajetória não é a mesma: o erro é bem maior e o ângulo de esterçamento (Figura 39) é muito superior, além de seu comportamento não ser representativo, ao passo que é muito abrupto e passa do limite de 45 graus. Percebe-se também que a aceleração lateral atinge níveis absurdos para um carro de passeio. Concluí-se daí que um controlador puramente proporcional faz com que o veículo percorra uma dada trajetória aparentemente bem, mas o perfil do sinal de controle ainda está longe do desejável.

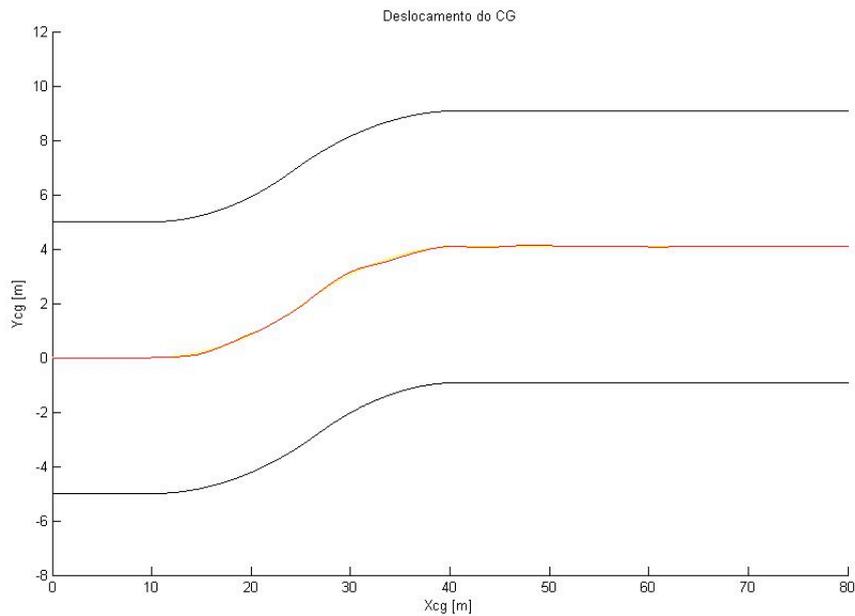


Figura 38: Deslocamento do CG -  $u = 20\text{m/s}$  -  $P=10$ .

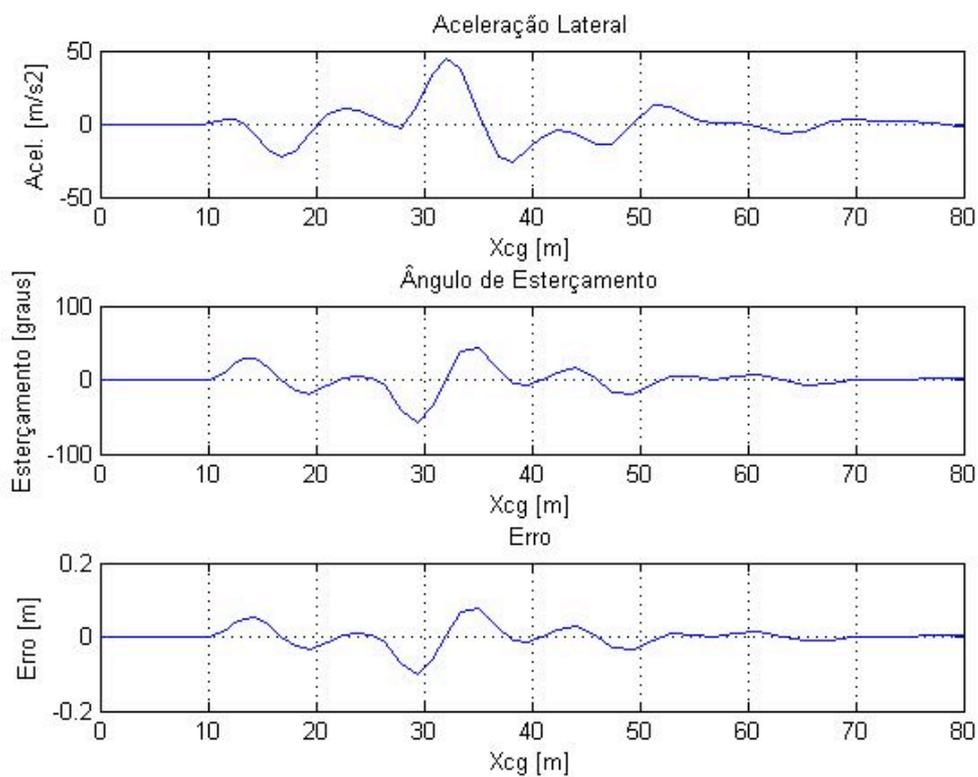


Figura 39: Variáveis de estado -  $u=20\text{m/s}$  -  $P=10$ .

#### 4.1.4. Controlador Proporcional Derivativo Duplo

Percebe-se no caso anterior que um ganho proporcional ao erro não é suficiente para resolver o problema com velocidades maiores. Como solução é proposto um controlador que tenha um termo derivativo de modo a inserir zeros no sistema. O objetivo de inserir zeros no sistema era de conseguir trazer pelo menos um par de pólos complexos conjugados para o eixo real, diminuindo assim a oscilação. Percebeu-se que com o PD isso não seria possível, pois se tinha dois pólos do sistema na origem, sendo assim optou-se pelo chamado PDD, onde se introduz 2 zeros. Para que esse controlador seja realizável, deve-se também adicionar novos pólo, que para não influenciar a dinâmica em questão foram alocados em  $-15$  e  $-16$ . A posição dos zeros foi arbitrada em  $-1$  após alguns testes de sensibilidade, observando-se o comportamento do esterçamento. O controlador é escrito da seguinte forma:

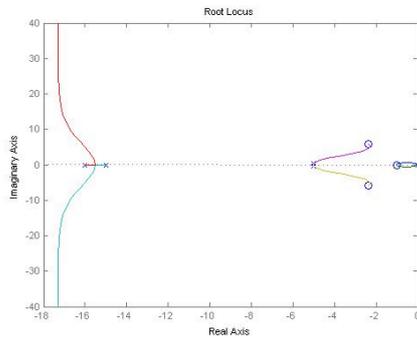
$$C(s) = K_p \cdot \frac{(s+1)(s+1)}{(s+15)(s+16)} \quad (22)$$

Dessa forma o sistema de malha aberta pode ser escrito como:

$$FTMA = \frac{(s+1)(s+1)}{(s+15)(s+16)} \cdot \frac{-E s^2 - (B.F - E.D + F.u)s - (CE - FA).u}{s^4 + (-D - A)s^3 + (A.D - B.C)s^2} \quad (23)$$

Da mesma forma que no caso anterior foi traçado o lugar geométrico das raízes para o sistema em questão, descrito na Figura 40 e Figura 41.

$u=10\text{ m/s}$



$u=20\text{ m/s}$

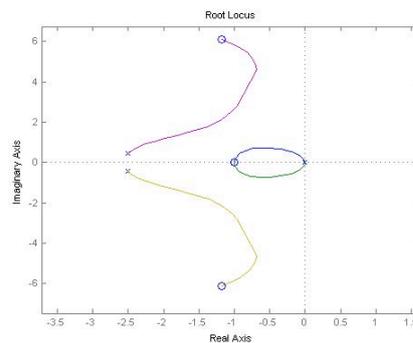
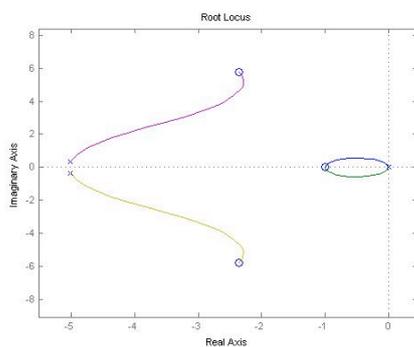
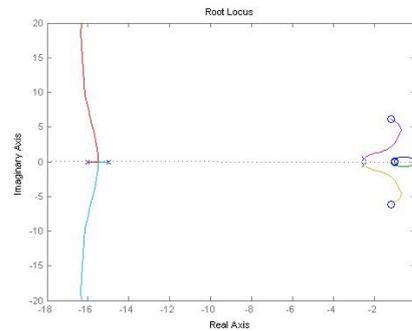


Figura 40: Lugar geométrico das raízes para  $u=10\text{ m/s}$ .

Figura 41: Lugar geométrico das raízes para  $u=20\text{ m/s}$ .

Pode-se ver que para ambos os casos o sistema é estável e da mesma forma que para o controle proporcional, o sistema com velocidade maior apresenta uma dinâmica mais lenta. É interessante ressaltar que a região de instabilidade não existe mais, pois os pólos não mais se deslocam para o semi plano positivo como no caso do controlador proporcional. É possível também, dependendo do ajuste do ganho, posicionar o par de pólos mais significativo sobre o eixo real. Nota-se que para a velocidade de  $20\text{ m/s}$ , dependendo do ajuste do ganho, os pólos dominantes passam a ser os que possuem parte imaginária maior, essa inversão ou cruzamento não acontece para velocidades baixas. Analisa-se a seguir as mesmas simulações feitas para o controlador proporcional.

Nota-se pela Figura 42 que o controlador proporcional derivativo leva o sinal de controle, que era um problema no caso anterior, à um perfil mais ameno (sem grandes oscilações), fazendo com que o ângulo de esterçamento (Figura 43) não ultrapasse os  $45$  graus. A aceleração lateral também se encontra dentro de valores reais, não ultrapassando  $10\text{ m/s}^2$ .

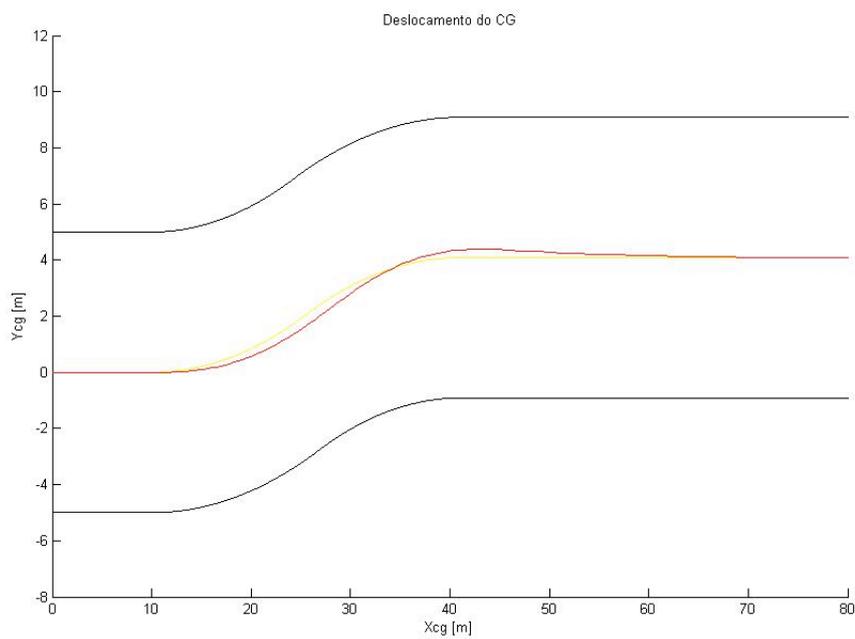


Figura 42: Deslocamento do CG -  $u=10\text{m/s}$  -  $\text{PDD}=10$ .

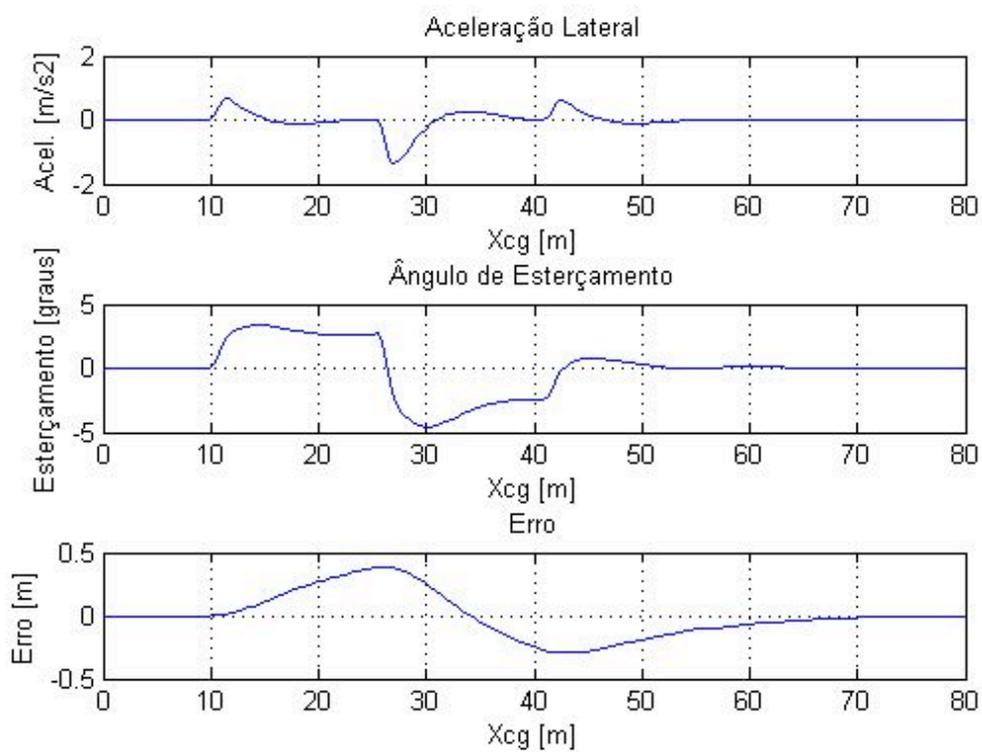


Figura 43: Variáveis de estado -  $u=10\text{m/s}$  -  $\text{PDD}=10$ .

Quando a velocidade é maior, o erro conseqüentemente aumenta (Figura 45) assim como o esterçamento. A aceleração lateral já não é tão representativa ao passo que chega próxima de  $20\text{m/s}^2$ , o que é muito para um carro de passeio. Pode-se perceber também um perfil mais oscilatório da solução (Figura 44). Ganhos menores levariam a erros maiores, mas conseqüentemente a acelerações laterais menores também.

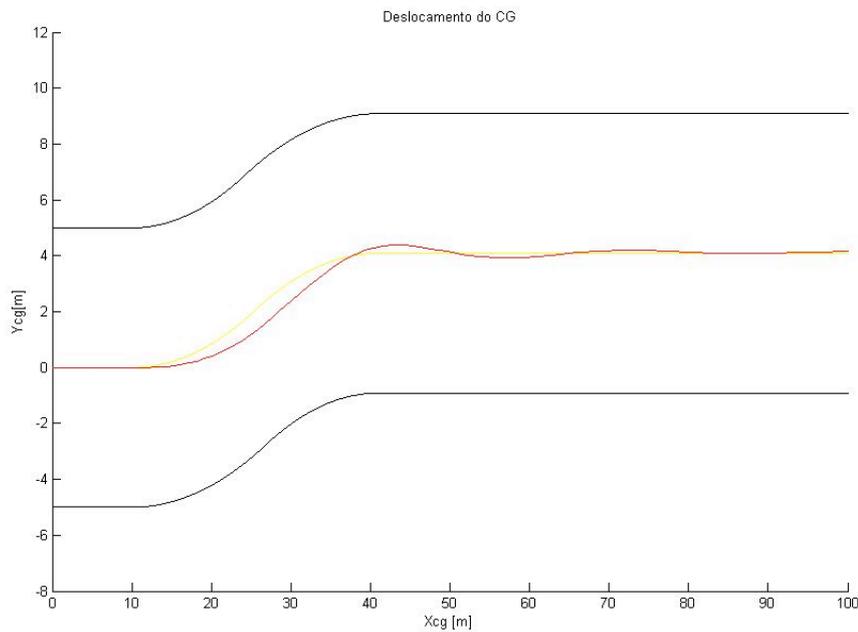


Figura 44: Deslocamento do CG -  $u = 20\text{m/s}$  - PDD=10.

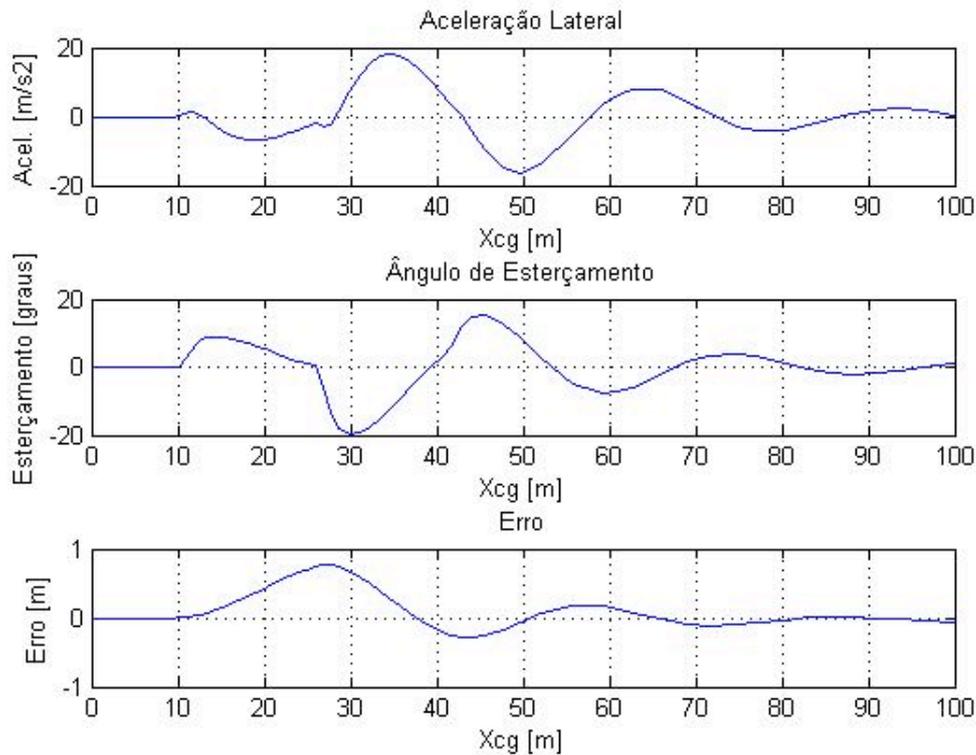


Figura 45: Variáveis de estado -  $u=20m/s$  -  $PDD=10$ .

A conclusão mais importante que se tira dessas simulações é o fato de que o controlador PDD faz com que o ângulo de esterçamento tenha um perfil mais suave e fique dentro da faixa limite de 45 graus com o ajuste correto do ganho. O resultado, comparativamente, é um pouco pior, ou seja, para um mesmo ajuste de ganho, o controlador proporcional apresenta menos erro, mas mesmo assim o veículo se mantém na pista e seu erro vai a zero depois da manobra. Como o esterçamento está dentro do aceitável pode-se ainda aumentar o ganho para se obter um melhor resultado.

Outro ponto a se destacar é o fato que para a velocidade de 10 m/s, pode-se usar ganhos maiores sem aumentar demasiadamente a oscilação do sistema, isso pode ser explicado pelo Lugar Geométrico das Raízes, pois os pólos mais significativos tendem para o eixo real a medida que se aumenta o ganho.

Pode-se concluir que o controlador proposto leva o sistema a estabilidade e faz com que ele rastreie a trajetória desejada, além de manter o ângulo de esterçamento dentro da faixa admissível.

O perfil menos oscilatório do esterçamento é mais coerente com a ação de um ser humano ao volante, o que levanta a questão da representatividade do ser humano por um controlador. Projetar um controlador que represente o comportamento do ser humano ao volante não é o escopo desse trabalho, mas ele representa um primeiro passo para o estudo de tais controladores.

#### **4.2. Transferência de Referencial Não Linear**

A objetivo dessa seção é avaliar o controlador projetado anteriormente em uma malha de controle que apresenta elementos não lineares, nesse caso a mudança está na troca de referencial. A malha proposta a seguir não apresenta a linearização da transferência de coordenadas, ou seja aparecem senos e co-senos. Agora o sistema não possui mais as restrições de ângulos de *yaw* pequenos.

Considera-se o controlador proporcional derivativo duplo projetado anteriormente com o ganho ajustado em 10. A trajetória varia e possui ângulos de *yaw* superiores a 20 graus, para que o modelo trabalhe em sua faixa não linear.

Nessa primeira análise a velocidade é de 20m/s. Pode-se ver na Figura 46 que o resultado é bom (se mantendo dentro da pista) apesar do erro no rastreamento da trajetória. O ângulo de esterçamento está dentro de seus limites apesar de um perfil um pouco oscilatório, e o veículo percorre toda a trajetória desejada. A aceleração lateral também se encontra coerente com o veículo considerado.

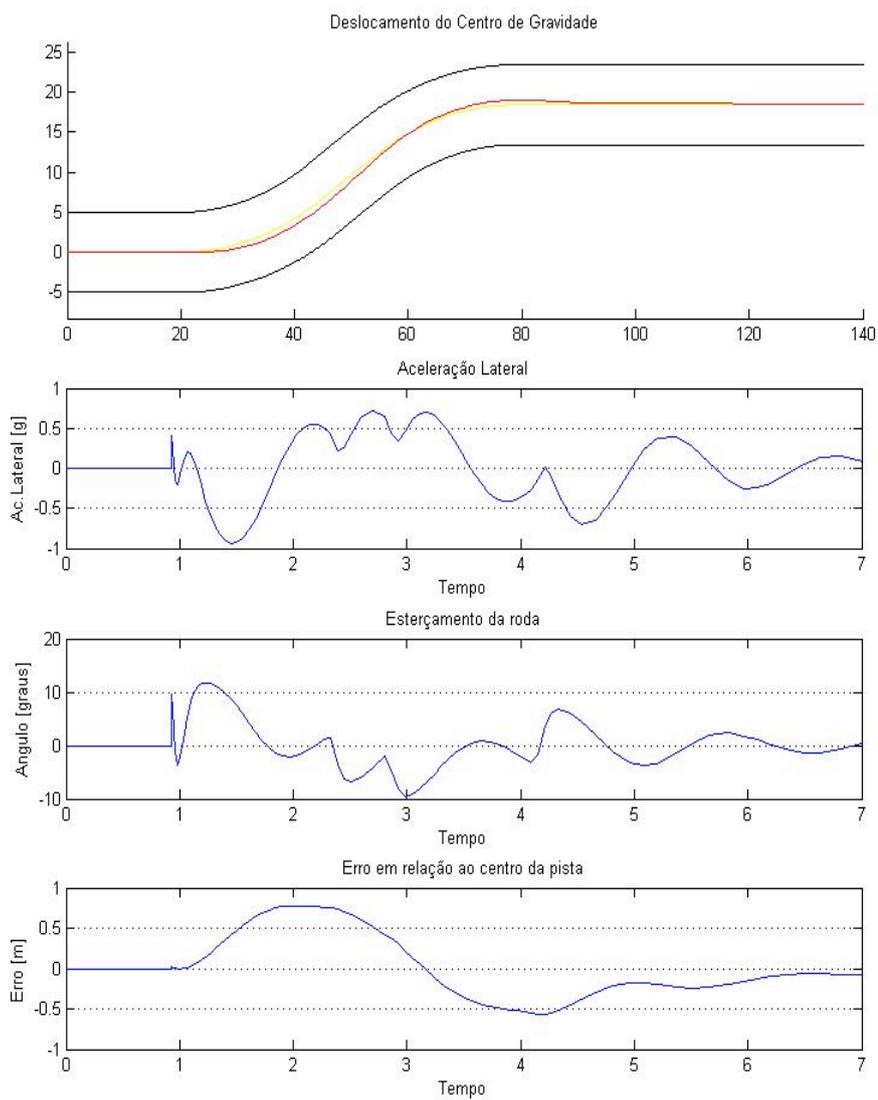


Figura 46: Troca de pista -  $u = 20\text{m/s}$  -  $\text{PDD} = 10$  - Malha não linear.

A trajetória da Figura 47 é uma curva em U. A velocidade é 20m/s. Pode-se ver que apesar de um erro perceptível e de um transiente que aparece, o veículo percorre a trajetória sem sair da pista, o ângulo de esterçamento se manteve limitado, salvo o transiente, mas a aceleração lateral atingiu valores muito altos.

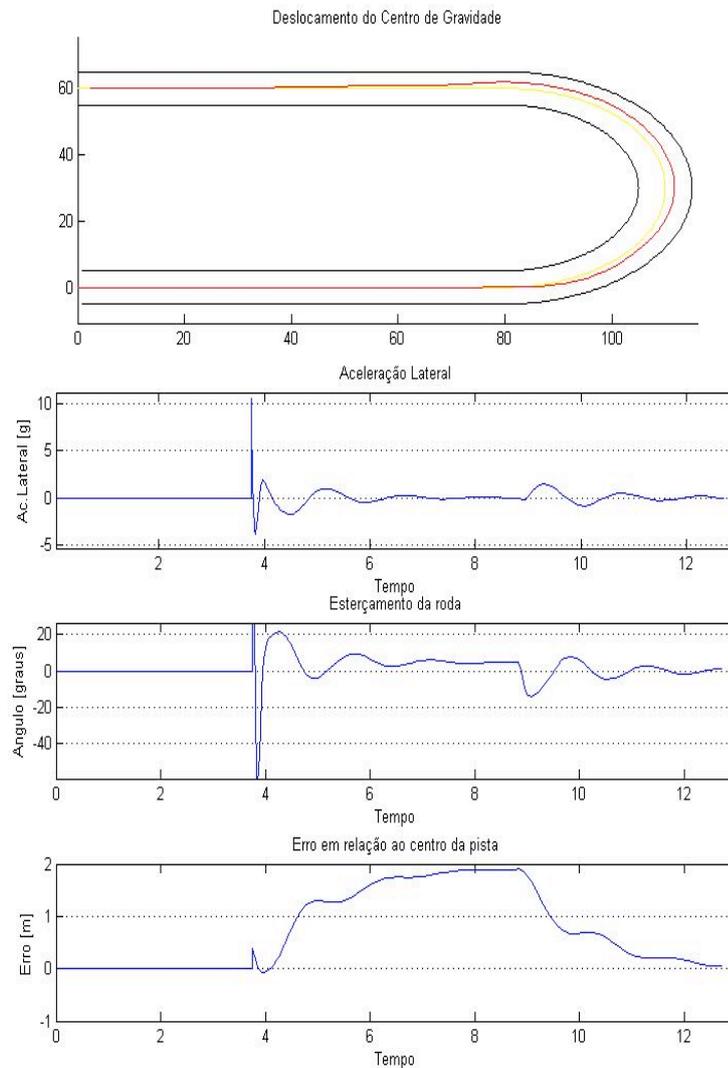


Figura 47: Curva de 180 graus -  $u = 20\text{m/s}$  -  $PD = 10$  - Malha não linear.

Na Figura 48 se tem uma trajetória em espiral e a velocidade é de 20m/s também, mais uma vez o veículo percorre a trajetória sem ultrapassar seus limites laterais, o esterçamento permanece limitado na faixa de 45 graus e a aceleração lateral apresenta valores altos para esse tipo de veículo.

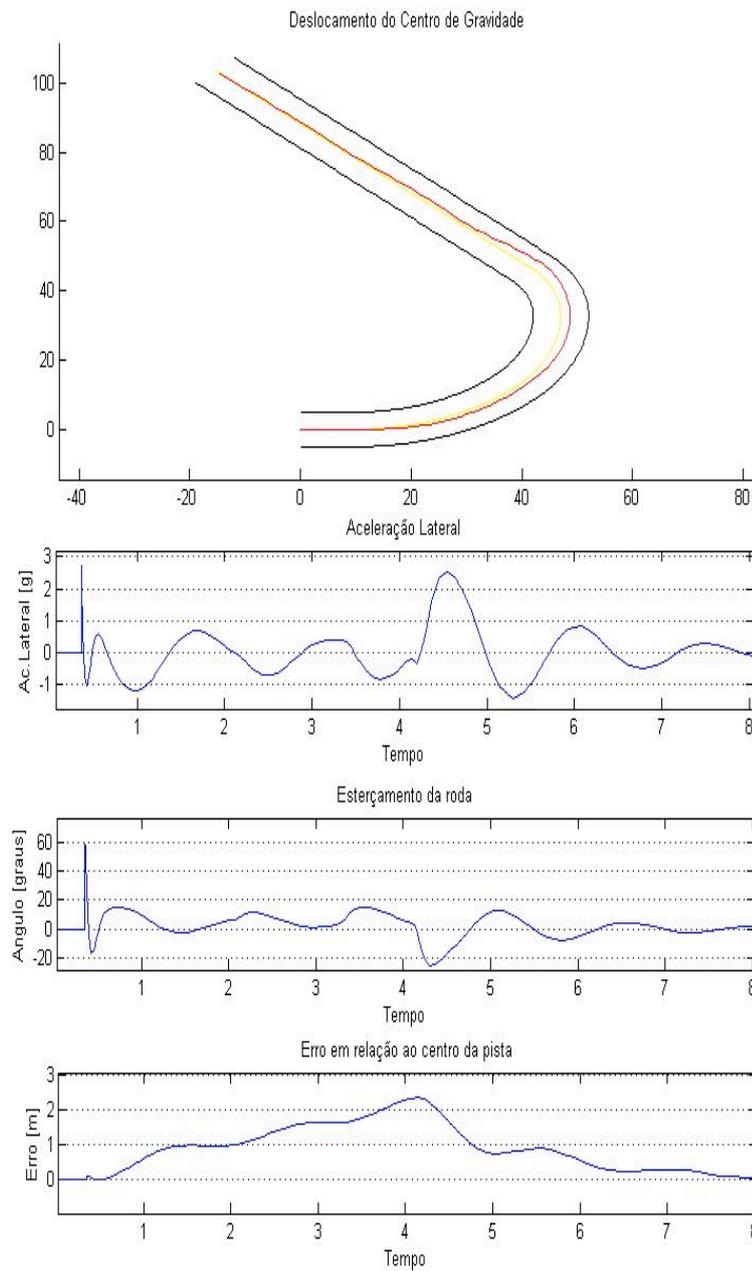


Figura 48: Espiral -  $u = 20\text{m/s}$  - PDD = 10 - Malha não linear.

Na Figura 49 pode-se ver um circuito oval, a velocidade é novamente de 20m/s. Nesse caso é interessante notar que o ângulo de esterçamento tende para uma constante após um transiente oscilatório. Esse resultado era o esperado, uma vez que o circuito era um círculo de raio 50 metros. Tanto a aceleração lateral quanto o esterçamento estão dentro do limite aceitável.

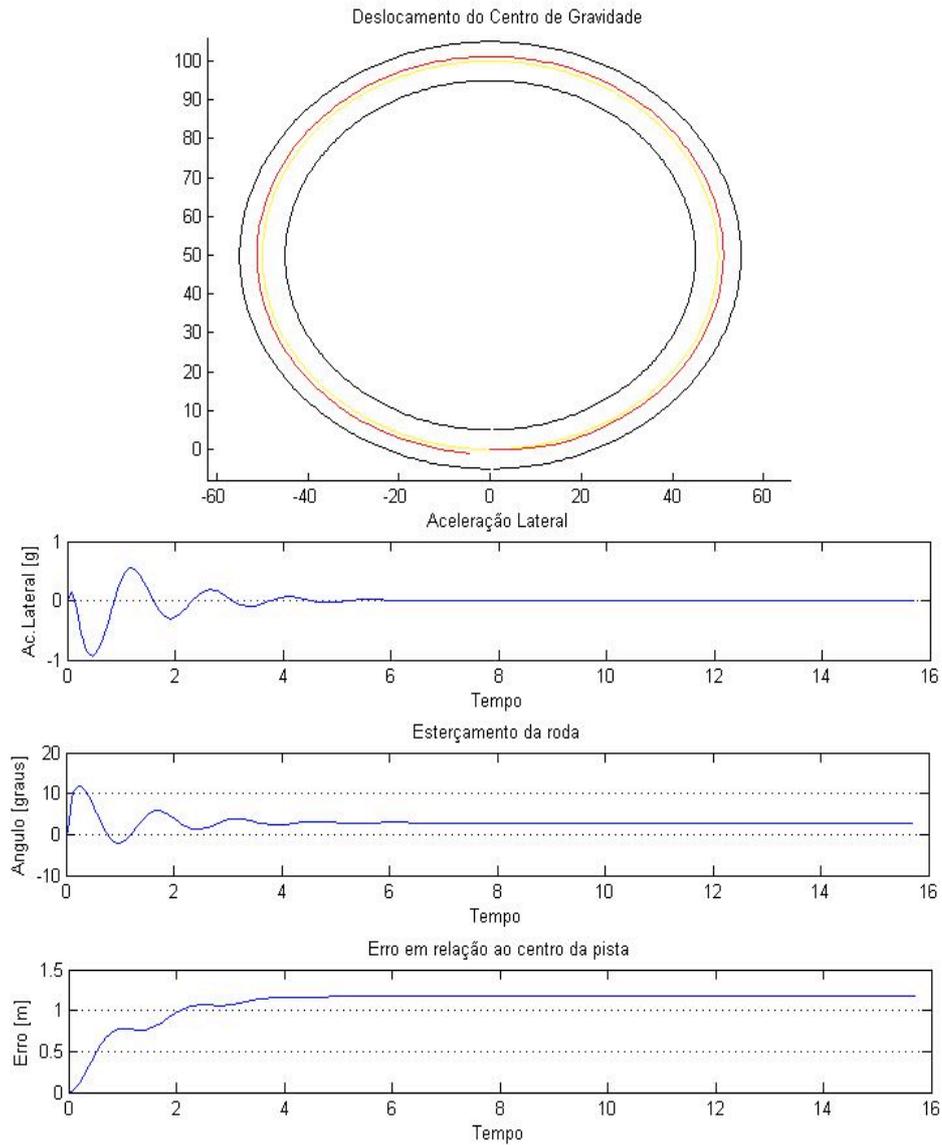


Figura 49: Círculo -  $u = 20\text{m/s}$  - PDD = 10 - Malha não linear.

A Figura 50 mostra o resultado para a mesma trajetória mas com ganho do controlador igual a 100. O erro conseqüentemente diminuiu, e ainda assim o esterçamento e a aceleração lateral continuaram dentro dos limites aceitáveis. Como o objetivo não é projetar o melhor controlador, não foram estudados outros ajustes de ganhos, próximos trabalhos podem estudar a sensibilidade entre o ganho e as diferentes variáveis do sistema.

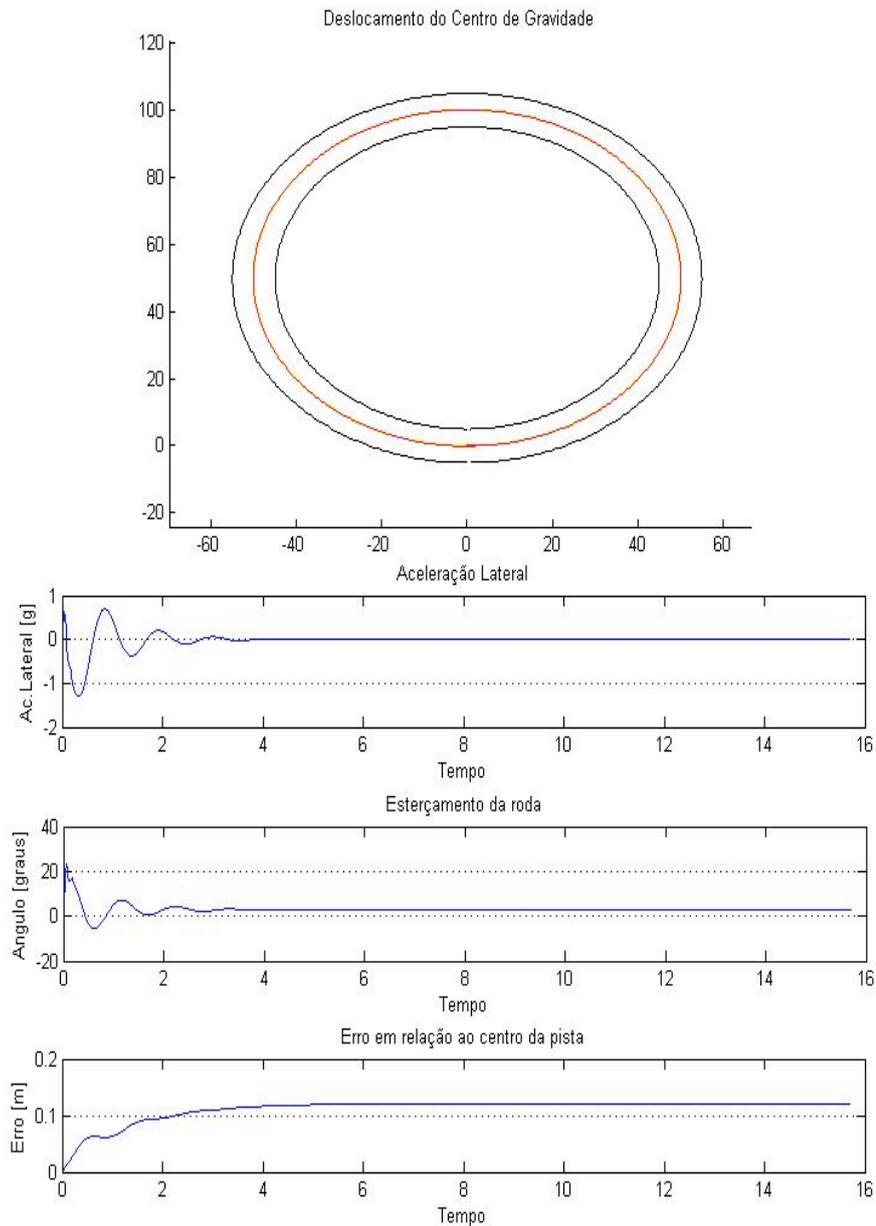


Figura 50: Círculo -  $u = 20\text{m/s}$  - PDD = 100 - Malha não linear.

## 5 Realimentação do Ângulo de Yaw

Neste item passa a ser considerado o ângulo de *yaw* do veículo como uma variável de entrada na malha de controle. Obtendo esse ângulo do modelo linear pode-se compará-lo com o ângulo instantâneo da pista, assumido como sendo o ideal. É feita então uma soma ponderada entre o erro do centro de gravidade do veículo e o erro do ângulo de *yaw*. A ponderação é feita multiplicando um dos erros por um dado *k* menor que zero e o outro erro por  $1-k$ . Essa soma gera um erro resultante que vai para o controlador.

A Figura 51 mostra como é calculado o ângulo de *yaw* desejado para o veículo dado sua posição na pista. Na Figura 52 tem-se a malha de controle implementada em *Simulink*.

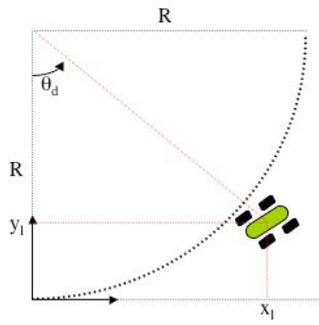


Figura 51: Ângulo de yaw desejado.

$$\theta_d = \text{tg}^{-1}\left(\frac{x_l}{R - y_l}\right) \tag{24}$$

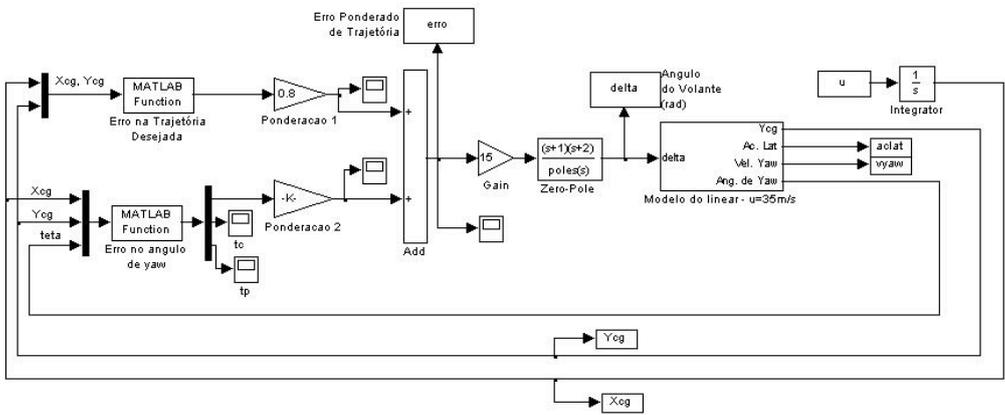


Figura 52: Implementação em *Simulink* da malha de controle.

## 5.1. Simulações

A seguir são apresentadas algumas simulações feitas em uma pista que respeita as limitações do modelo linear a uma velocidade de 35 m/s. A pista usada para simular o modelo é composta por uma reta de 20 metros seguida por duas curvas de raio 200m e arco 20m e outra reta de comprimento 100m. Primeiramente é feita uma comparação quando se varia a ponderação entre os erros gerados pelo diferença do C.G. ao centro da pista e a diferença entre o *yaw* desejado e o *yaw* do veículo.

A Figura 53 mostra a simulação considerando somente o erro em relação ao C.G. do veículo, ou seja, o fator multiplicativo do erro gerado pela diferença entre o *yaw* desejado e o *yaw* do veículo é zero, enquanto que do erro do C.G. do veículo é um. Na Figura 54 a ponderação é de 80% para a posição e 20% para o *yaw*, já na Figura 55 a ponderação é de 50% para cada um.

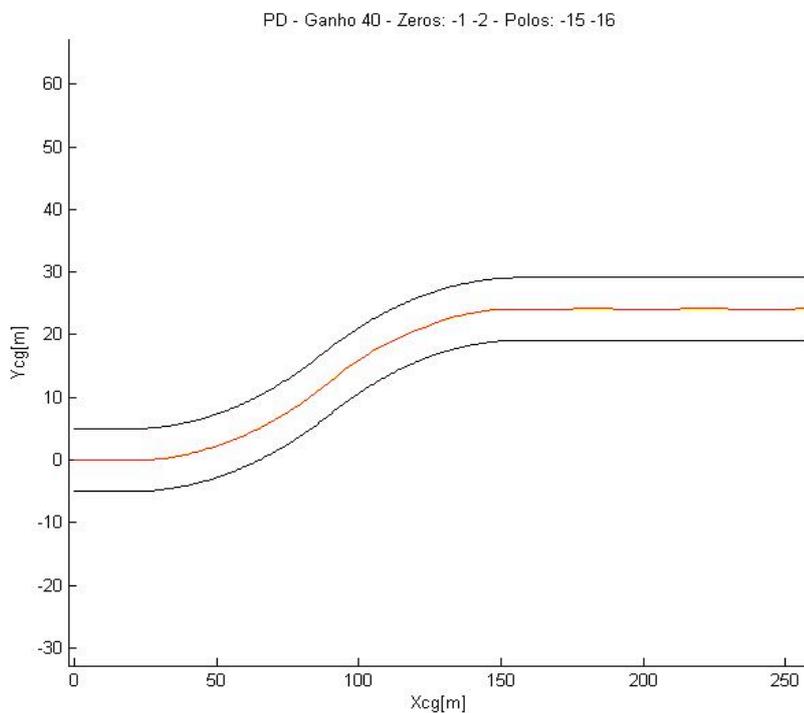


Figura 53: Deslocamento do C.G. – Ponderação 100% / 0%.

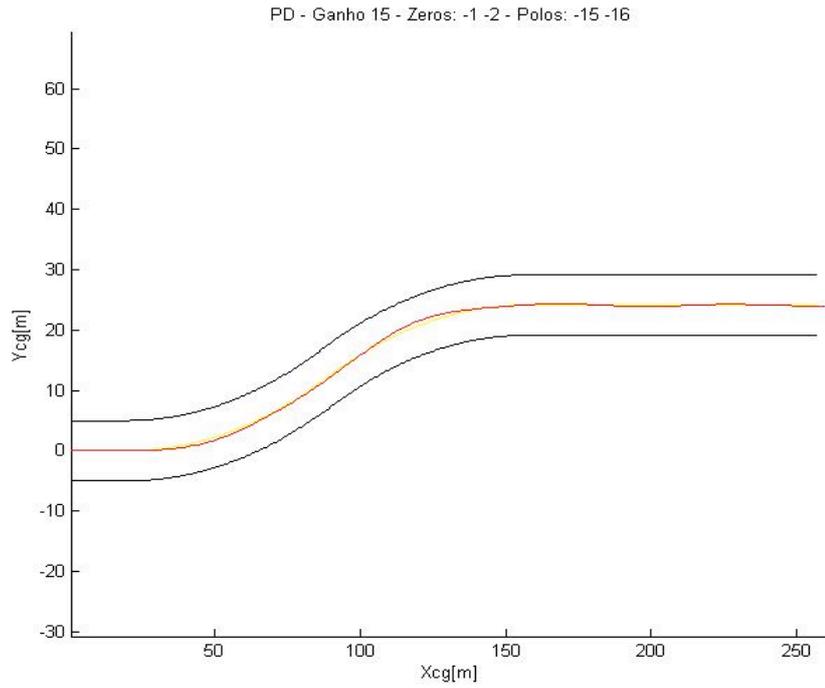


Figura 54: Deslocamento do C.G. - Ponderação 80% / 20%.

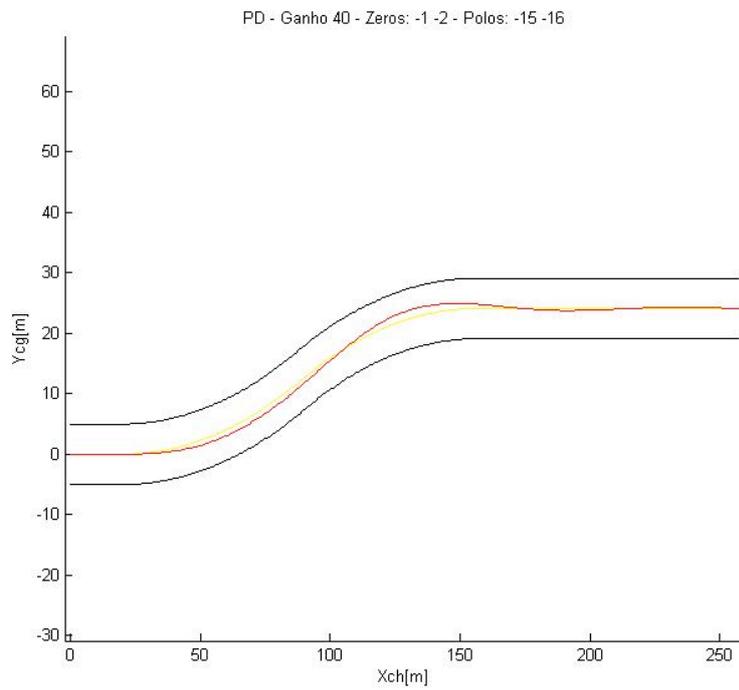


Figura 55: Deslocamento do C.G. - Ponderação 50% / 50%.

Analisando unicamente o deslocamento do veículo na pista, nota-se que a introdução do ângulo de *yaw* na malha de controle piora o resultado final. Isso é explicado pelo fato de haver menos porcentagem do erro do C.G. entrando no controlador. Mas é importante ressaltar que agora o erro não é apenas a distância do C.G. do veículo ao centro da pista, mas sim um compromisso entre essa distância e a orientação do veículo em relação a pista também, dessa forma não se pode julgar o desempenho do controlador baseado no deslocamento do centro de gravidade. Sendo assim vale a pena comparar os erros nas três situações, como na Figura 56.

Pode-se ver que o erro resultante só diminuiu a medida em que se realimenta com a informação do ângulo de *yaw*. Pode-se observar também na Figura 57 o que acontece com o perfil de esterçamento nas três situações e avaliar a coerência dos resultados.

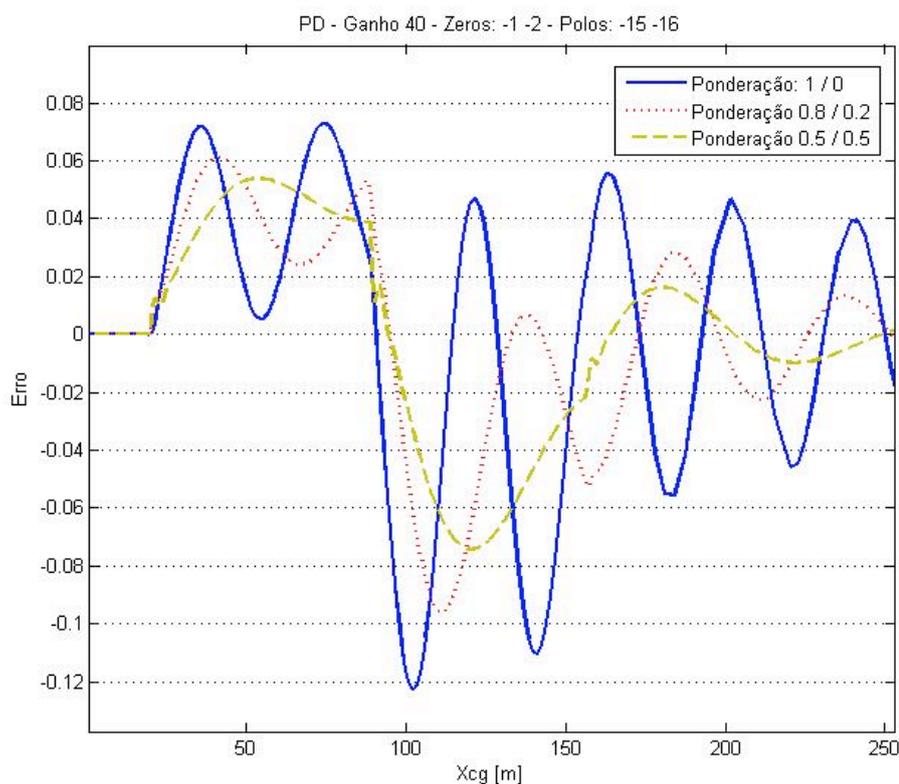


Figura 56: Erro da malha – Comparação.

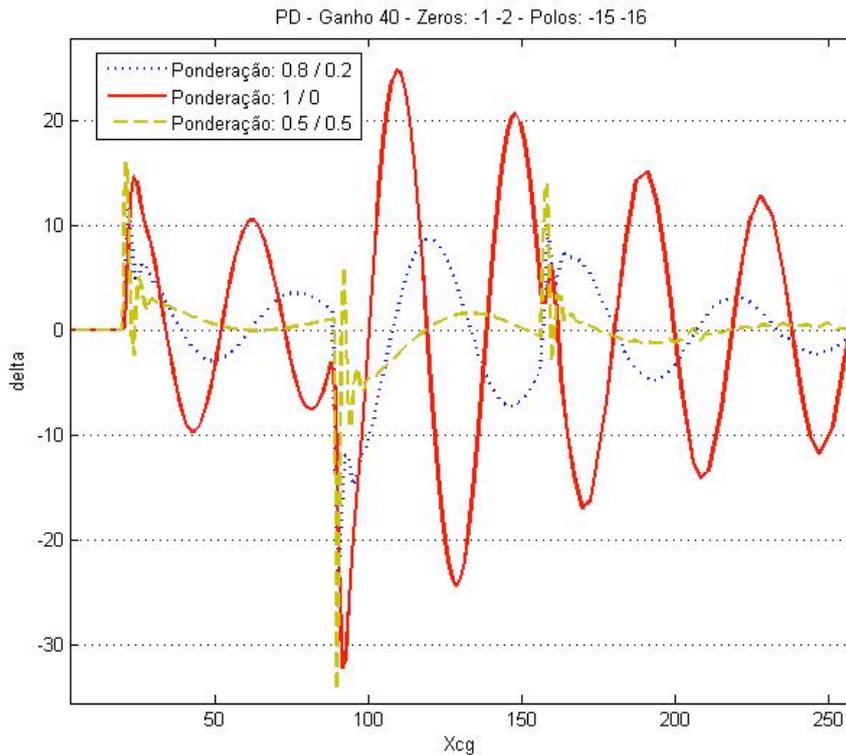


Figura 57: Ângulo de esterçamento – Comparação.

Tanto no gráfico do erro quanto no gráfico do esterçamento, nota-se que a medida em que se aumenta a contribuição do ângulo de *yaw* as oscilações diminuem. Existe ainda o aparecimento de uma oscilação abrupta quando a ponderação é de 50% para cada erro. Esse transiente oscilatório vem do controlador, que tendo dois zeros, é sensível a derivada do sinal de entrada. Quando ocorre uma mudança entre os trechos da trajetória (de reta para curva, curvas de diferentes concavidades) o controlador responde a essa diferença.

O fato de se trabalhar com uma velocidade elevada em um modelo que representa um carro de passeio e que lineariza a modelagem do contato pneu com o solo, faz com que não se perceba as reais condições de aderência do veículo em relação ao piso. Para controlar esse fator pode-se analisar a aceleração lateral do veículo. Na Figura 58 mostra-se o comportamento da aceleração lateral para as diferentes ponderações.

Apesar de os valores estarem de certa forma absurdos para a realidade do veículo em questão, pode-se perceber que quanto maior for o compromisso com o *yaw*, menores são as acelerações laterais que aparecem no veículo.

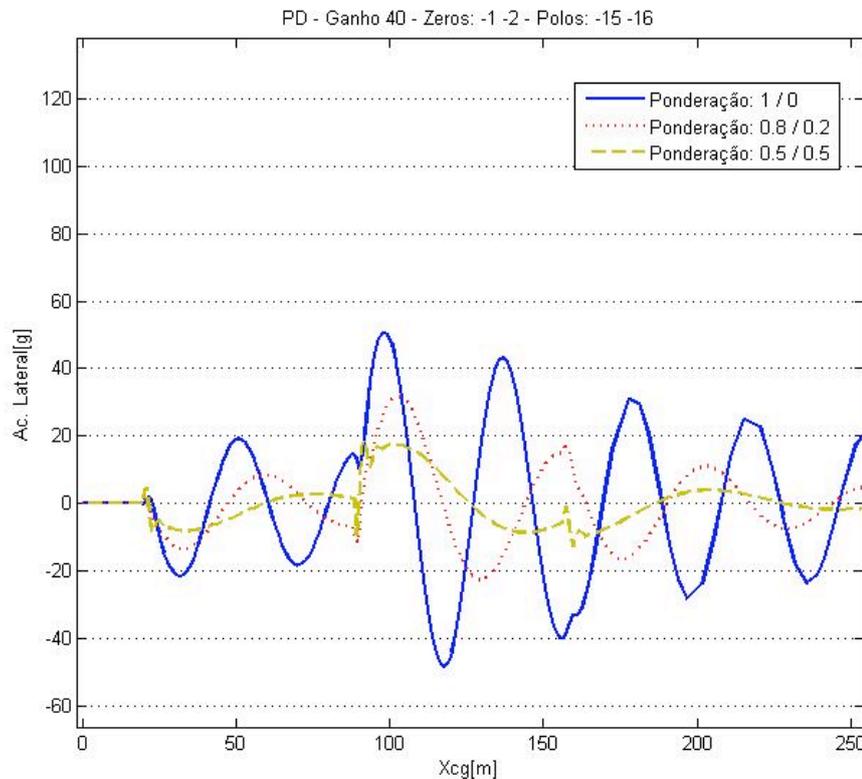


Figura 58: Aceleração lateral - Comparação.

A seguir varia-se o ganho do controlador de 40 para 15 com o objetivo de observar a influência dessa alteração e não de otimizar o controlador. A Figura 59 mostra o deslocamento do C.G. para a ponderação de 80% para posição e 20% para o *yaw*. A princípio não se nota muita diferença em relação ao caso anterior, mas como dito anteriormente precisa-se analisar as variáveis de estado e de controle do modelo, ou seja, o esterçamento e o erro, mostradas na Figura 60 e na Figura 60.

Pode-se ver que quando o ganho é menor o erro é maior, o que de certa forma é o esperado. Como o erro é menor o esterçamento apresenta valores menores também, além de um perfil menos abrupto. Como era de se esperar o mesmo acontece com a aceleração lateral do carro.

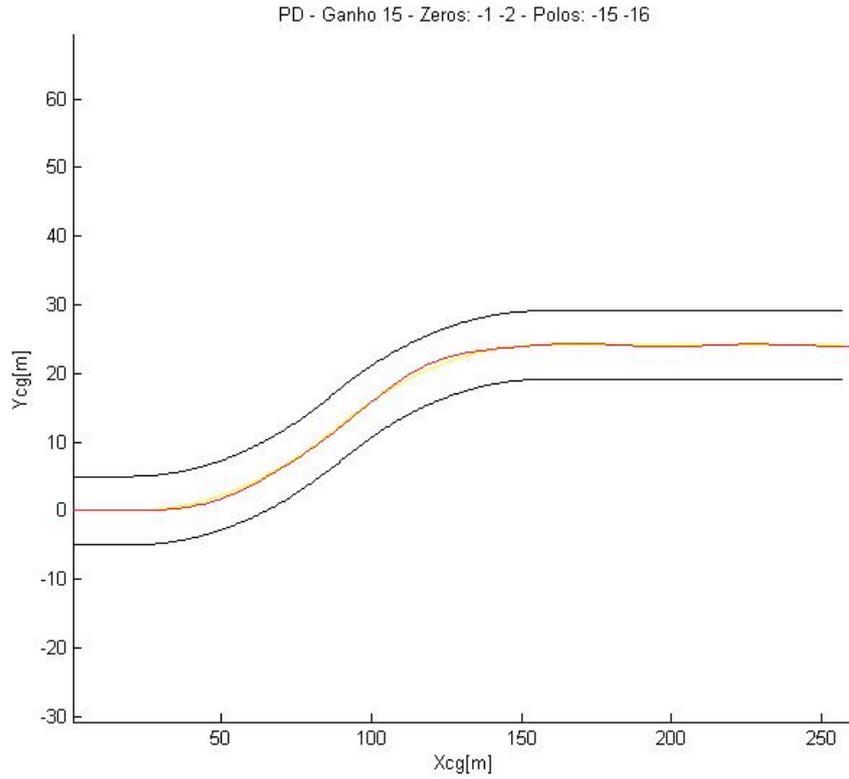


Figura 59: Deslocamento do C.G - Ponderação 80% / 20%.

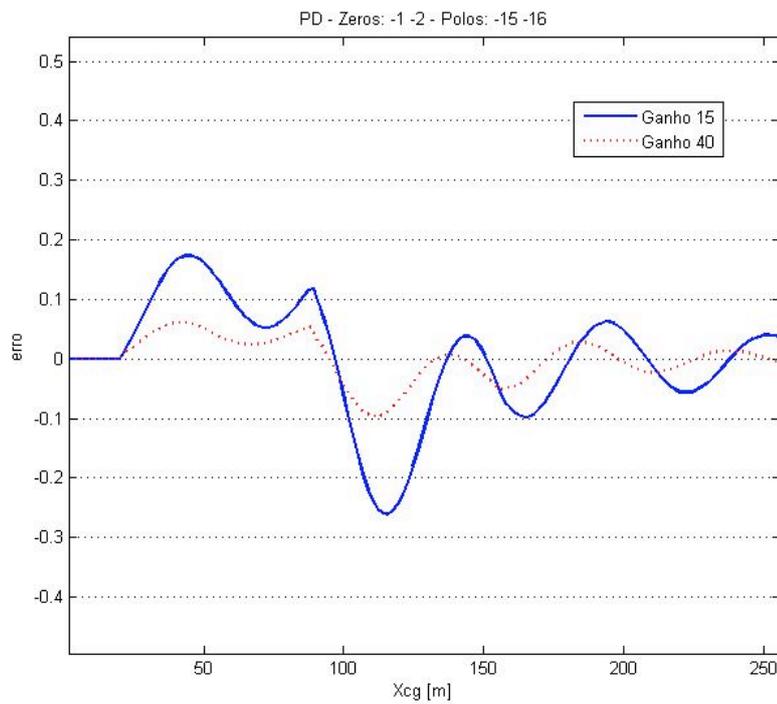


Figura 60: Erro - Ponderação 80% / 20% - Comparação.

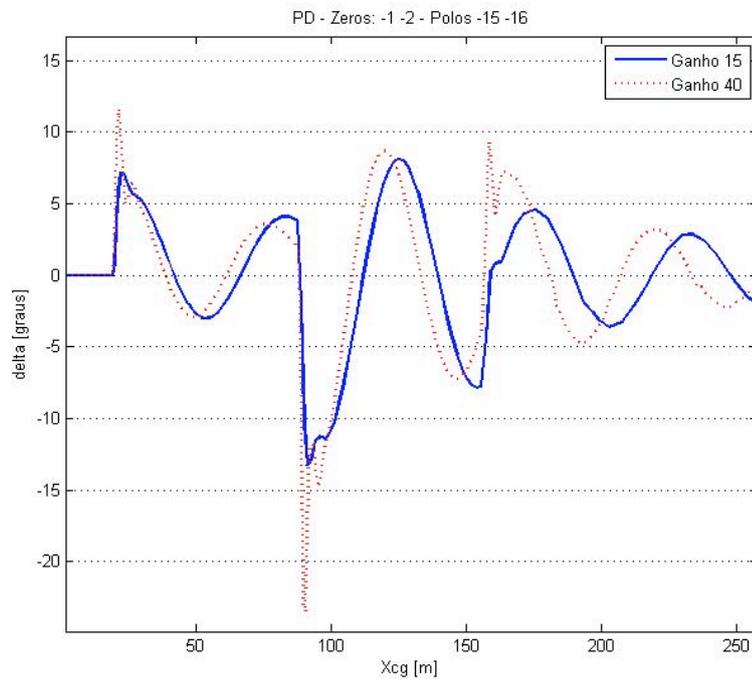


Figura 61: Ângulo de esterçamento - Ponderação 80% / 20% - Comparação.

Após o ajuste do controlador para o caso linear, da mesma forma que nos capítulos anteriores, simula-se o sistema para um percurso fechado. Como explicado anteriormente, a parte não linear da malha pode gerar regiões de instabilidade no sistema, não previstas no projeto do sistema linear. Para esse caso foi obtido algum resultado significativa para a ponderação de 80% / 20%, nos outros casos o sistema entrou em faixas de instabilidade e o veículo não conseguiu acompanhar a trajetória. Na Figura 62 pode-se ver o deslocamento do veículo sobre o circuito e na Figura 63 se tem as variáveis que representam o ângulo de esterçamento e o erro composto pelo yaw e pela posição. Apesar de o erro ser pequeno e o veículo se manter dentro da pista, o ângulo de esterçamento se mostra acima do limite definido de 45 graus, além disso seu perfil é extremamente oscilatório ao longo do percurso.

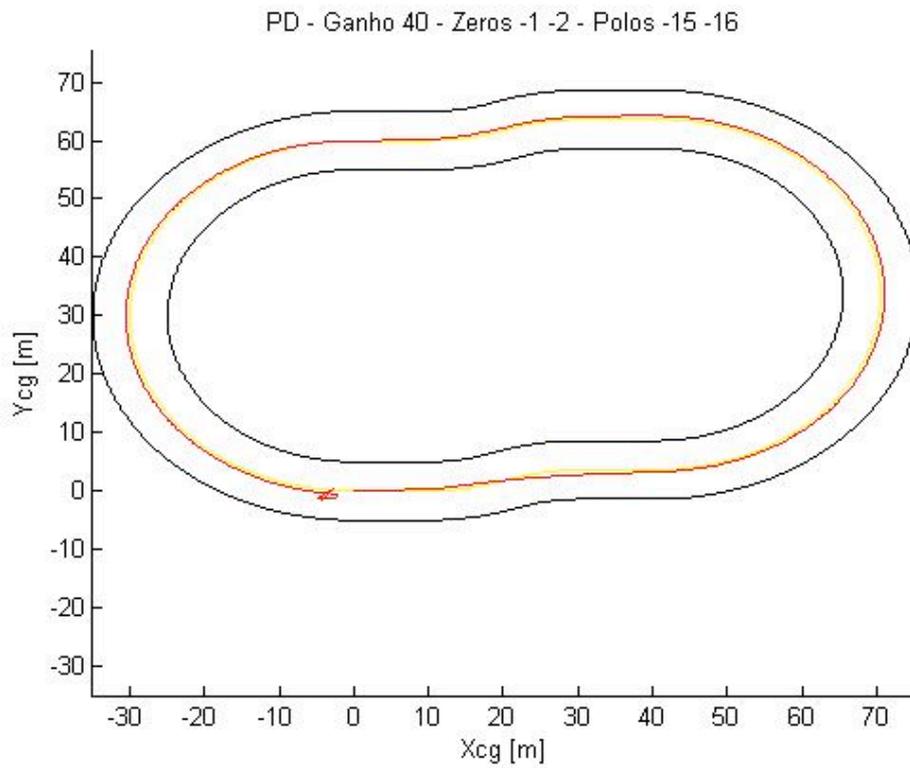


Figura 62: Realimentação do Yaw - Pista Fechada – CG

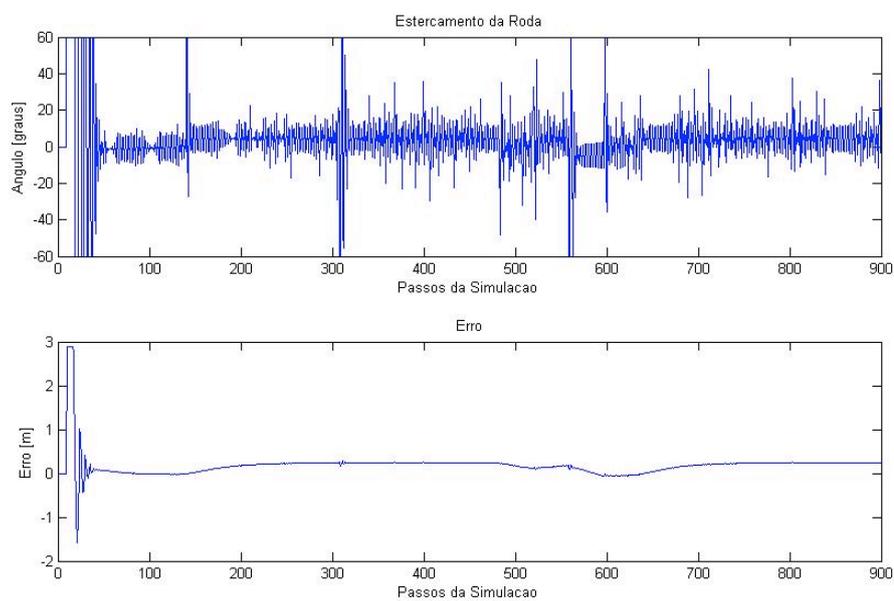


Figura 63: Realimentação do Yaw - Pista Fechada - Variáveis.

## 6 Controlador de Estado

Apresenta-se a seguir o método para implementação do sistema de controle por estados (Ogata, 1990). Considera-se agora o sistema representado em sua forma de estado:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (25)$$

cujo o diagrama de blocos da malha aberta pode ser representado de acordo com a Figura 64.

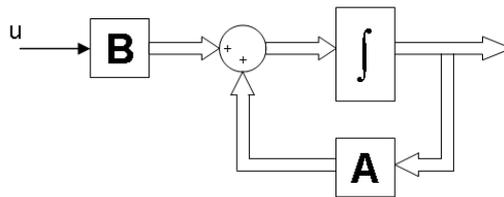


Figura 64: Sistema de Controle de Malha Aberta.

Em um sistema de controle por realimentação de estado, assume-se que o sinal de controle ( $u$ ) é do tipo:  $u = -Kx$ , onde  $K$  representa uma matriz de ganhos e o diagrama de blocos da malha fechada passa a ser como mostra a Figura 65.

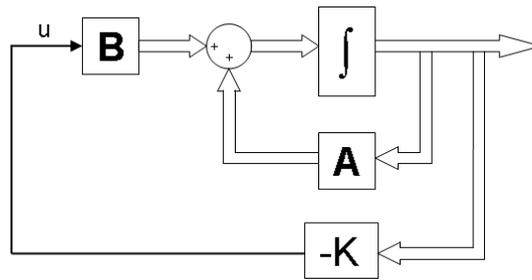


Figura 65: Sistema de controle de malha fechada.

Quando substitui-se  $u$  na expressão  $\dot{x} = Ax + Bu$  tem-se:

$$\dot{x} = (A - BK)x \quad (26)$$

Cuja solução é:

$$x = e^{(A-BK)t}x(0) \quad (27)$$

Nota-se que as características transitórias e de estabilidade do sistema são definidas pela matriz  $A-BK$ , ou seja, se a matriz  $K$  for escolhida de forma adequada, pode-se fazer  $A-BK$  uma matriz assintoticamente estável.

Fazendo um paralelo com o comportamento do ser humano ao volante, pode-se pensar que a matriz de ganhos  $K$  seja a sensibilidade que um dado piloto tem as diversas variáveis do modelo, futuros trabalhos podem explorar o quão sensível é o piloto a cada variável. Outra importante sugestão de aprimoramento é analisar a viabilidade em se medir todos os estados do veículo em tempo real e com acurácia suficiente.

### 6.1. Cálculo da Matriz de Ganho ( $K$ )

Para que se possa alocar aleatoriamente os pólos, é preciso checar as condições suficientes e necessárias, ou seja, o posto da matriz de controlabilidade deve ser maior ou igual à dimensão da matriz  $A$ . Sendo assim calcula-se

primeiramente a matriz de controlabilidade do sistema, dada pela expressão abaixo:

$$C = [B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1}B] \quad (28)$$

Se o posto de C for menor que a dimensão da matriz A, os pólos não poderão ser alocados arbitrariamente. Em seguida determina-se os autovalores da matriz A, que nada mais são que os pólos do sistema ( $a_1, a_2, a_3, a_4$ ), quando o sistema é de estados completamente controláveis (o posto de C é igual a ordem da matriz A). O próximo passo é colocar o sistema na forma canônica de estado, para isso deve-se calcular a matriz de transformação T que é igual à matriz de controlabilidade C vezes uma matriz W (Ogata, 1990), formada pelos coeficientes do polinômio característico de A, dado por

$$c_0s^n + c_1s^{n-1} + \dots + c_n s + c_{n+1} = 0 \quad (29)$$

$$T = C.W \quad (30)$$

$$W = \begin{bmatrix} c_3 & c_2 & c_1 & 1 \\ c_2 & c_1 & 1 & 0 \\ c_1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

Agora deve-se escrever um novo polinômio característico da forma  $(s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3)(s - \mu_4)$ , onde  $\mu_i$  é a nova posição dos pólos. Os coeficientes desse polinômio característico são  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  e  $\alpha_4$ .

Por definição a matriz de ganho é dada por:

$$\begin{aligned} K &= [K_v \quad K_\theta \quad K_\omega \quad K_Y] \\ K &= [\alpha_4 - c_4 \quad \alpha_3 - c_3 \quad \alpha_2 - c_2 \quad \alpha_1 - c_1]T^{-1} \end{aligned} \quad (32)$$

Os ganhos  $K_v$ ,  $K_\theta$ ,  $K_\omega$  e  $K_Y$  são os ganhos associados aos estados do modelo, velocidade lateral, ângulo de yaw, velocidade de yaw e deslocamento no eixo  $y$  global respectivamente.

Em seguida pode-se ver o desenvolvimento descrito acima para o modelo em questão, descrito no Capítulo 4. Após substituir os valores da Tabela 3 se tem as seguintes matrizes para o sistema,

$$A = \begin{bmatrix} -2.6756 & 0 & -19.9813 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.0112 & 0 & -2.3426 & 0 \\ -1 & -20 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$B = \begin{bmatrix} 26.7559 \\ 0 \\ 19.2480 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pode-se ver que a matriz de controlabilidade  $C$  tem posto 4 e a partir da matriz  $W$ , formada pelos coeficientes do polinômio característico é calculada a matriz  $T$ , usada para calcular a matriz de ganhos  $K$  dada por (32)

$$C = \begin{bmatrix} 26.8 & -465.2 & 2115.6 & -7.6549 \\ 0 & 19.2 & -44.8 & 99.8 \\ 19.2 & -44.8 & 99.8 & -210.1 \\ 0 & -26.8 & 71.2 & -1219.7 \end{bmatrix} \quad (34)$$

Os autovalores do sistema em malha aberta são,

$$[0 \quad 0 \quad -2.5091 + 0.4428i \quad -2.5091 - 0.4428i] \quad (35)$$

De (30) se tem que,

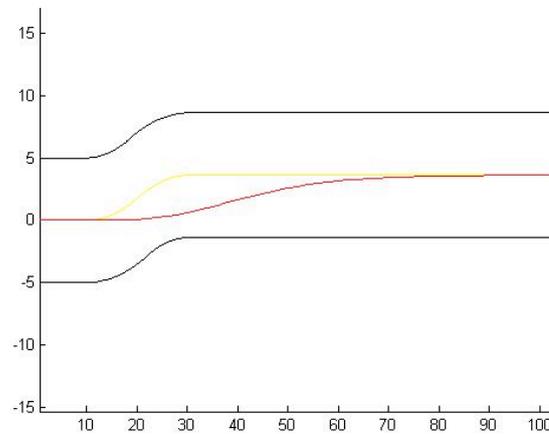
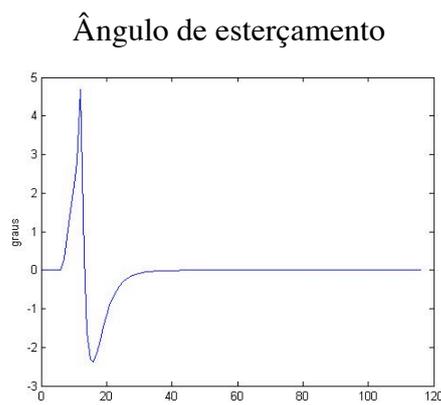
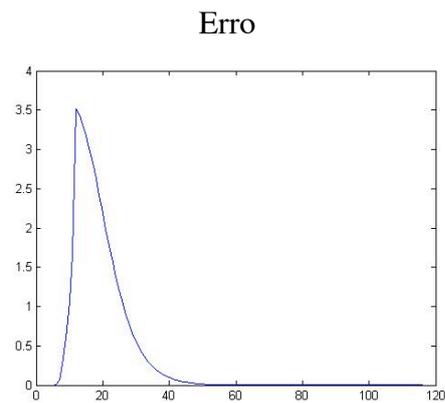
$$T = \begin{bmatrix} 3117.3 & -672.2 & 1793.6 & 26.8 \\ -66 & 80.2 & -25.5 & 0 \\ 147.1 & -66 & 151.6 & 19.2 \\ -931 & -102.5 & 44.5 & 0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

Como não se tinha sensibilidade a respeito do ajuste do controlador, determinou-se de forma arbitrária 3 conjuntos de pólos, sendo que em um deles todos os pólos foram colocados sobre o eixo real. Diante dos resultados pode-se analisar o comportamento do sistema de acordo com a escolha de pólos.

## 6.2. Simulações Para o Controlador de Estado

Levando em consideração os valores dados anteriormente para os parâmetros do modelo linear e a velocidade longitudinal de 20 m/s, é mostrado seguir algumas simulações para diferentes escolhas de pólos do sistema de malha fechada. Na Figura 66 os pólos de malha fechada foram alocados em -2, -3, -4-0.5i, -4+0.5i. Na Figura 67 e Figura 68 podem ser visto o esterçamento e o erro. Apesar de o veículo não sair da pista o erro é maior que nos casos anterior. O esterçamento encontra-se dentro do limite de 45°.

## Deslocamento do C.G.

Figura 66: Deslocamento do C.G. - Pólos em  $-2, -3, -4-0.5i, -4+0.5i$ Figura 67: Ângulo de esterçamento -  
Pólos em  $-2, -3, -4-0.5i, -4+0.5i$ .Figura 68: Erro - Pólos em  $-2, -3, -4-0.5i, -4+0.5i$ 

Com o intuito de melhorar o resultado os pólos foram alocados mais distantes do eixo real,  $-6, -7, -8-0.5i, -8+0.5i$ . Comparando a Figura 69 com a Figura 66 é possível notar uma melhora no erro (Figura 71), mas aparece um transiente no esterçamento em resposta à elevação do erro durante a entrada da curva.

## Deslocamento do C.G.

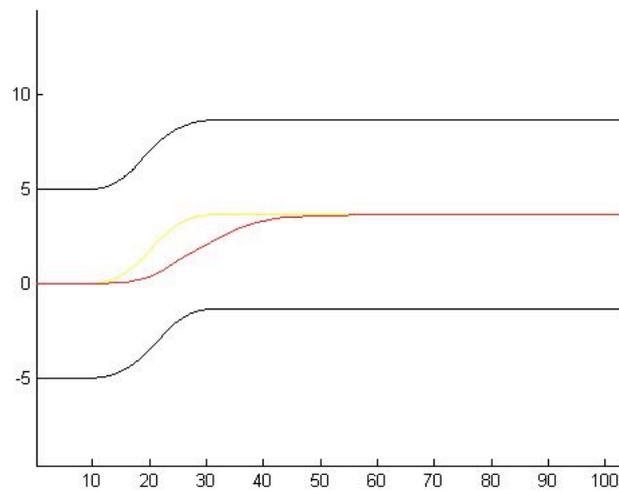


Figura 69: Deslocamento do C.G. - Pólos em  $-6,-7, -8-0.5i, -8+0.5i$ .

## Ângulo de esterçamento

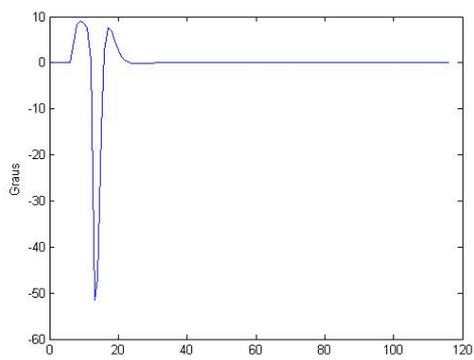


Figura 70: Ângulo de esterçamento - Pólos em  $-6,-7, -8-0.5i, -8+0.5i$ .

## Erro

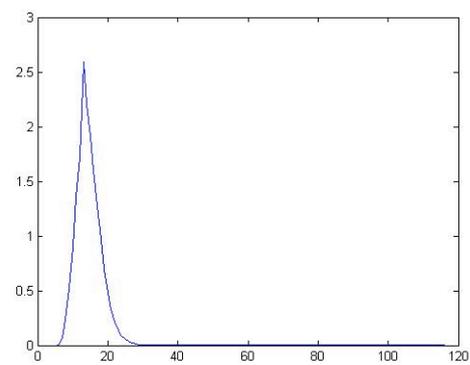


Figura 71: Erro - Pólos em  $-6,-7, -8-0.5i, -8+0.5i$ .

A seguir os pólos foram todos alocados sobre o eixo real, -8, -9, -10, -11. Pela Figura 72 nota-se uma pequena melhora, mas a transição entre as duas curvas (troca de concavidade) é sentida pela controlador. É importante ressaltar que o *yaw* também está sendo considerado nessa malha, ao passo que ele é usado na realimentação. A Figura 73 e a Figura 74 mostram o efeito do transiente que aparece no esterçamento e no erro respectivamente.

Deslocamento do C.G.

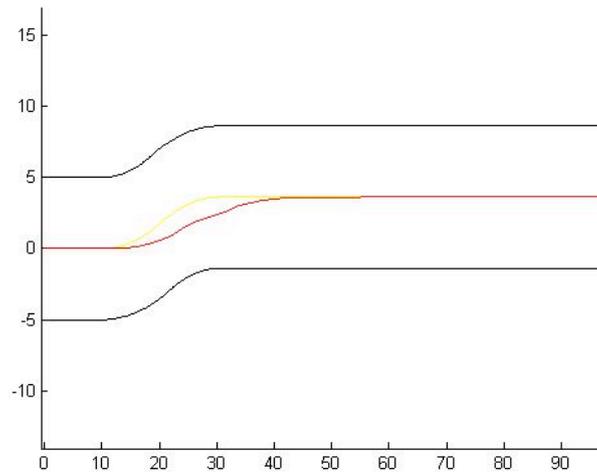


Figura 72: Deslocamento do C.G. - Pólos em -8, -9, -10, -11.

Ângulo de esterçamento

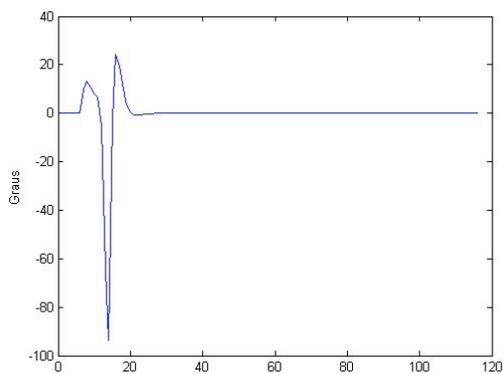


Figura 73: Ângulo de esterçamento – Pólos em -8, -9, -10, -11.

Erro

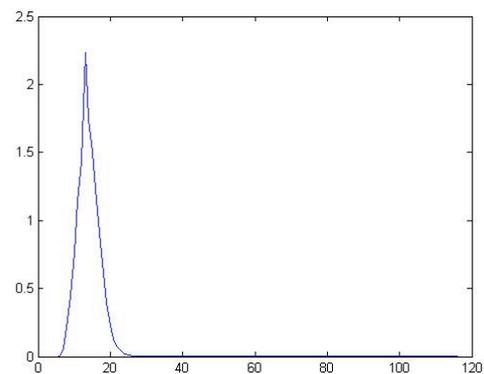


Figura 74: Erro - Pólos em -8, -9, -10, -11.

Pode-se notar pelas simulações feitas acima que posicionar os pólos no semi-plano negativo leva o erro a zero, mas mesmo escolhendo pólos bem a esquerda, sejam complexos conjugados ou todos reais, o sistema não segue de

maneira satisfatória a trajetória desejada. Isso se dá pelo fato de a referência ser uma combinação de degraus com amplitudes diferentes, isto é, a cada valor de  $X$ , é dado um valor desejado de  $Y$ . O tempo de resposta desse sistema em malha fechada não é bom para rastrear trajetórias.

A seguir pode-se ver o controlador determinado acima, com todos os pólos no eixo real, introduzido na malha de controle com troca de referencial não linear. O resultado é muito aquém do esperado (Figura 75). Os elementos não lineares na malha fazem com que o sistema não tenda para a trajetória desejada e o erro aumenta ao longo do tempo, como visto na Figura 77. O esterçamento continua apresentando um transiente durante as entradas de curva (Figura 76).

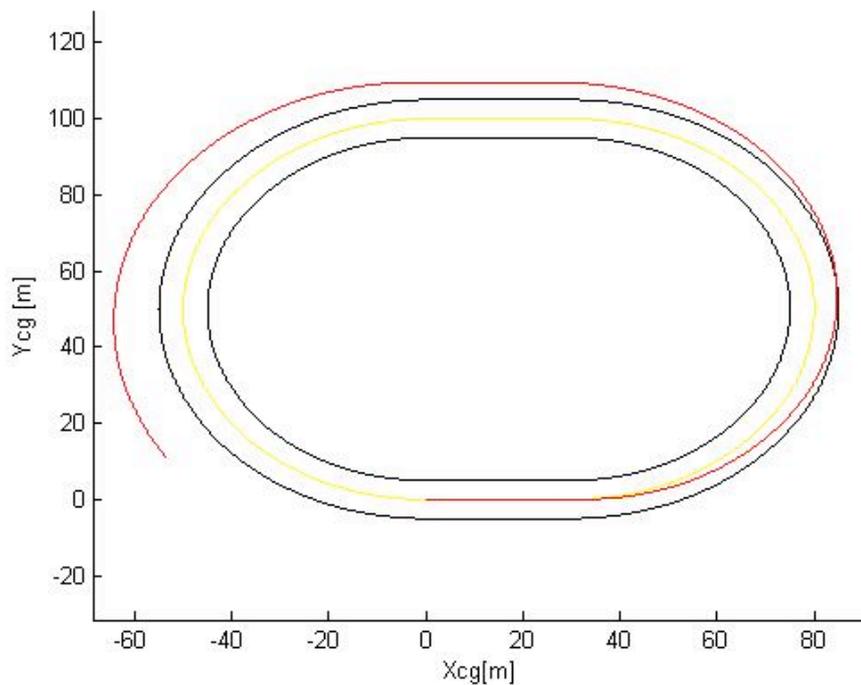


Figura 75: Deslocamento do C.G. - Pista Fechada - Pólos em -8,-9,-10,-11.

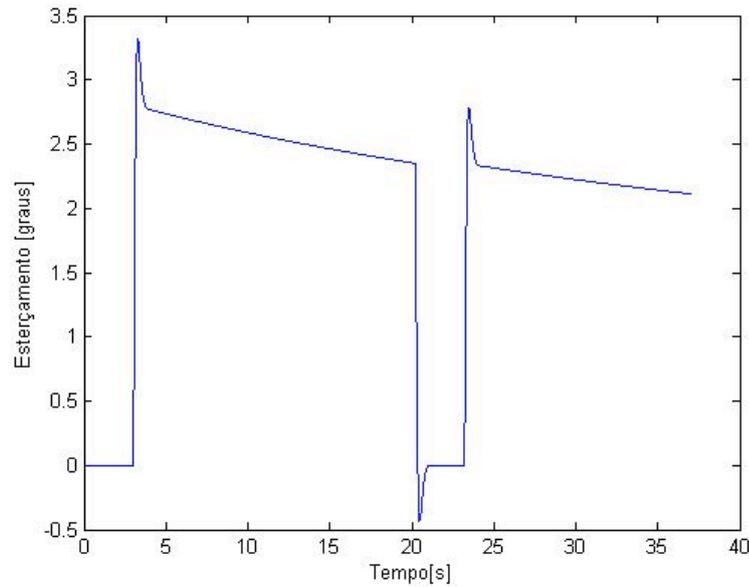


Figura 76: Esterçamento - Pista Fechada - Pólos em -8,-9,-10,-11.

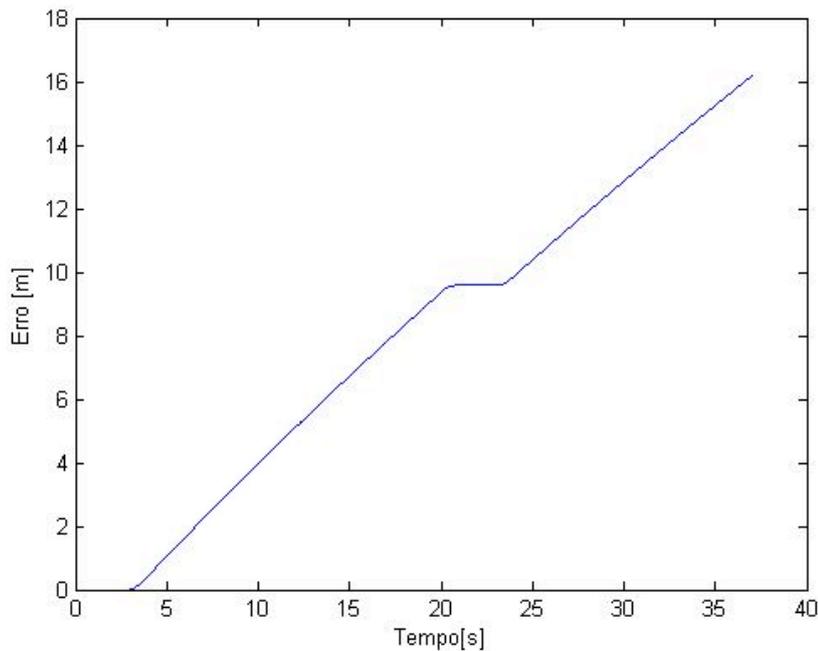


Figura 77: Erro - Pista Fechada - Pólos em -8,-9,-10,-11.

O controle moderno apresentou piores resultados do que os controladores clássicos, mesmo com o ajuste dos pólos o sistema apresentou mais erro do que nos casos anteriores. O fato de a referência não ser um degrau mais sim uma seqüência de degraus com amplitudes diferentes pode ter prejudicado o resultado, já que o projeto do controlador não leva em consideração a forma do sinal de referência. Técnicas como o regulador linear de saída podem ser estudadas no futura

para aprimorar os resultados, ao passo que ela leva em consideração o sinal de referência. Para trajetórias fechadas pode-se pensar em linearização por partes da trajetória como sugestão de estudos futuros.

## 7

### Definição da Trajetória via Controle Ótimo

O objetivo desse trabalho é avaliar a metodologia de projeto e os controladores não só em percursos que representem o centro da pista, mas trajetórias ótimas em algum aspecto, esse capítulo dá um primeiro passo na determinação de uma trajetória otimizada em relação ao tempo de percurso.

Um modelo de veículo simplificado será adotado para se obter os resultados, ao passo que modelos mais completos remeteriam a sistemas muito complexos e de tempo de máquina muito elevado.

O veículo será representado por quatro equações diferenciais de primeira ordem que definem, velocidade em  $x$ , velocidade em  $y$ , aceleração em  $x$  e aceleração em  $y$ , dado pela Figura 78, onde  $a$  é a aceleração do veículo,  $\beta$  é a direção da aceleração,  $v$  e  $u$  são as velocidades laterais e longitudinais respectivamente e  $x$  e  $y$  o deslocamento do veículo nos dois eixos.

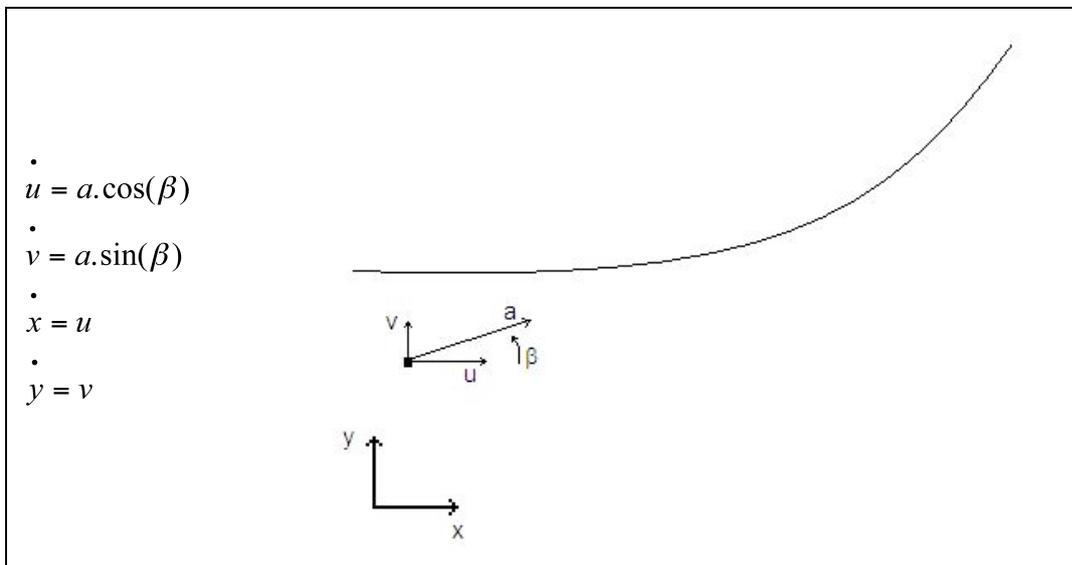


Figura 78: Representação do modelo.

## 7.1. Descrição do Problema de Tempo Mínimo

O problema a ser tratado se subdivide em dois casos. Em ambos as posições final e inicial são definidas. A diferença está no fato de que no primeiro caso as direções das velocidades (composta por  $u$  e  $v$ ) inicial e final não são definidas e no segundo caso definem-se como condições inicial e final as direções da velocidade na entrada e na saída da curva. A aceleração é constante, mas sua orientação em relação ao referencial inercial é variável, sendo esta a variável de controle. Tem-se como restrições a curva que define a pista, a orientação da aceleração que é limitada e a aceleração lateral do veículo, que também é limitada.

### 7.1.1. Condições Iniciais e Finais de Velocidade Livres.

Considerando o modelo de partícula,

$$\begin{aligned} \dot{u} &= a \cdot \cos(\beta) \\ \dot{v} &= a \cdot \sin(\beta) \\ x &= u \\ y &= v \end{aligned} \tag{37}$$

Sob as seguintes condições de contorno para velocidades inicial e final livres,

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ y(0) &= y_0 \\ x(tf) &= x_1 \\ y(tf) &= y_1 \\ -M &\leq \beta \leq M \\ a &= 1 \\ -a_{admissivel} &\leq a_{lateral} \leq a_{admissivel} \\ y &= 1.3^x \end{aligned} \tag{38}$$

onde vale lembrar que:  $a_{lateral} = \frac{V}{R} \cdot u$

O critério de otimalidade usado é (Bryson, 1981):

$$J = \int_{t_0}^{t_f} 1 \cdot dt \quad \rightarrow \quad J = t_f - t_0 \quad (39)$$

Define-se a Hamiltoniana (Bryson, 1981):

$$H = 1 + \lambda_u \cdot \cos(\beta) + \lambda_v \cdot \sin(\beta) + \lambda_x \cdot u + \lambda_y \cdot v + \mu \cdot S \quad (40)$$

onde  $S = y - 1.3^x$  representa a restrição e

$$\mu \begin{cases} > 0, S = 0 \\ = 0, S < 0 \end{cases} \quad (41)$$

o que significa que quando  $\mu$  for maior que zero, a restrição está ativa, caso contrário ela não está ativa e o problema é o mesmo que sem restrição.

Para chegar às condições necessárias deve-se resolver o problema para os dois casos,  $\mu = 0$  e  $\mu > 0$ . A solução será uma composição desses dois resultados.

Assim, a Hamiltoniana gera para  $\mu = 0$

$$H = 1 + \lambda_u \cdot \cos(\beta) + \lambda_v \cdot \sin(\beta) + \lambda_x \cdot u + \lambda_y \cdot v \quad (42)$$

e as equações adjuntas são as seguintes (Bryson, 1981):

$$\begin{aligned}
 \dot{\lambda}_u &= -\frac{\partial H}{\partial u} = -\lambda_x \\
 \dot{\lambda}_v &= -\frac{\partial H}{\partial v} = -\lambda_y \\
 \dot{\lambda}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \\
 \dot{\lambda}_y &= -\frac{\partial H}{\partial y} = 0
 \end{aligned}
 \tag{43}$$

Levando a condição de máximo:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \rightarrow -\lambda_u \cdot \text{sen}(\beta) + \lambda_v \cdot \text{cos}(\beta) = 0
 \tag{44}$$

Sendo as equações de estado do modelo das por:

$$\begin{aligned}
 \dot{u} &= a \cdot \text{cos}(\beta) \\
 \dot{v} &= a \cdot \text{sin}(\beta) \\
 \dot{x} &= u \\
 \dot{y} &= v
 \end{aligned}
 \tag{45}$$

Resolvendo o sistema composto pelas equações (42), (43), (44), (45) se tem,

$$\begin{aligned}
 \lambda_x &= C1 \\
 \lambda_y &= C2 \\
 \lambda_u &= C1.t + C3 \\
 \lambda_v &= C2.t + C4 \\
 \beta &= \text{tg}^{-1} \left( \frac{C2.t + C4}{C1.t + C3} \right)
 \end{aligned}
 \tag{46}$$

Como  $u(0)$  e  $v(0)$  não são definidos então  $\lambda_u(0)$  e  $\lambda_v(0)$  são iguais a zero (Bryson, 1981). Sendo assim se tem que  $C3$  e  $C4$  são zero e  $\beta$  é uma constante.

$$\beta = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{C2}{C1}\right) \quad (47)$$

O que leva a entender que a orientação da aceleração não varia e conseqüentemente  $\dot{u}$  e  $\dot{v}$  são constantes, logo o veículo percorre uma reta entre as posições iniciais e finais, o que intuitivamente, já era de se esperar quando a restrição do estado não está ativa.

Para  $\mu > 0$  a Hamiltoniana é dada por,

$$H = 1 + \lambda_u \cdot \cos(\beta) + \lambda_v \cdot \operatorname{sen}(\beta) + \lambda_x \cdot u + \lambda_y \cdot v + \mu \cdot (y - 1.3^x) \quad (48)$$

e as equações adjuntas são as seguintes:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_u &= -\frac{\partial H}{\partial u} = -\lambda_x \\ \dot{\lambda}_v &= -\frac{\partial H}{\partial v} = -\lambda_y \\ \dot{\lambda}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} = \mu \cdot \ln(1.3) \cdot 1.3^x \\ \dot{\lambda}_y &= -\frac{\partial H}{\partial y} = -\mu \end{aligned} \quad (49)$$

sendo a condição de máximo:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \rightarrow -\lambda_u \cdot \operatorname{sen}(\beta) + \lambda_v \cdot \cos(\beta) = 0 \quad (50)$$

E novamente se tem as equações de estado dadas por,

$$\begin{aligned} \dot{u} &= a \cdot \cos(\beta) \\ \dot{v} &= a \cdot \sin(\beta) \\ x &= u \\ y &= v \end{aligned} \quad (51)$$

Com a condição de restrição de trajetória:

$$y = 1.3^x \quad (52)$$

Resolvendo novamente o sistema e equações encontra-se uma função de  $\beta$  tal que o veículo percorre a restrição. O que também era o esperado, já que ao derivar a Hamiltoniana em relação a  $\mu$  a equação que aparece no sistema é  $y=1.3^x$ , forçando essa condição.

Como o objetivo é minimizar o tempo e o que o princípio do máximo fornece são condições necessárias, quando a restrição não está ativa tem-se uma reta, quando ela é ativa, percorre-se a restrição. Dessa forma existem duas possibilidades à testar, mostradas na Figura 79 e na Figura 80.

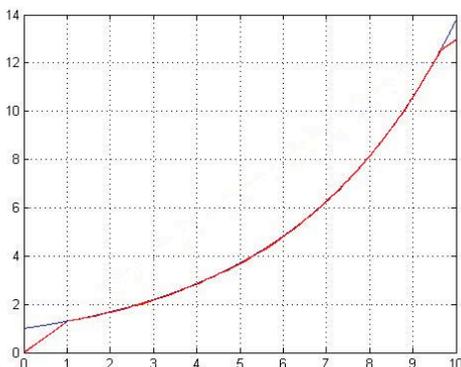


Figura 79: Composição da solução.

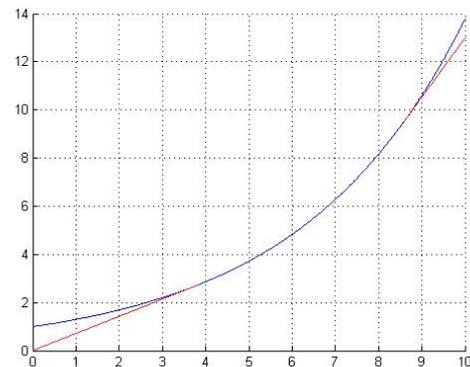


Figura 80: Segunda composição da solução.

No primeiro caso (Figura 79) é traçada uma reta direto ao ponto final como se não houvesse restrição, que é interrompida quando se atinge a restrição. Pelo entendimento do problema sabe-se que não pode haver essa descontinuidade na orientação da aceleração. No mundo real não consegue uma mudança instantânea de direção como representado na Figura 79.

Na Figura 80 a solução parece mais realista, não havendo descontinuidade na trajetória. O veículo se aproxima por uma reta tangente, percorre a restrição e escapa por outra reta tangente a restrição.

A solução da Figura 80 pode ser calculada geometricamente para cada caso de condição inicial. Em particular, essa trajetória representa a solução para o seguinte problema:

$$\begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} x(t_f) \\ y(t_f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \end{pmatrix} \quad (53)$$

Sendo assim calcula-se as duas retas tangentes à restrição e que passam por esses pontos. A equação da primeira reta é dada por,

$$y = 0.71.x \quad (54)$$

e a segunda reta é dada por,

$$y = 2.46.x - 11.62 \quad (55)$$

Um primeiro ponto importante a se destacar neste caso é que o veículo mantém aceleração constante, de modo que na reta não existirá aceleração lateral, mas sobre a restrição, que não é um arco de círculo, a aceleração lateral aumenta a medida que o veículo percorre a restrição. Isso significa que dependendo da restrição, a aceleração lateral pode ultrapassar a admissível, ou seja, o veículo derraparia e se afastaria da restrição, não obedecendo a condição necessária de otimalidade, que nesse caso é percorrer a restrição.

Da mesma forma, se a restrição (curva) for muito acentuada, a variável de controle que é limitada, pode não ter amplitude para percorrê-la, tendo o veículo que se deslocar por uma outra trajetória possível e em casos extremos nem conseguindo realizar a curva.

Note que no caso da Figura 79 a taxa de variação de  $\beta$ , necessária para se percorrer a trajetória em questão, seria infinita e conseqüentemente a aceleração lateral também, não atendendo as restrições.

Considerando a solução demonstrada na Figura 80, se vê que o problema passou a ser puramente geométrico, pois dadas as condições iniciais e se certificando que as restrições tanto no controle quanto na aceleração lateral são atendidas, basta achar as retas tangentes à restrição e em seguida os instantes de comutação, que o problema estará resolvido.

### 7.1.2. Condições Iniciais e Finais de Velocidade Definidas.

Novamente o sistema de equações que descreve o modelo de partícula:

$$\begin{aligned}
 \dot{u} &= a \cdot \cos(\beta) \\
 \dot{v} &= a \cdot \sin(\beta) \\
 \dot{x} &= u \\
 \dot{y} &= v
 \end{aligned}
 \tag{56}$$

sob as seguintes condições de contorno para velocidades inicial e final definidas,

$$\begin{aligned}
 x(0) &= x_0 \\
 y(0) &= y_0 \\
 x(tf) &= x_1 \\
 y(tf) &= y_1 \\
 u(0) &= u_0 \\
 v(0) &= v_0 \\
 u(tf) &= u_1 \\
 v(tf) &= v_1 \\
 -M &\leq \beta \leq M \\
 a &= 1 \\
 -a_{\text{admissivel}} &\leq a_{\text{lateral}} \leq a_{\text{admissivel}} \\
 y &= 1.3^x
 \end{aligned}
 \tag{57}$$

Nesse caso o sistema de equações continua o mesmo, o que muda agora é o fato de que são definidas condições iniciais de velocidade, como mostrado na Figura 81. Com tais velocidades iniciais definidas, a solução não é mais uma reta tangente à restrição. A solução deverá sair tangente à velocidade resultante.

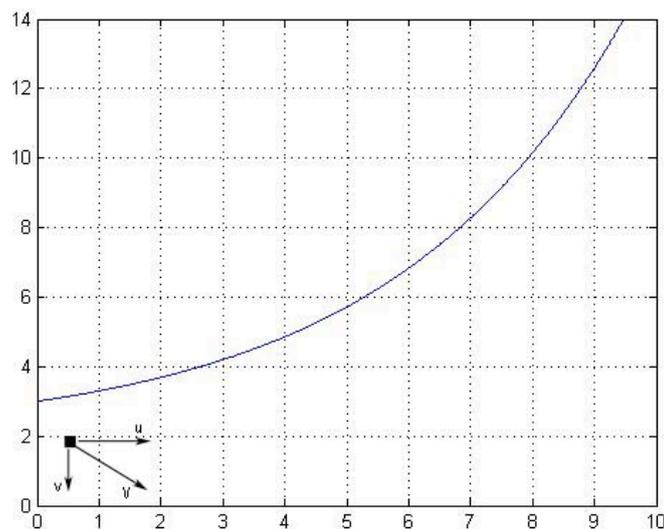


Figura 81: Condições iniciais para o segundo caso.

Para o caso em que as condições iniciais estão definidas, não se tem como solução uma reta. A solução encontrada no caso anterior é:

$$\begin{aligned}
 \lambda_x &= C1 \\
 \lambda_y &= C2 \\
 \lambda_u &= C1.t + C3 \\
 \lambda_v &= C2.t + C4 \\
 \beta &= \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{C2.t + C4}{C1.t + C3}\right)
 \end{aligned}
 \tag{58}$$

Note que desta vez as condições  $v(0)$  e  $u(0)$  estão definidas, significando que  $\lambda_u(0)$  e  $\lambda_v(0)$  não serão nulas e conseqüentemente  $C3$  e  $C4$  podem existir.

Levando em consideração a intuição que se tem sobre o problema e o que o princípio do máximo fornece, pode-se supor a forma da solução dada as condições iniciais representadas na Figura 81.

Sabe-se que a solução deve tangenciar a restrição e que se as CI's de velocidade fossem livres a reta seria a melhor opção. Pode-se supor então que a solução tem que convergir para essas condições o mais rápido possível, pois deseja-se o tempo mínimo. Além disso, o veículo deve buscar a reta que tangencia a curva, obedecendo as restrições de controle e de aceleração lateral.

Sabe-se também que existe um raio de curvatura onde a aceleração lateral é igual a admissível, ou seja, existe um  $\dot{\beta}_{\limite}$  que pode ser aplicado ao veículo para que ele tome a direção da reta tangente a restrição. É importante ressaltar que o veículo não percorrerá um arco de círculo, pois a aceleração não é zero, fazendo com que a velocidade aumente a cada instante. Se a velocidade varia a cada instante, o raio de curvatura admissível não é constante e conseqüentemente  $\dot{\beta}_{\limite}$  também não é constante. Na realidade o raio de curvatura limite vai aumentando cada vez mais e  $\dot{\beta}_{\limite}$  diminuindo.

Em um dado momento, sabendo que não podem haver descontinuidades, o veículo escaparia por uma reta tangente à curva e à restrição, satisfazendo à condição necessária imposta pelo critério do mínimo.

Sendo assim, se o veículo não está apontado na direção da reta tangente à restrição ( $\beta = 0$ ), ele estará fazendo uma curva com o maior  $\beta$  possível, que obedeça as restrições de aceleração lateral e do próprio controle. Isso é mostrado pelo princípio do mínimo, ou seja, minimizar o tempo significa minimizar a hamiltoniana em relação à variável de controle.

Para este caso a Hamiltoniana em relação ao controle é dada por,

$$H = 1 + \lambda_u \cdot \cos(\beta) + \lambda_v \cdot \sin(\beta) + \lambda_x \cdot u + \lambda_y \cdot v + \mu \cdot (y - 1.3^x) \quad (59)$$

e minimizá-la é o mesmo que minimizar a Hamiltoniana equivalente,

$$H = \lambda_u \cdot \cos(\beta) + \lambda_v \cdot \sin(\beta) \quad (60)$$

e o que vai determinar a forma da curva solução são os sinais de  $\lambda_u$  e  $\lambda_v$ . Assim, representando essa função para as diferentes combinações de sinais e para um beta máximo de  $45^\circ$ , o que é mais do que um veículo normal pode esterçar suas rodas, tem-se as curvas da Figura 82, que representam parte da hamiltoniana em relação a  $\beta$ .

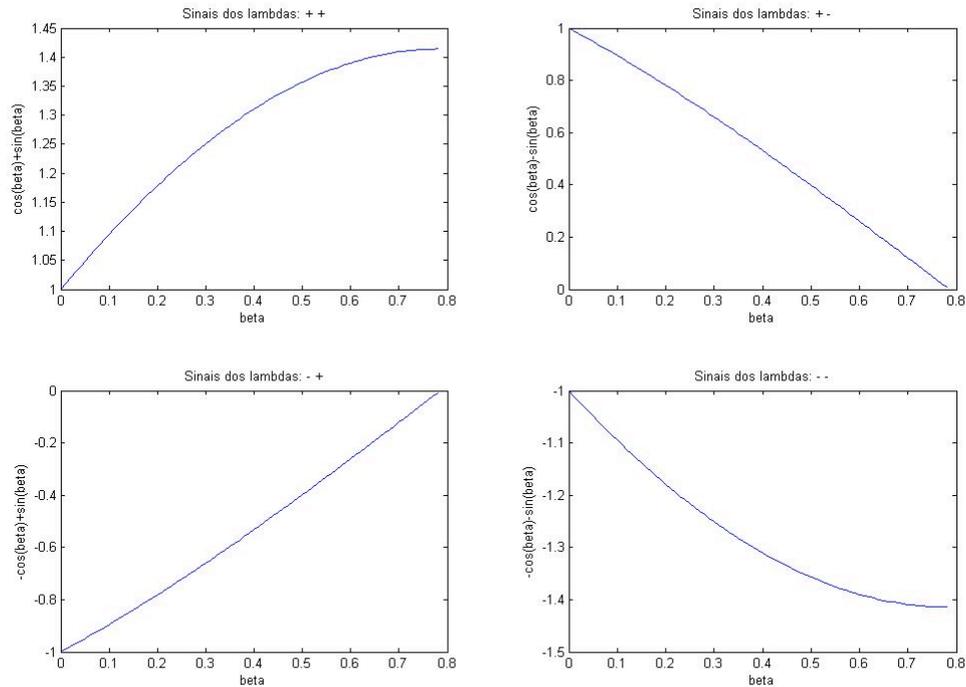


Figura 82: Parte da Hamiltoniana em função de  $\beta$ .

A partir desses gráficos pode-se ver que o mínimo acontece, ou quando  $\beta$  é zero ou quando  $\beta$  é máximo, ou seja,  $\beta$  está sempre nos extremos. No caso de um veículo,  $\beta$  estaria relacionado à capacidade de esterçamento do veículo e a elipse de aderência, que determina quais as máximas acelerações que o veículo pode ter durante uma curva sem que ele derrape. A Figura 83 mostra a solução que se chega quando se leva em consideração as condições necessárias do princípio aplicado.

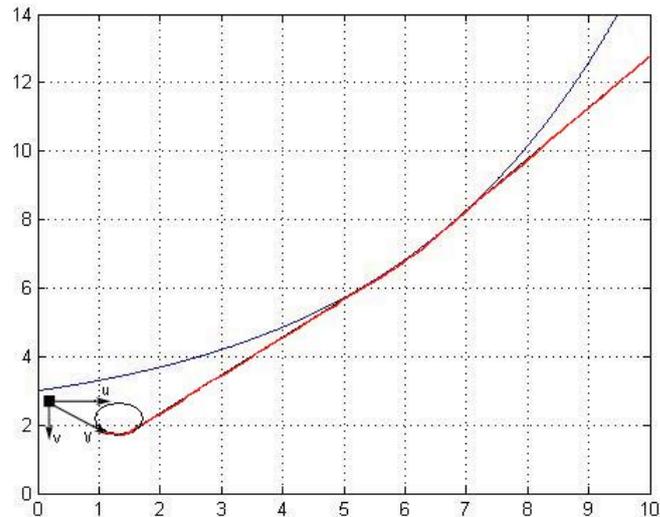


Figura 83: Solução quando são definidas as condições iniciais de velocidade.

Note que a Figura 81 representa apenas as CI's definidas, as condições finais estão livres. Caso tivessem sido definidas as CF's, o comportamento seria o mesmo para satisfazer as condições.

Pode-se dessa forma extrapolar esse caso para diversas situações. Se o limite de aceleração lateral máximo for muito pequeno o veículo pode não conseguir contornar a curva. Ele pode até nem tangenciar a restrição se a tangente à curva referente às condições iniciais alcançar o ponto final. Pode-se supor diversas outras situações que são resolvidas da mesma forma.

Sabendo traçar a curva limite de aceleração lateral, que relaciona a aceleração do veículo com sua capacidade de fazer a curva, e que pode ser obtida conhecendo-se a elipse de aderência do veículo, o problema se torna, novamente geométrico, se baseando em encontrar as retas tangentes às curvas em questão.

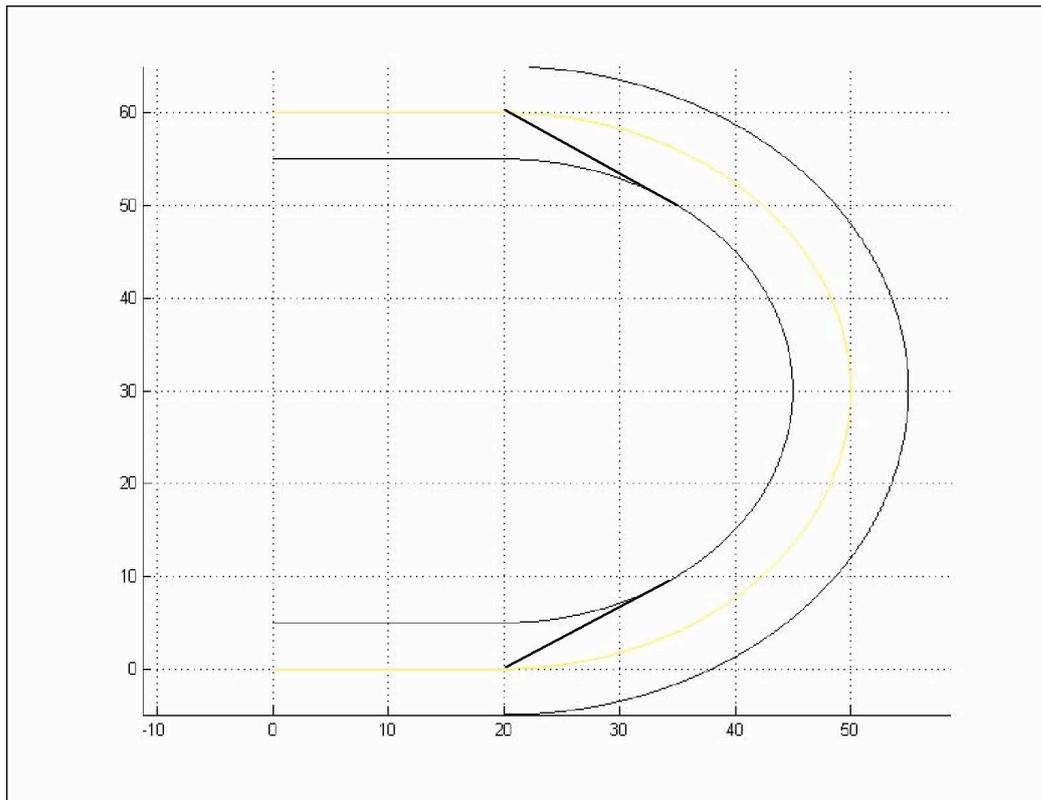


Figura 84: Condições iniciais de posição definidas.

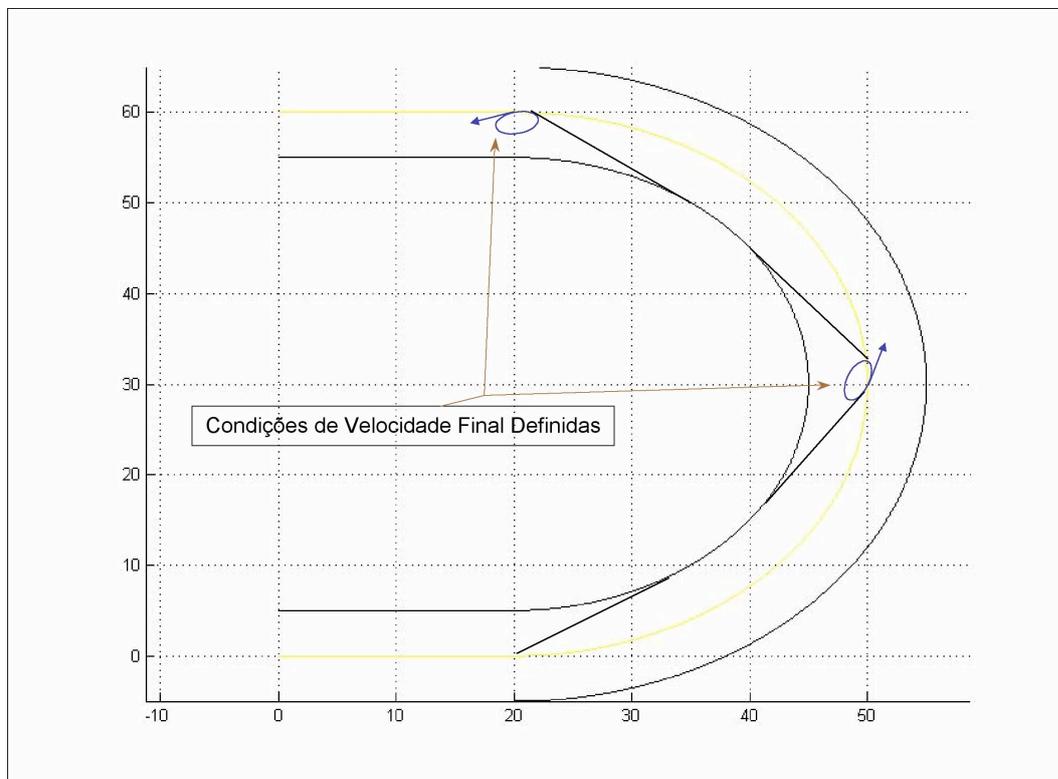


Figura 85: Condições Finais de Velocidade Definidas.

A Figura 84 e a Figura 85 mostram um caso de composição de trajetórias. Na Figura 84 pode-se ver o caso em que apenas a posição inicial e final são definidas, nesse caso o veículo percorre a curva e sai tangente a trajetória até o ponto final, pois o caminho mais rápido é o caminho mais curto. Na Figura 85 mostra-se o caso em que as velocidades finais são definidas também. Note que o veículo percorre a elipse definida pelas características do carro, e logo após busca o caminho mais curto que é a reta, como existe a restrição da borda da pista ele realiza a tangência como explicado anteriormente. Essa composição pode ser realizada com um ou mais trechos, desde que se conheça as condições finais de velocidade para cada um deles. O próximo passo é identificar quais são as possíveis condições de velocidade final para cada trecho e optar pela melhor delas, para realizar o caminho mais rápido, amarrando isso é possível descrever a trajetória que leva ao menor tempo de percurso para qualquer pista.

## **7.2. Tratar um Problema Real**

Nesses casos tratados anteriormente, considerou-se a aceleração como sendo constante mas em uma situação real, provavelmente, pelo menos durante alguns instantes, ela é variável. Na realidade isso não muda a forma da solução, pelo contrário, permite que o veículo se aproxime cada vez mais da solução ideal que é a abordada no Caso 1.

Tendo a capacidade de desacelerar, o veículo pode, ao invés de percorrer a elipse do Caso 2, reduzir sua aceleração a zero e percorrer um arco de círculo, melhorando a solução.

O problema fica todo em cima da capacidade de desaceleração e aceleração do veículo. Essas características irão reger qual trajetória o veículo vai percorrer, mas o certo é que todas elas terão as mesmas formas apresentadas nesse trabalho.

Sendo assim surge mais uma variável de controle no sistema que será  $a(t)$ , a ser controlada de acordo com as condições iniciais e finais estabelecidas. É fácil perceber, voltando na solução do princípio do máximo que  $\beta(t)$  vai depender de  $a(t)$ .

Diante do problema proposto foi possível estabelecer um caminho para a solução desejada, alcançada não só pelos meios matemáticos mas pelo conhecimento do problema em si, permitindo fazer considerações importantes para sua resolução.

É interessante observar que utilizando essa análise, pode-se propor uma trajetória ótima para um circuito fechado, basta que as velocidades iniciais e finais de cada trecho sejam definidas. O tratamento dado para um trecho de curva pode se estender a uma trajetória completa.

Vale ressaltar que o princípio do máximo (Bryson, 1981) nem sempre retorna a solução fechada, mas sim condições necessárias para que se encontre a solução ótima. Por isso a importância de conhecer o problema e de ter certa intuição sobre os resultados. De modo geral os resultados encontrados estão de acordo com o esperado e com o objetivo proposto.

## Conclusões

Foi apresentado nesse trabalho um método para facilitar o estudo do problema de controle de um veículo sobre uma dada trajetória. Foram definidas maneiras de se construir e referenciar uma pista matematicamente e estratégias de controle foram aplicadas sobre diferentes modelos para avaliar e comparar os resultados. Foi dado um primeiro passo para se definir uma trajetória ótima.

Inicialmente o estudo foi feito sobre um modelo cinemático do veículo. A malha de controle foi montada utilizando um controlador clássico da família PID. O modelo percorreu a trajetória com um erro inferior a 0,4m e o ângulo de esterçamento se manteve inferior a um limite arbitrado em  $45^\circ$ . Apesar do bom resultado o modelo não representa os efeitos dinâmicos e inerciais atuantes no veículo.

O segundo estudo foi realizado com um modelo linear de quatro graus de liberdade. Esse modelo considera a transferência de referencial linearizada, de modo que o ângulo de *yaw* deve se manter em valores inferiores a  $20^\circ$ . Foram utilizados controladores clássicos e modernos e dois tipos de estruturas de malha de controle. Em uma delas se considera apenas a realimentação da posição do C.G. do veículo, na outra se considera também o ângulo de *yaw* do veículo.

Na malha em que realimenta-se apenas a posição do C.G., o controlador clássico proporcional derivativo duplo foi o que obteve melhor resultado, mantendo o erro inferior a um metro e o ângulo de esterçamento com um perfil realista. O controlador proporcional, apesar de orientar o carro muito bem na trajetória desejada, apresentou oscilações no ângulo de esterçamento. Já os controladores modernos não tiveram bons resultados, ao passo que mesmo com o ajuste dos pólos, não foi possível obter uma resposta rápida do sistema, já que a referência não era um degrau constante, mas mudava a cada instante.

Quando foi testado o controlador PDD na malha de controle não linear, os resultados se mantiveram tão bons quanto na malha linear, salvo o fato de aparecerem oscilações e um transiente no ângulo de esterçamento.

Quando a malha de controle foi realimentada com o ângulo de *yaw* se obteve bons resultados. Pode-se ver que a ponderação entre os erros gerados pelas duas realimentações influencia bastante no resultado. O erro final de posicionamento do veículo na pista permaneceu pequeno (inferior a um metro) e o ângulo de esterçamento apresentou um perfil realista e valores inferiores ao limite arbitrado. Foi possível notar que as oscilações são altamente dependentes da ponderação que se faz entre o erro referente ao C.G. do veículo e o erro vindo do ângulo de *yaw*. Essa parte do trabalho merece uma atenção especial no futuro, no sentido de se otimizar essa ponderação, a estrutura da malha e o controlador.

Por fim, no ultimo capítulo é apresentada uma maneira de se tratar o problema de determinação de trajetória ótima para percorrer uma curva. Essa é uma outra vertente que se integra ao escopo da dissertação, pois a metodologia discutida aqui pode receber como referência uma trajetória definida por algum outro método como controle ótimo ou otimização.

No final do estudo pode-se concluir que dentro das limitações dos modelos e das técnicas aplicadas, os resultados obtidos estão de acordo com o que se propôs, ou seja, percorrer uma trajetória pré-definida, seja ela aberta ou fechada. A contribuição mais importante do trabalho foi a discussão de como representar o problema e a verificação das limitações de cada um dos modelos e técnicas aplicadas. Além disso, o trabalho deixa espaço para o estudo de novos modelos e controladores a partir dos modelos de malha de controle e determinação de trajetória aqui elaborados.

## 9

### Referencias bibliográficas

- 1 K. Ogata, **Engenharia de Controle Moderno**, Prentice Hall, 2nd ed., 1990.
- 2 J. Huang, **Nonlinear Output Regulation**, SIAM, 2004.
- 3 E. Bryson, **Applied Optimal Control**, Hemisphere Pub, 1981.
- 4 J. Y. Wong, **Theory of Ground Vehicles**, New York: J. Wiley & Sons, 2nd ed., 1993.
- 5 G. Genta, **Motor Vehicle Dynamics: Modeling and Simulation**, Singapore, World Scientific Publishing, 1997.
- 6 M. Speranza, A. L. Spinola, F. Hey, **Análise do Comportamento de um Veículo em uma Trajetória Fechada Pré-Definida através de um Modelo Dinâmico Linear em uma Malha de Controle**. SAE Paper No. 2006-01-2762, 2006.
- 7 M. Speranza and F. Hey, **Behavior of Ground Vehicle in Closed Path using linear and Non-Linear Dynamic Models in a Control Loop**. Rio de Janeiro: PUC-Rio, 2006.
- 8 M. Speranza, A. L. Spinola, **Análise do Comportamento Dinâmico de um Veículo em uma Trajetória Pré-Definida através de um Modelo Cinemático em Malha Fechada**, SAE Paper No.2005-21-2176, SAE Brasil, 2005.
- 9 A. L. Spinola, **Modelagem e Controle Não-Linear da Direção de um Veículo Terrestre**, Dissertação de Mestrado, PUC-Rio, Dez. 2003.
- 10 J. K. Hedrick, **Control Issues in Automated Highway Systems**, IEEE Control Systems, Vol. 14, Issue 6, Dez. 1994.
- 11 R. Garcia, **Frontal and Lateral Control for Unmanned Vehicles in Urban Tracks**, Intelligent Vehicle Symposium, Vol. 2, Jun. 2002.
- 12 S. E. Shladover, **The California PATH Program of IVHS Research and its Approach to Vehicle-Highway Automation**, Intelligent Vehicle apos., Jun. 2002.

- 13 R. Horowitz, Control **Design of an Automated Highway**, IEEE, Vol. 88, Issue 7, Jul. 2002.
- 14 E. Freund, **Nonlinear Path Control in Automated Vehicle Guidance**, IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol. 13, No. 1, Feb. 1997.