



**Patrick Merz Paranhos**

**Localização em Ambientes Externos através da Fusão de  
Sensores GPS e Inercial por um Filtro de Kalman**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da PUC-Rio.

Orientadores: Marco Antonio Meggiolaro  
Álvaro de Lima Veiga Filho

Rio de Janeiro, 18 de Setembro de 2009



**Patrick Merz Paranhos**

**Localização em Ambientes Externos através da Fusão de  
Sensores GPS e Inercial por um Filtro de Kalman**

Dissertação apresentada como requisito parcial para  
obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-  
Graduação em Engenharia Mecânica da PUC-Rio.  
Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Marco Antonio Meggiolaro**

Orientador

Departamento de Engenharia Mecânica – PUC-Rio

**Prof. Álvaro de Lima Veiga Filho**

Co-Orientador

Departamento de Engenharia Elétrica – PUC-Rio

**Prof. Mauro Speranza Neto**

Departamento de Engenharia Mecânica – PUC-Rio

**Prof. Luciano Luporini Menegaldo**

Instituto Militar de Engenharia

**Prof. José Eugenio Leal**

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 18 de Setembro de 2009

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### **Patrick Merz Paranhos**

Engenheiro de Controle e Automação formado pela PUC-Rio em 2007.

#### Ficha Catalográfica

Paranhos, Patrick Merz

Localização em ambientes externos através da fusão de sensores GPS e Inercial por um filtro de Kalman / Patrick Merz Paranhos ; orientadores: Marco Antonio Meggiolaro, Álvaro de Lima Veiga Filho. – 2009.

179 f. : il. (color.) ; 30 cm

Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009.

Inclui bibliografia

1. Engenharia mecânica – Teses. 2. Filtro de Kalman. 3. GPS. 4. Sensor Inercial. 5. Robôs móveis em ambiente externo. 6. Fusão de sensores. 7. Localização. I. Meggiolaro, Marco Antonio. II. Veiga Filho, Álvaro de Lima. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Mecânica. V. Título.

Dedico esta dissertação a minha família que sempre se manteve ao meu lado.

## Agradecimentos

aos Professores Doutores Marco Antonio Meggiolaro e Álvaro de Lima Veiga Filho pela orientação preciosa;

ao Ney Robinson por me acolher no projeto do Robô Ambiental Híbrido;

aos meus amigos de Laboratório no CENPES por sua amizade e ajuda;

a meu amigo Ricardo Saavedra por sua paciência e ajuda com as minhas incontáveis dúvidas de português;

à FAPERJ pela bolsa de estudos.

## Resumo

Paranhos, Patrick Merz; Meggiolaro, Marco Antonio. **Localização em Ambientes Externos através da Fusão de Sensores GPS e Inercial por um Filtro de Kalman**. Rio de Janeiro, 2009. 179p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Um dos problemas em soluções que envolvam mobilidade é estimar a posição do robô com precisão. Em ambientes externos, o sensor GPS é o mais comumente utilizado, pois o mesmo fornece uma posição global, porém existe uma imprecisão que é superior a alguns metros, além de depender da visibilidade aos satélites. Outra solução é utilizar um sensor inercial, que no início da operação apresenta uma boa precisão, porém o erro de posicionamento cresce ilimitadamente por ser calculado através da integral dupla das acelerações e velocidades angulares medidas. O presente trabalho desenvolve um sistema de localização de robôs móveis em ambientes externos. As soluções do posicionamento via GPS e via sensor inercial são combinadas através de um filtro de Kalman, reduzindo a incerteza da obtenção da posição. O equacionamento e duas implementações distintas do filtro de Kalman serão apresentadas. Uma implementação clássica e uma versão estendida para sensores inerciais de baixa qualidade, a qual utiliza a orientação fornecida por bússolas na filtragem. Através de experimentos e simulações será demonstrada a eficácia da localização através do filtro de Kalman e a melhora na performance do mesmo quando utilizado a implementação estendida em comparação a clássica.

## Palavras-chave

Filtro de Kalman; GPS; Sensor Inercial; Robôs Móveis em Ambiente Externo; Fusão de Sensores; Localização

## Abstract

Paranhos, Patrick Merz; Meggiolaro, Marco Antonio (Advisor). **Localization in External Environments through GPS/INS Kalman Filter**. Rio de Janeiro, 2009. 179p. MSc. Dissertation – Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

One of the problems with solutions that involve mobility is to accurately estimate the robot's position. In an outdoor environment, the GPS sensor is the most commonly used method because it provides a global position, but with an error margin that is greater than just a few meters, and creates a dependency on the visibility of the satellites. Another solution is to use an inertial sensor, which at the beginning of the operation shows good accuracy, but the positioning error grows indefinitely because it is calculated by a double integral of acceleration and angular velocity measures. This work develops a system for localization of mobile robots in outdoor environments. The positions are estimated via GPS and inertial sensors, combined using a Kalman filter, reducing the uncertainty. The equations and two distinct implementations of the filter will be presented. A classical implementation and an extended version for low-grade inertial measurement units, which utilizes the orientation given by compasses in the filtering process. The effectiveness of the Kalman filter navigation is verified through experimental and simulation results. The performance gain of the extended filter in comparison to the classic is also verified.

## Keywords

Kalman Filter; GPS; Inertial Sensor; Mobile Robot; Localization in External Environment; Sensor Fusion;

## Sumário

|         |  |    |
|---------|--|----|
| 1       | Introdução                                 | 19 |
| 1.1.    | Motivação                                  | 22 |
| 1.2.    | Objetivo                                   | 23 |
| 1.3.    | Justificativa                              | 23 |
| 1.4.    | Revisão Bibliográfica                      | 24 |
| 1.5.    | Estrutura da Dissertação                   | 25 |
| 2       | Sensores                                   | 27 |
| 2.1.    | Erro                                       | 27 |
| 2.2.    | Sensores Proprioceptivos                   | 28 |
| 2.2.1.  | Odômetros                                  | 29 |
| 2.2.2.  | Sensores Inerciais                         | 29 |
| 2.3.    | Sensores <i>Exteroceptivos</i>             | 36 |
| 2.3.1.  | Energia Acústica                           | 37 |
| 2.3.2.  | Energia Eletromagnética                    | 38 |
| 2.3.3.  | Medição por Tempo de Vôo                   | 39 |
| 2.3.4.  | Medição por Diferença de fase              | 40 |
| 2.3.5.  | Medição por Variação de Frequência         | 41 |
| 2.3.6.  | Medição por Triangulação                   | 41 |
| 2.3.7.  | Medição por Velocidade Relativa            | 43 |
| 2.3.8.  | LIDAR                                      | 43 |
| 2.3.9.  | Sonar                                      | 45 |
| 2.3.10. | Radar de Milímetro                         | 45 |
| 2.3.11. | Bússolas                                   | 47 |
| 2.3.12. | Sensores Baseados em Visão                 | 48 |
| 2.3.13. | Sistema de Satélites para Navegação Global | 48 |
| 2.4.    | GPS  | 50 |
| 2.4.1.  | Receptores                                 | 51 |

|  |    |
|--|----|
| 2.4.2. Erro  | 52 |
| 2.4.3. Disponibilidade Seletiva (SA)                       | 53 |
| 2.4.4. Ionosfera   | 53 |
| 2.4.5. Troposfera  | 54 |
| 2.4.6. Múltiplos Caminhos                                  | 54 |
| 2.4.7. Dados <i>Ephemeris</i>                              | 55 |
| 2.4.8. Relógio do Satélite                                 | 55 |
| 2.4.9. Resolução e Ruído do Receptor                       | 55 |
| 2.4.10. Diluição de Precisão (DOP)                         | 56 |
| 2.4.11. Sistema Diferencial de Posicionamento de Satélites | 57 |
| <br>   |    |
| 3 Filtro de Kalman Discreto                                | 59 |
| 3.1. Sistemas Lineares                                     | 59 |
| 3.2. Estimação Probabilística                              | 60 |
| 3.3. Filtro de Kalman                                      | 61 |
| 3.4. Exemplo   | 64 |
| 3.4.1. Simples Posicionamento em 1 Dimensão                | 64 |
| 3.4.2. Ajuste do Ruído da Medida                           | 66 |
| 3.5. Sistemas Não Lineares                                 | 68 |
| 3.6. Filtro de Kalman Estendido                            | 69 |
| 3.6.1. Linearização  | 69 |
| 3.6.2. Equação do Filtro de Kalman Estendido               | 73 |
| <br>   |    |
| 4 Navegação Inercial (INS)                                 | 75 |
| 4.1. Modelo da Terra                                       | 75 |
| 4.2. Sistemas de Coordenadas                               | 76 |
| 4.2.1. Sistema Centrado e Fixo na Terra (ECEF)             | 77 |
| 4.2.2. Sistema Inercial Centrado na Terra (ECI)            | 78 |
| 4.2.3. Sistema Localmente Tangente (ENU)                   | 79 |
| 4.2.4. Sistema Wander-Azimuth (NAV)                        | 80 |
| 4.2.5. Coordenadas do Corpo                                | 80 |
| 4.2.6. Coordenada de Medida                                | 81 |
| 4.3. Navegação Inercial                                    | 82 |

|  |     |
|--|-----|
| 4.3.1. Bloco 0 – Transformação das Coordenadas de Medida para as Coordenadas do Corpo.               | 84  |
| 4.3.2. Bloco 1 – Aceleração $A^n$ .  | 84  |
| 4.3.3. Bloco 2 – Velocidade $V^n$ .  | 85  |
| 4.3.4. Bloco 3 – Velocidade angular do sistema NAV relativo a ECEF ( $\rho^n$ ).                     | 90  |
| 4.3.5. Bloco 4 – Posição Angular ( $C_e^n$ )   | 94  |
| 4.3.6. Bloco 5 – Velocidade Angular da Terra expressa nas Coordenadas NAV ( $\Omega^n$ ).            | 98  |
| 4.3.7. Bloco 6 – Velocidade Angular do sistema NAV com relação ao sistema ECI ( $w_{in}^n$ ).        | 98  |
| 4.3.8. Bloco 7 – Orientação ( $C_b^n$ ).   | 99  |
| 4.3.9. Condições Iniciais  | 100 |
| 4.4. Erro na Navegação Inercial  | 101 |
| 4.4.1. Erro na Posição Angular ( $\delta C_e^n$ )  | 102 |
| 4.4.2. Erro na Orientação ( $\delta C_b^n$ )   | 104 |
| 4.5. Propagação do Erro  | 105 |
| 4.5.1. Erro da Derivada da Posição Angular ( $\delta C_e^n$ ).                                       | 107 |
| 4.5.2. Erro na Latitude ( $\delta\Phi$ ), Longitude ( $\delta\lambda$ ) e Wander ( $\delta\alpha$ ). | 108 |
| 4.5.3. Erro na Derivada de Velocidade ( $\delta V$ )   | 108 |
| 4.5.4. Erro na Gravidade ( $\delta g$ )  | 109 |
| 4.5.5. Erro na Aceleração ( $\delta A^n$ )   | 110 |
| 4.5.6. Erro na Velocidade Angular do sistema NAV relativo a ECEF ( $\delta\rho^n$ )                  | 111 |
| 4.5.7. Erro na Altura ( $\delta h$ )   | 111 |
| 4.5.8. Erro na Orientação ( $\delta C_b^n$ )   | 112 |
| 5 Equacionamento do Filtro de Kalman   | 114 |
| 5.1. Vetor de Estado ( $x$ )   | 115 |
| 5.2. Matriz de Observabilidade Clássica ( $H$ )  | 117 |
| 5.3. Matriz de Observabilidade Orientação ( $H$ )  | 119 |
| 5.4. Matriz de Dinâmica do Sistema ( $F$ )   | 120 |
| 5.5. Vetor de Entrada ( $u$ )  | 124 |

|   |     |
|---|-----|
| 5.6. Ruídos da Medida   | 125 |
| 5.7. Ruídos do Processo   | 125 |
| 6 Simulações  | 126 |
| 6.1. Descrição da Simulação   | 126 |
| 6.2. Entrada  | 127 |
| 6.3. Modelo do Sensor Inercial (IMU)                                | 128 |
| 6.4. Modelo do GPS  | 130 |
| 6.5. Navegação Inercial (INS)                                       | 131 |
| 6.6. Filtro de Kalman do GPS/INS                                    | 131 |
| 6.7. Resultados da Simulação  | 135 |
| 6.7.1. RMS  | 135 |
| 6.7.2. Posição  | 136 |
| 6.7.3. Velocidade Linear  | 141 |
| 6.7.4. Orientação   | 142 |
| 6.7.5. Aceleração Linear  | 146 |
| 6.7.6. Velocidade Angular   | 147 |
| 6.8. Resultados da Simulação de Falha do Sinal de GPS               | 148 |
| 7 Experimentos  | 152 |
| 7.1. Experimento na Floresta Amazônica                              | 153 |
| 7.2. Ambiente Visualmente Reconhecível                              | 154 |
| 7.3. Resultado Experimental   | 155 |
| 7.4. Resultados dos Experimento na Amazônia                         | 156 |
| 7.5. Resultado Experimental no Ambiente<br>Visualmente Reconhecível | 160 |
| 7.6. Simulação de Falha no sinal do GPS no<br>Experimento           | 165 |
| 7.7. Resultados de Outras Literaturas                               | 169 |
| 8 Conclusões  | 172 |
| Bibliografia  | 174 |

Anexo A 177

Anexo B 178

## Lista de figuras

|   |    |
|---|----|
| Figura 1 - Robô GP8 da Seegrid.   | 20 |
| Figura 2 - Míssil de cruzeiro (Taurus KEPD 350).  | 20 |
| Figura 3 - Rover para operações em solo marciano (MER-A).   | 21 |
| Figura 4 - Diagrama   | 22 |
| Figura 5 - Robô Ambiental Híbrido.  | 23 |
| Figura 6 - Erros comuns entre entrada e saída: (a) bias; (b) fator de escala; (c) não-linearidade; (d) assimetria; (e) zona morta; (f) quantização. | 28 |
| Figura 7 - Sensor inercial Guimbale (BOSE, et. al., 1982)   | 30 |
| Figura 8 - Sensor inercial Strapdown (BOSE, et. al., 1982)  | 30 |
| Figura 9 - (a) Acelerômetro Mecânico. (b) Piezoelétrico.<br>(DUDEK; JENKIN, et. al., 2008)  | 31 |
| Figura 10 - Girômetro "Ring Laser"  | 32 |
| Figura 11 - Girômetro de fibra óptica   | 32 |
| Figura 12 - Girômetro Mecânico.   | 32 |
| Figura 13 - Girômetro por efeito de Coriolis.   | 33 |
| Figura 14 - A não detecção de uma fenda devido à divergência da onda sonora.  | 38 |
| Figura 15 - Detecção do ambiente mais próximo do que este realmente se encontra.  | 38 |
| Figura 16 - Espectro da energia eletromagnética   | 38 |
| Figura 17 - Triangulação 1D   | 42 |
| Figura 18 - Padrão estruturado de luz para triangulação em 2 dimensões, (RAMAMOORTHY et. al.)   | 43 |
| Figura 19 - LIDAR mapeando em duas dimensões.   | 44 |
| Figura 20 - Resultado de uma varredura utilizando um sonar  | 45 |
| Figura 21 - Varredura feita por um radar de milímetro.<br>(SCHEDING; BROOKER; HENNESSY; BISHOP et. al., 2002)                                       | 46 |
| Figura 22 - Constelação de Satélites. (Brock University   |    |

|  |    |
|--|----|
| Map Library)   | 50 |
| Figura 23 - Transmissão da Mensagem de Navegação com espalhamento C/A na L1.   | 51 |
| Figura 24 - Erro do GPS devido a Troposfera e Ionosfera.   | 53 |
| Figura 25 - Erro do GPS devido a múltiplos Caminhos.   | 55 |
| Figura 26 - Boa distribuição espacial dos satélites.   | 56 |
| Figura 27 - Má distribuição espacial dos satélites.  | 56 |
| Figura 28 - Cadeia escondida de Markov que caracteriza a evolução do sistema.  | 61 |
| Figura 29 - Densidade condicional da posição baseada no valor medido $z_1$ . (MAYBECK et. at., 1979)                   | 64 |
| Figura 30 - Densidade condicional da posição baseada no valor medido $z_2$ . (MAYBECK et. at., 1979)                   | 65 |
| Figura 31 - Densidade condicional da posição baseada nos valores medidos $z_1$ e $z_2$ . (MAYBECK et. at., 1979)       | 66 |
| Figura 32 - Simulação do Filtro de Kalman com $W=(0,01)^2$ . (WELCH e BISHOP et. al., 2006)                            | 67 |
| Figura 33 - Simulação do Filtro de Kalman com $W=(0,1)^2$ . (WELCH e BISHOP et. al., 2006)                             | 67 |
| Figura 34 - Simulação do Filtro de Kalman com $W=(1)^2$ . (WELCH e BISHOP et. al., 2006)                               | 67 |
| Figura 35 - Transformação não-linear de uma distribuição com pequena variância. (THRUN; BURGARD; e FOX et. al., 2005)  | 71 |
| Figura 36 - Transformação não-linear de uma distribuição com grande variância. (THRUN; BURGARD; e FOX et. al., 2005)   | 71 |
| Figura 37 - Transformação através de um ponto com pequena não-linearidade local. (THRUN; BURGARD; e FOX et. al., 2005) | 72 |
| Figura 38 - Transformação através de um ponto com grande não-linearidade local. (THRUN; BURGARD; e FOX et. al., 2005)  | 72 |
| Figura 39 - Aproximações à superfície da Terra.  | 76 |
| Figura 40 - Sistema de Coordenadas ECEF. (Department of Defense World Geodetic System 1984 et. al., 2000)              | 77 |
| Figura 41 - Representação do Ponto em Latitude, Longitude e  |    |

|   |     |
|---|-----|
| Altura.   | 78  |
| Figura 42 - Sistema de Coordenadas ECI  | 79  |
| Figura 43 - Sistema de Coordenadas ENU  | 79  |
| Figura 44 - Wander Azimuth  | 80  |
| Figura 45 - Coordenadas do Corpo  | 81  |
| Figura 46 - Coordenadas da Medida   | 81  |
| Figura 47 - Diagrama de Blocos da Navegação Inercial  | 83  |
| Figura 48 - Rotação do sistema (BOSE. et. al., 1982)  | 91  |
| Figura 49 - Velocidade angular em torno do eixo E e N.  | 91  |
| Figura 50 - Velocidade Angular no sistema NAV   | 92  |
| Figura 51 - Velocidade Angular total. (BOSE et. al., 1982)  | 93  |
| Figura 52 - Ângulos de Euler da Matriz de Rotação $C_e^m$ .<br>(BOSE et. al., 1982)                           | 95  |
| Figura 53 - Erro na Posição Angular. (BOSE et. al., 1982)   | 102 |
| Figura 54 - Erro na Posição Angular Zoom. (BOSE et. al., 1982)  | 102 |
| Figura 55 - Diagrama de Transformação do Erro na<br>Posição Angular.  | 103 |
| Figura 56 - Diagrama de Blocos da Propagação do Erro<br>na Navegação Inercial                                 | 106 |
| Figura 57 - Diagrama de Blocos da Fusão GPS/INS   | 115 |
| Figura 58 - Diagrama de Blocos da Simulação   | 126 |
| Figura 59 - Modelo Simplificado do Robô Ambiental Híbrido   | 127 |
| Figura 60 - Diagrama de Blocos da Fusão GPS/INS   | 133 |
| Figura 61 - Mapa Geo-referenciado do Percurso Medido<br>pelo GPS na Simulação.                                | 137 |
| Figura 62 - Erro do Percurso Medido pelo GPS na Simulação.  | 137 |
| Figura 63 – Mapa Geo-referenciado do Percurso Calculado pela<br>Navegação Inercial Clássica e com Orientação. | 138 |
| Figura 64 - Erro do Percurso Calculado pelo INS na Simulação.   | 138 |
| Figura 65 - Mapa Geo-referenciado do Percurso Calculado<br>pela Fusão GPS/INS Clássica e com Orientação.      | 139 |
| Figura 66 - Erro do Percurso Calculado pelo GPS/INS<br>na Simulação.  | 140 |

|  |     |
|--|-----|
| Figura 67 - Gráfico do Erro da Velocidade Linear Total do INS/GPS e do GPS.  | 141 |
| Figura 68 - Gráfico do Erro da Velocidade Linear Total INS.  | 142 |
| Figura 69 - Erro de Roll do INS Clássico na Simulação.   | 143 |
| Figura 70 - Erro de Roll do INS com Orientação e do GPS/INS na Simulação.  | 143 |
| Figura 71 - Erro de Pitch do INS Clássico na Simulação.  | 144 |
| Figura 72 - Erro de Pitch do INS com Orientação e do GPS/INS na Simulação.   | 144 |
| Figura 73 - Erro de Yaw do INS Clássico na Simulação.  | 145 |
| Figura 74 - Erro de Yaw do INS com Orientação e do GPS/INS na Simulação.   | 145 |
| Figura 75 - Erro Total da Aceleração Linear na Simulação.  | 146 |
| Figura 76 - Erro da Velocidade Angular na Simulação.   | 147 |
| Figura 77 - Erro do Percurso na Simulação.   | 148 |
| Figura 78 - Erro da Velocidade Linear Total na Simulação.  | 149 |
| Figura 79 - Raiz do Erro Quadrático da Orientação na Simulação.  | 149 |
| Figura 80 - Raiz do Erro Quadrático da Velocidade Angular na Simulação.  | 150 |
| Figura 81 - Raiz do Erro Quadrático da Aceleração Linear na Simulação.   | 150 |
| Figura 82 - Robô Ambiental Híbrido   | 152 |
| Figura 83 - Sensor Inercial (Xsens)  | 152 |
| Figura 84 - Sensor GPS (Garmin)  | 152 |
| Figura 85 - Painel de Controle 1   | 153 |
| Figura 86 - Painel de Controle 2   | 153 |
| Figura 87 - Área de Testes na Floresta Amazônica   | 154 |
| Figura 88 - Diagrama de Blocos do Experimento  | 155 |
| Figura 89 - Mapa Geo-Referenciado das posições do Filtro de Kalman, do INS e do GPS nos testes na Amazônia.        | 157 |
| Figura 90 - Zoom do Mapa Geo-Referenciado das posições do Filtro de Kalman, do INS e do GPS nos testes na Amazônia | 157 |
| Figura 91 - Corte 1 da Ampliação do Mapa Geo-Referenciado das  |     |

|  |     |
|--|-----|
| posições do Filtro de Kalman, do INS e do GPS nos testes na<br>Amazônia  | 158 |
| Figura 92 - Corte 2 da Ampliação do Mapa Geo-Referenciado das<br>posições do Filtro de Kalman, do INS e do GPS nos testes na<br>Amazônia | 158 |
| Figura 93 - Erro de Altitude do INS nos testes da Amazônia   | 159 |
| Figura 94 - Erro de Altitude do Filtro de Kalman nos testes<br>da Amazônia   | 160 |
| Figura 95 - Navegação do GPS e INS/GPS em torno da lagoa.  | 161 |
| Figura 96 - Navegação do INS em torno da lagoa.  | 162 |
| Figura 97 - Navegação do INS, INS/GPS e Real em torno da<br>Lagoa.   | 163 |
| Figura 98 - INS/GPS Clássico em torno da lagoa.  | 164 |
| Figura 99 - Mapa da Falha do Sinal do GPS no Experimento<br>na Lagoa.  | 165 |
| Figura 100 - Latitude no Experimento na Lagoa.   | 166 |
| Figura 101 - Longitude no Experimento na Lagoa.  | 166 |
| Figura 102 - Vx no Experimento na Lagoa.   | 167 |
| Figura 103 - Vy no Experimento na Lagoa.   | 167 |
| Figura 104 - Roll no Experimento na Lagoa.   | 168 |
| Figura 105 - Pitch no Experimento na Lagoa.  | 168 |
| Figura 106 - Yaw no Experimento na Lagoa.  | 169 |
| Figura 107 - Resultado experimental de (WANG et. al., 2006)  | 170 |
| Figura 108 - Resultado experimental de (UMAR; TASHFEEN;<br>AIME; e NOURELDIN et. al., 2009)  | 171 |
| Figura 109 - "Datasheet" Xsnes   | 177 |
| Figura 110 - "Datasheet" GPS Parte 1   | 178 |
| Figura 111 - "Datasheet" GPS Parte 2   | 179 |

## Lista de tabelas

|   |     |
|---|-----|
| Tabela 1 - Sistemas de GNSS existentes  | 49  |
| Tabela 2 - Desvios padrão dos erros na estimativa de posição utilizando o sinal de GPS. (SCHRIEVER) | 57  |
| Tabela 4 - Parâmetros do WGS-84 (Department of Defense World Geodetic System 1984 et. al, 2000)     | 76  |
| Tabela 3 - Parâmetros do modelo do Robô Ambiental Híbrido   | 128 |
| Tabela 4 - Fontes de Erro do Sensor Inercial (Xsens)  | 128 |
| Tabela 5 - Diagonal da Matriz de Ruído do Processo (V)  | 134 |
| Tabela 6 - Diagonal da Matriz de Ruído do Medida Implementação Clássica (W)                         | 134 |
| Tabela 7 - Diagonal da Matriz de Ruído do Medida Implementação com Orientação (W)                   | 134 |
| Tabela 8 - RMS da Simulação   | 135 |
| Tabela 9 - Diagonal da Matriz de Ruído do Processo Experimental (V)                                 | 156 |
| Tabela 11 - Diagonal da Matriz de Ruído da Medida Experimental (W)                                  | 156 |

# 1 Introdução

Um robô móvel realmente autônomo é um agente inteligente capaz de se mover por ambientes não estruturados, isto é, que não foram preparados para a operação de robôs, realizando tarefas desejadas, aprimorando seu funcionamento e tomando decisões a partir de sua interação com o ambiente sem depender de seres humanos. Os livros de (ZHENG et. al., 1993; NEHMZONW et. al, 2003; SAM e LEWIS et. al, 2006; TZAFESTAS et al., 1999) abordam as diversas técnicas empregadas na construção de robôs autônomos móveis e suas diferentes aplicações.

A capacidade de navegar pelo ambiente torna os robôs autônomos móveis úteis para diversos tipos de tarefas, como para transporte, monitoramento e inspeção. São, desta forma, ideais para tarefas em ambientes inacessíveis ou perigosos para seres humanos, como, por exemplo, o fundo do mar, o espaço sideral e ambientes radioativos.

Apesar do grande número de aplicações possíveis, os robôs autônomos móveis ainda não são comumente utilizados pela indústria ou em aplicações domésticas. Isso se dá principalmente pela falta de robustez e flexibilidade em sua navegação e em seu comportamento para operar em ambientes não estruturados. Os robôs móveis atualmente encontrados na indústria possuem apenas um certo grau de autonomia, sendo seu funcionamento confinado ao seu ambiente direto, pois operam dependentemente de uma estrutura específica no ambiente. Nesse sentido, pode ser citado o robô móvel GP8 da Seegrid, utilizado para transportar cargas em armazéns, vide Fig. 1.



Figura 1 - Robô GP8 da Seegrid.

A dificuldade de operar em ambientes não estruturados se dá devido à existência de eventos inesperados, às flutuações no ambiente e às incertezas nas informações percebidas através dos sensores. Em geral, a autonomia é mais facilmente adquirida no ar, em virtude da inexistência de obstáculos, e.g. mísseis de cruzeiro (Fig. 2).



Figura 2 – Míssil de cruzeiro (Taurus KEPD 350).

O problema se agrava para veículos terrestres devido às dimensões do terreno, à grande disparidade da densidade da superfície, e à instabilidade do ambiente percebido. Neste aspecto, cite-se o *rover* que opera em Marte, MER-A

(Fig. 3), o qual é capaz de mapear superfícies com visão 3D, computar quais áreas dentro de seu campo de visão são seguras ou não, computar a melhor rota até o objetivo desejado utilizando as áreas seguras, bem como dirigir pela rota calculada.

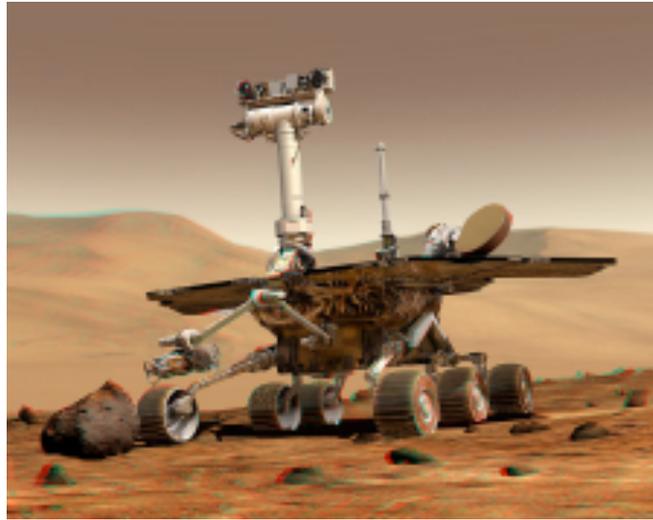


Figura 3 –Rover para operações em solo marciano (MER-A).

O desenvolvimento de um robô autônomo móvel é um processo complexo e multidisciplinar. Isto se deve à necessidade de transformar um mero computador capaz de se mover e perceber algumas propriedades físicas do ambiente em um agente inteligente apto a lidar com incertezas, ambigüidades, contradições e informações com ruído, além de identificar objetos, detectar padrões e regularidades, se localizar, construir mapas, navegar e aprender a partir da sua interação com o mundo.

Os campos disciplinares envolvidos são principalmente: dinâmica, controle, visão computacional, análise de sinais, algoritmos computacionais, teoria da informação, inteligência artificial e teoria da probabilidade. Identificar quais campos serão utilizados dependerá da técnica aplicada para se solucionar o problema. Por exemplo, a solução para o problema de localização, no qual o robô móvel precisa se localizar em um mapa, pode envolver dinâmica, visão computacional e teoria da probabilidade.

Os diversos problemas da robótica móvel podem ser agrupados em quatro módulos distintos - mas interconectados - que se relacionam com o mundo físico e entre si de acordo com o diagrama da Fig. 4:



do projeto, o robô ainda é tele operado sem realimentação, vide Fig. 5. Versões futuras semi-autônomas e tripuladas estão previstas.

Ao se locomover por uma área tão remota e extensa como a Amazônia e realizar coleta de amostras e dados, torna-se uma questão vital a percepção precisa da posição, possibilitando, assim, a navegação e demarcação de áreas de interesse.



Figura 5 – Robô Ambiental Híbrido.

### **1.2. Objetivo**

O objetivo deste trabalho é o desenvolvimento de uma metodologia que seja capaz de fundir, através de um filtro probabilístico, o sensor inercial e o de GPS de um robô, reduzindo a incerteza de seu posicionamento em ambientes externos.

### **1.3. Justificativa**

Para ser capaz de realizar uma tarefa complexa, e.g. dirigir autonomamente um veículo em um cenário urbano, um robô precisa ser capaz de tomar decisões baseadas no mundo físico que o cerca. O robô percebe este mundo físico através de seus sensores, entretanto este mundo percebido possui um grande número de incertezas.

Robótica probabilística é uma área nova na robótica que se preocupa com percepção e controle em face da incerteza. Através da probabilidade é possível

representar a incerteza dos valores medidos matematicamente, o que possibilita tomar decisões mais robustas em situações reais.

As incertezas podem ser geradas por limitações das informações extraídas de sensores, pois os mesmos estão sujeitos a ruídos, e limites físicos como alcance, resolução e mau funcionamento. As mesmas também podem advir da incapacidade de prever os eventos em um ambiente não controlado, assim como igualmente pode se originar do próprio modelo que o robô possui do mundo por ele percebido, que, por motivos computacionais, é apenas uma aproximação.

#### **1.4.**

#### **Revisão Bibliográfica**

(EVERETT e PETERS et. al., 1995) fornece uma revisão extensa sobre sensores para robôs móveis, entretanto esta deve ser utilizada com cautela, pois a tecnologia dos sensores está sempre evoluindo. (SIEGWART e NOURBAKHSI et. al., 2004) é mais atual e fornece um resumo dos sensores para robôs em seu segundo capítulo. (GREWAL, WEILL e WILEY et. al., 2007; DUDEK e JENKIN et. al., 2008) apresentam informações detalhadas sobre o sensor GPS e o sensor inercial.

(THRUN, BURGARD e FOX et. al., 2005) apresenta uma revisão de probabilidade condicional, e o filtro de Kalman contínuo é abordado de maneira simplificada. (ANDERSON E MOORE et. al., 1979) aborda os conceitos da filtragem estatística, com ênfase no filtro de Kalman, de maneira extensa e detalhada. (THRUN, BURGARD e FOX et. al., 2005) apresenta o filtro de Kalman de forma mais resumida em um de seus capítulos, focando na utilização do filtro para o problema de localização. (WELCH e BISHOP et. al., 2006) fazem uma introdução ao filtro de Kalman discreto e o estendido, além de mostrar, através de exemplos, a influência do ajuste dos parâmetros no resultado da filtragem. (MAYBECK et. al., 1979) explica o porquê de se utilizarem modelos estocásticos ao invés de determinísticos, abordando os conceitos de probabilidade necessários à compreensão e à construção dos mesmos.

(KONG et. al., 2000) apresenta uma modelagem para a navegação inercial de baixo custo, onde na propagação do erro da navegação inercial os erros angulares são assumidos como grandes. Ele comprova sua modelagem aplicando

esta em uma fusão com o GPS através do filtro de Kalman Estendido. (WANG et. al., 2006) também apresenta um trabalho sobre a fusão de um sensor inercial de baixo custo a um GPS, entretanto sua abordagem ao tema é diferente, sugerindo a incorporação de técnicas de inteligência artificial ao filtro de Kalman. (WAGNER e WIENEKE et. al., 2002) discutem o fato de existirem diversas implementações distintas na fusão do GPS com o sensor inercial, através do filtro de Kalman. Eles apresentam em seu trabalho uma sistematização para as diferentes modelagens do filtro e comparam os seus resultados dos mesmos quando aplicados a um mesmo conjunto de dados. (GEORGE e SUKKARIEH) equacionam a fusão do GPS com o sensor inercial utilizando uma implementação acoplada do filtro de Kalman, mostrando os seus resultados quando aplicado à navegação de um veículo autônomo. (BOSE et. al., 1982) apresenta de maneira detalhada o equacionamento da navegação inercial para ambos os tipos de sensores inerciais (“Strapdown“ e “Guimbale”), assim como duas implementações distintas da fusão do sensor inercial com o GPS através do filtro de Kalman: a acoplada e a desacoplada.

### **1.5. Estrutura da Dissertação**

**O capítulo 2** apresenta os sensores mais comumente utilizados para localização. O funcionamento e limitações são brevemente explicados para cada sensor apresentado. O robô ambiental híbrido possui os sensores GPS e inercial (INS) para a localização, logo ambos são apresentados em maiores detalhes e têm suas fontes de erros descritas.

**O capítulo 3** introduz o filtro de Kalman, que consiste num filtro probabilístico que leva em consideração a dinâmica do sistema e as observações feitas pelo mesmo para estimar os estados desejados. Explica-se o conceito de uma estimação probabilística e como o sistema precisa ser descrito em espaço de estado para o filtro poder ser aplicado. O equacionamento do filtro para sistemas lineares e não-lineares é apresentado, assim como o método de linearização por expansão da série de Taylor e o erro resultante da aplicação do mesmo.

**O capítulo 4** apresenta o equacionamento necessário para a fusão do sensor inercial com o GPS. Primeiramente, escolhe-se o modelo da Terra sobre o qual a

fusão será realizada, descrevendo-se, em seguida, os diversos sistemas de coordenadas necessários para o mesmo. A navegação inercial é então equacionada de forma que os resultados do sensor inercial sejam comparáveis com os do GPS. Os erros do sensor inercial são então propagados para a solução de navegação.

**No capítulo 5**, se define o vetor de estados a ser estimado pelo filtro de Kalman através das observações de ambos os sensores e, por conseguinte, determinam-se também as matrizes de observação, dinâmica, entrada e ruídos.

**O capítulo 6** descreve as simulações realizadas visando a validação da teoria proposta e o resultado alcançado com as mesmas.

**No capítulo 7**, o experimento da fusão de um sensor inercial com um GPS através de um filtro de Kalman e são apresentados.

E, finalmente, o **capítulo 8** conclui sobre os resultados observados e propõe trabalhos futuros.

## 2 Sensores

A capacidade e a forma de interagir com o mundo dependem de como ele é percebido. Os sensores provêm o robô com a capacidade de perceber o mundo, logo a utilização dos mesmos é de grande importância na construção de um sistema autônomo.

Existem diversos tipos de sensores que são utilizados na robótica móvel. O foco deste capítulo será naqueles mais comumente utilizados para resolver problemas de localização, comuns a todos os robôs autônomos móveis. Dentre os sensores abordados, apenas o sensor inercial e o GPS serão apresentados em maiores detalhes. Com relação aos outros sensores abordados, um maior detalhamento é encontrado em (SIEGWART e NOURBAKHSI et. al., 2004) e (EVERETT e PETERS et. al., 1995).

### 2.1. Erro

Os sensores medem quantidades físicas, e seu erro é dado pela diferença entre o valor medido e o valor real.

$$V_m = V_r + e \quad (1)$$

onde:

$V_m$  – valor medido.

$V_r$  – valor real.

$e$  – erro.

O erro limita a precisão e a acurácia do resultado de uma medida. Este pode ser classificado em dois tipos distintos: o erro aleatório e o sistemático. O erro aleatório é aquele que possui uma flutuação temporal, sendo este imprevisível, enquanto o sistemático é constante ou proporcional ao valor real, podendo ser

predito. Quando a causa de um erro sistemático for identificável, o mesmo pode ser eliminado. Este procedimento é chamado de calibração do sensor.

O erro dos sensores é um dos limitantes das soluções de navegação, e reduz a capacidade de autonomia de um sistema robótico. A compreensão das diversas fontes de erro presentes em uma medida e sua devida modelagem permitem soluções de navegação mais robustas e construção de filtros para redução dos mesmos. Os tipos mais comuns de erros presentes em sensores, e como estes alteram a relação entre a entrada e saída, estão representados na Fig. 6.

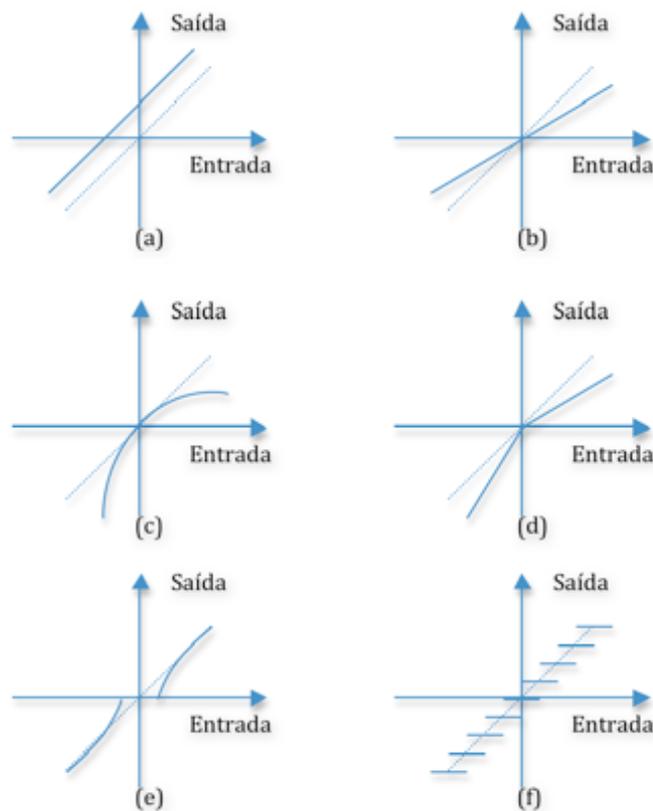


Figura 6 – Erros comuns entre entrada e saída: (a) bias; (b) fator de escala; (c) não-linearidade; (d) assimetria; (e) zona morta; (f) quantização.

## 2.2. Sensores Proprioceptivos

Sensores proprioceptivos são aqueles que medem os parâmetros internos ao sistema. A vantagem deste tipo de sensor é de não depender do meio ambiente para suas medidas, o que as torna mais robustas. Os sensores utilizados na

robótica móvel que se enquadram nesta categoria são os odômetros e os sensores inerciais, os quais são detalhados a seguir.

### **2.2.1. Odômetros**

Robôs móveis em geral utilizam atuadores rotativos para se locomoverem. Em conjunto com as equações cinemáticas do sistema, é possível inferir o deslocamento no ambiente a partir do deslocamento angular dos motores ao longo do tempo. Os dispositivos mais utilizados na robótica que medem posição e velocidade angular de um motor são os *resolvers* e os *encoders* óticos. Esses sensores podem também ser usados para inferir velocidades. Os *encoders* óticos possuem uma acurácia mais alta que o resolver e são de mais simples implementação, enquanto os *resolvers* são mais robustos e duráveis. As equações e os princípios de funcionamento podem ser vistos em (BARNET et. al., 2007).

### **2.2.2. Sensores Inerciais**

Os sensores inerciais são constituídos de girômetros e acelerômetros. O girômetro mede a velocidade angular em relação a um referencial inercial e o acelerômetro a aceleração. Isto permite, através de cálculos integrais, definir a posição, velocidade e orientação do veículo, sem depender de parâmetros externos ao sistema. Em (DUDEK e JENKIN et. al., 2008; GREWAL, WEILL e WILEY et. al., 2007) são fornecidas informações complementares às apresentadas a seguir sobre os acelerômetros, girômetros e os sensores inerciais. Um sistema inercial pode possuir giroscópios, o qual é um subsistema inercial baseado em um dispositivo girômetro, que emprega circuitos eletrônicos para integrar o sinal de velocidade angular (medido através do girômetro) e determinar o ângulo de atitude no eixo correspondente.

Os sensores inerciais possuem duas implementações distintas: *Guimbale*, onde os girômetros e acelerômetros estão dentro de um suporte de anéis ortogonais uns aos outros que possuem a liberdade de girar, Fig. 7; ou *Strapdown*, onde 3 girômetros e 3 acelerômetros são montados ortogonalmente sob um bloco fixo, vide Fig. 8

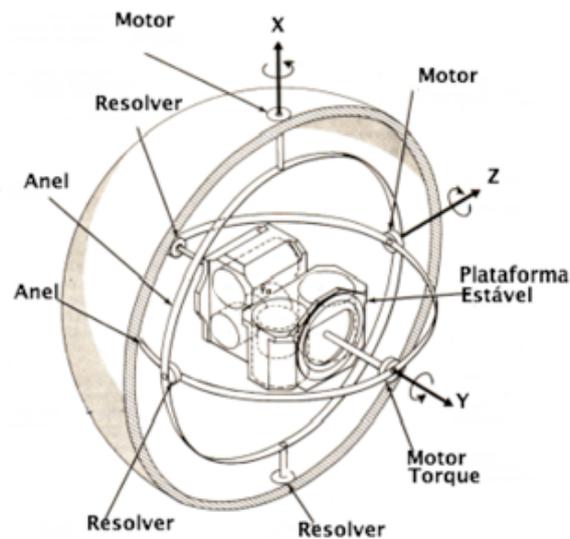


Figura 7 – Sensor inercial Guimbale (BOSE, et. al., 1982)

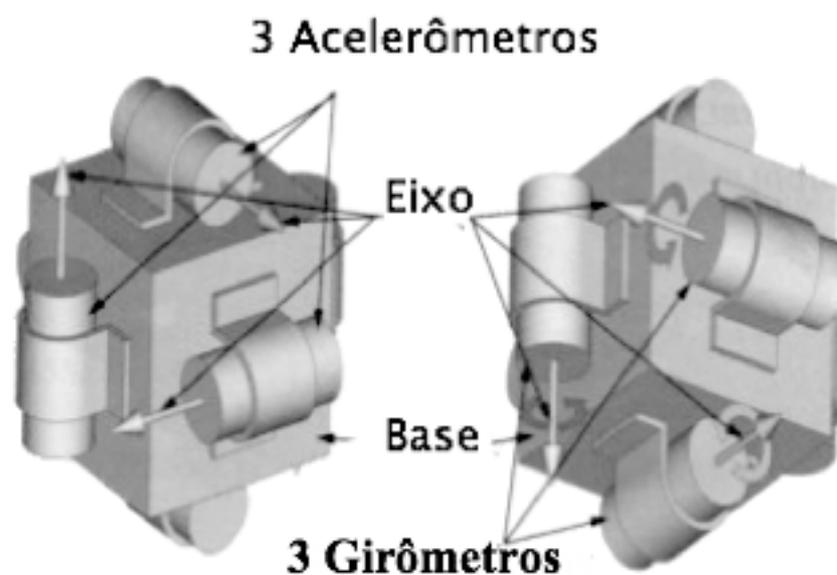


Figura 8 – Sensor inercial Strapdown (BOSE, et. al., 1982)

A principal diferença entre essas implementações consiste no fato de, na *Guimbale*, o sensor inercial estar desacoplado da rotação do veículo, enquanto no *Strapdown* não. O desacoplamento em relação à rotação isola o sensor de altas taxas de variações angulares, permitindo assim maior precisão. Entretanto, esse isolamento vem a um custo de uma mecânica mais complexa, que acrescenta custo, peso e tamanho ao sensor.

Os acelerômetros presentes nos sensores inerciais são comumente sistemas MEMS (micro sistemas eletromecânicos), constituídos de massa-viga engastada ou massa – mola – amortecedor, ou piezoelétricos (Fig. 9). Uma característica importante a ser considerada ao se trabalhar com acelerômetros é sua saída possuir um deslocamento de origem devido à gravidade local, ou seja, um acelerômetro possuirá uma saída de 1G na vertical quando estacionário.

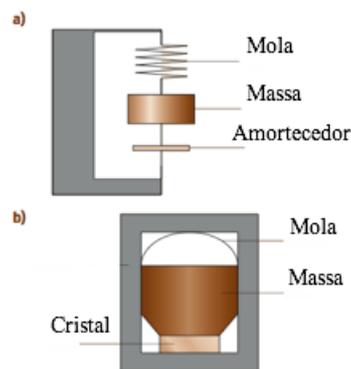


Figura 9 – (a) Acelerômetro Mecânico. (b) Piezoelétrico. (DUDEK; JENKIN, et. al., 2008)

Os girômetros podem ser mecânicos, ópticos ou por efeito de Coriolis. Os ópticos são mais modernos, possuindo duas implementações distintas, a “Ring Laser” ou a Fibra Óptica, representadas nas Fig. 10 e Fig. 11, respectivamente. Os por fibra óptica possuem um menor custo e maior robustez, entretanto apresentam uma menor precisão que os por “Ring Laser”. O princípio de funcionamento dos giroscópios ópticos é: dado um caminho fechado, dois feixes de luz que saiam do mesmo ponto ao mesmo instante retornarão em tempos distintos ao ponto que saíram, caso haja uma rotação do percurso fechado. Combinando ambos os feixes de laser em um detector um padrão de interferência será formado, o qual dependerá da velocidade angular. No “Ring Laser”, este caminho fechado é constituído por espelhos que refletem o raio de luz, enquanto no por fibra óptica o caminho é a fibra óptica enrolada. As principais vantagens dos giroscópios ópticos sobre os mecânicos decorrem daqueles possuírem um menor ruído, insensibilidade às acelerações e velocidades lineares, insensitividade à vibração, e não requererem uma massa balanceada girando.

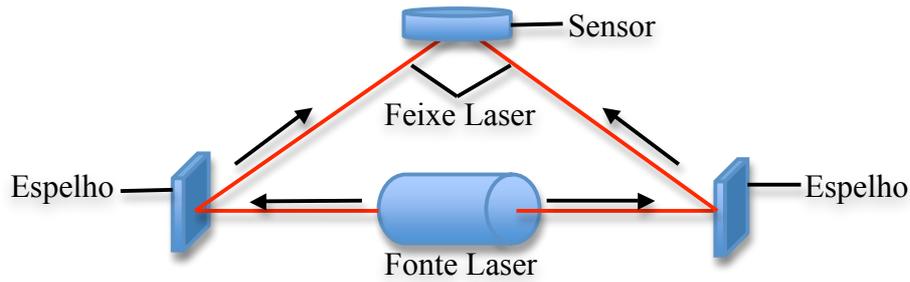


Figura 10 – Girômetro “Ring Laser”

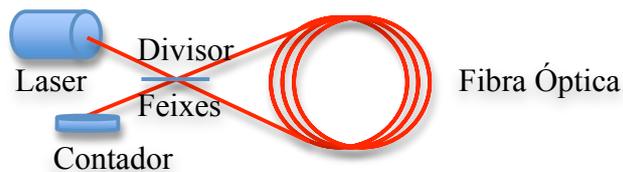


Figura 11 – Girômetro de fibra óptica

Os girômetros mecânicos são constituídos de uma massa balanceada girando, a qual é isolada do movimento angular do veículo através de anéis, vide Fig. 12. Uma massa girando vai resistir a qualquer mudança em seu vetor de momento angular com relação ao seu espaço inercial, logo a mudança na posição dos anéis medirá a velocidade angular.



Figura 12 – Girômetro Mecânico.

Os girômetros por efeito de Coriolis são constituídos de uma massa que está vibrando na direção radial de um sistema em rotação, vide Fig. 13. Devido a força de Coriolis no sentido perpendicular a vibração original, uma nova vibração surgirá nesta direção. Cujas amplitude é função da velocidade angular. Estes girômetros são mais imprecisos e baratos que os mecânicos e ópticos.

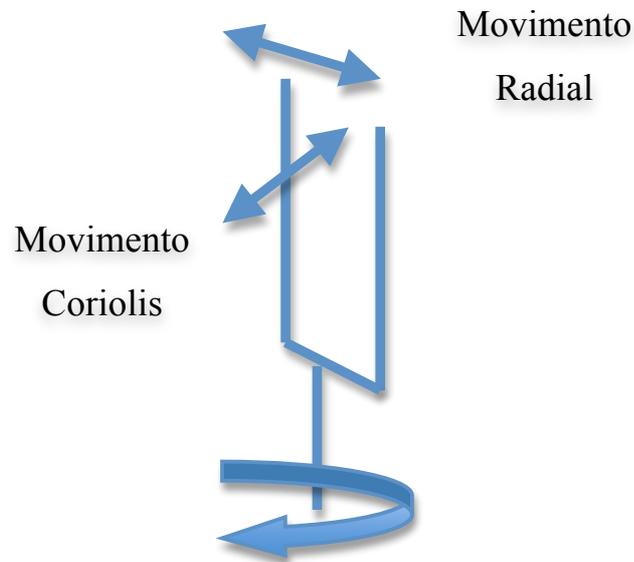


Figura 13 – Girômetro por efeito de Coriolis.

Os erros nos sensores inerciais são provenientes dos acelerômetros e dos girômetros. Considerando que um sensor inercial *Strapdown* possui três conjuntos de acelerômetros e girômetros acoplados em três eixos ortogonais x, y e z, pode-se reescrever a Eq. (1) para um dos eixos. De acordo com (BOSE. et. al., 1982) o termo do erro pode ser expandido como a soma de diversos erros, Eqs. (2) e (3). O resultado obtido para um dos eixos é análogo para os outros dois eixos. Note que as Eqs. (2) e (3) representam apenas um modelo para descrever as fontes de erros dos sensores inerciais. Este modelo não engloba todos os erros de um sensor inercial, nem é válido para todas as aplicações, no entanto fornece uma primeira ferramenta para o estudo do problema.

$$\begin{aligned}
 A_{mx} = & A_{rx} + (b_a + b_{aT}F_a) + b_{ac} + b_{aw} + b_{VIB}|V| + \frac{1}{2}\Delta S_a|A_x| + \\
 & (S_{ax} + S_{aTx})A_x + (S_{ay} + S_{aTy}F_a)C_yA_y + (S_{az} + S_{aTz}F_a)C_zA_z + \\
 & f_{xx}A_x^2 + f_{yy}A_y^2 + f_{zz}A_z^2 + f_{xy}C_yA_xA_y + f_{xz}C_zA_xA_z + f_{yz}C_yC_zA_yA_z + \\
 & W_x\omega_x + W_y\omega_y + W_z\omega_z + W_{Dx}\dot{\omega}_x + W_{Dy}\dot{\omega}_y + W_{Dz}\dot{\omega}_z
 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
\omega_{m,x} = & \omega_{r,x} + (b + b_T F_a) + \frac{1}{2} \Delta S_g |\omega_x| + b_c + b_w + b_{VIB} |V| \\
& + (S_x + S_{T_x}) \omega_x + (S_y + S_{T_y}) C_y \omega_y + (S_z + S_{T_z}) C_z \omega_z + \\
& D_{xx} \omega_x^2 + D_{yy} C_y \omega_y^2 + D_{zz} C_z \omega_z^2 + D_{xy} C_y \omega_x \omega_y + D_{xz} C_z \omega_x \omega_z + \\
& D_{yz} C_y C_z \omega_y \omega_z + (h_x + h_{T_x} F_g) A_x + (h_y + h_{T_y} F_g) A_y + \\
& (h_z + h_{T_z} F_g) A_z + k_{xx} A_x^2 + k_{yy} A_y^2 + k_{zz} A_z^2 + k_{xy} A_x A_y + \\
& k_{xz} A_x A_z + k_{yz} A_y A_z
\end{aligned} \tag{3}$$

na qual:

Na qual subscritos x,y, z indicam o eixo;

os subscritos m e r indicam o valor medido e real, respectivamente ;

os subscrito a indica que é uma variável do acelerômetro;

A – aceleração;

$\omega$  – velocidade angular;

b – bias;

$b_T$  – bias termal;

$b_c$  – ruído correlacionado;

$b_w$  – ruído branco;

$b_{VIB}$  – sensibilidade a vibração;

F – função térmica;

V – velocidade;

$\Delta S$  – assimetria do fator de escala;

S – fator de escala linear;

$S_T$  – fator de escala térmico;

f, D – fator de escala quadrático;

C – coeficiente de acoplamento cruzado entre o eixo medido e o subscrito;

h – sensibilidade a aceleração;

$h_T$  – sensibilidade térmica a aceleração;

k – sensibilidade ao quadrado da aceleração;

W – sensibilidade à velocidade angular; e

$W_D$  – sensibilidade à aceleração angular.

E nas quais define-se:

**Bias:** saída medida pelo sensor quando a entrada é nula. O bias é dividido em duas componentes: um bias puro e um bias térmico, que representa a sensibilidade do sensor com a temperatura.

**Vibração:** o sensor inercial é sensível à vibração: quanto maior a vibração, maior o erro do sensor. Em muitos sistemas dinâmicos ele é uma função da velocidade do sistema, logo o termo aparece multiplicado pela velocidade total do sistema.

**Fator de Escala:** incrementos iguais na entrada não geram incrementos iguais na saída, essa incerteza na linearidade da saída do sensor é modelada pelo fator de escala. Esta causa de erro só existe quando a entrada do sensor é não nula e cresce à medida que cresce o valor da entrada, logo o fator de escala aparece multiplicado pela entrada do sistema.

**Fator de Escala Térmico:** o fator de escala de um sensor não é um parâmetro constante, sofrendo alterações durante a operação do sistema. Parte da variação do fator de escala é causada por sensibilidade à temperatura e modelada pelo acréscimo do fator de escala térmico. Por este termo ser em geral pequeno, só estará presente no fator de escala linear, sendo descartado no termo quadrático.

**Assimetria:** é causada pela desigualdade das saídas positivas e negativas do sensor. Este erro é modelado como um parâmetro multiplicando o módulo da entrada do sistema.

**Não-Ortogonalidade:** é modelada pelo fator de escala linear e quadrático dos eixos multiplicado pelas suas respectivas saídas e pelo parâmetro de acoplamento cruzado.

**Aceleração Centrípeta:** necessária ao movimento angular, logo o erro da aceleração depende das velocidades e acelerações angulares.

**Elasticidade:** o erro do valor medido pelo giroscópio depende das acelerações, pois a diferença de elasticidade em duas direções distintas cria um braço de alavanca, sobre o qual o vetor aceleração pode criar um torque, gerando assim um deslizamento.

A qualidade de um sensor inercial pode ser classificada a partir do valor de suas fontes de erros. (BOSE. et. al., 1982) fornece às tabelas 1 e 2 para a partir das principais fontes de erro se classificar o acelerômetros e o girômetros como senso de qualidade baixa, média ou alta.

**Tabela 1– Erro do Acelerômetro. (BOSE. et. al., 1982)**

| Fonte                | Unidade                          | Baixa | Média | Alta  |
|----------------------|----------------------------------|-------|-------|-------|
| Bias                 | $\mu\text{g}$                    | 500   | 100   | 50    |
| Fator de Escala      | %                                | 0.2   | 0.04  | 0.01  |
| Assimetria           | %                                | 0.05  | 0.01  | 0.005 |
| Não-Ortogonalidade   | SEC                              | 100   | 20    | 10    |
| Ruído Correlacionado | $\mu\text{g @ C.T}$              | 10@20 | 3@20  | 1@20  |
| Ruído Branco         | $\mu\text{g} / \sqrt{\text{Hz}}$ | 30    | 10    | 5     |
| Tendência            | $\mu\text{g} / \text{Day}$       | 5     | 2     | 1     |

**Tabela 2 – Erro do Girômetro. (BOSE. et. al., 1982)**

| Fonte                | Unidade                                | Baixa    | Média   | Alta     |
|----------------------|--|----------|---------|----------|
| Bias                 | $^{\circ}/\text{Hr}$                   | 1        | 0.1     | 0.01     |
| Fator de Escala      | %                                      | 0.1      | 0.02    | 0.005    |
| Assimetria           | %                                      | 0.01     | 0.002   | 0.0005   |
| Massa Desbalanceada  | $^{\circ}/\text{Hr}/\text{g}$          | 0.5      | 0.1     | 0.02     |
| Não-Ortogonalidade   | SEC                                    | 100      | 20      | 10       |
| Ruído Correlacionado | $^{\circ}/\text{Hr@ C.T}$              | 0.03@200 | 0.01@20 | 0.02@020 |
| Ruído Branco         | $^{\circ}/\text{Hr}/ \sqrt{\text{Hz}}$ | 0.2      | 0.1     | 0.05     |
| Tendência            | $^{\circ}/\text{Hr}/ \text{Day}$       | 0.01     | 0.02    | 0.0005   |

### 2.3. Sensores *Exteroceptivos*

Sensores caracterizados como *exteroceptivos* são aqueles que adquirem informação a partir da energia vinda do meio. Existem dois princípios distintos de energias que são utilizadas: a eletromagnética e a acústica. Os sensores *exteroceptivos* são agrupados como ativos ou passivos dependendo se emitem, ou não, essas energias no ambiente onde seu sensoriamento é realizado.

Os sensores ativos emitem energia no ambiente e obtêm medidas de distância e velocidade relativa a partir da reação a esta energia. As técnicas mais comumente utilizadas de medição de distâncias são por tempo de voo, por diferença de fase, modulação de frequência, ou por triangulação, e no caso de velocidade relativa utiliza-se o efeito Doppler. Os principais sensores de energia ativa na robótica móvel são os *LIDARs*, os sonares, os radares de milímetro, e os sistemas de satélite para navegação global (GNSS). As técnicas de medição e os sensores são apresentados em detalhes a seguir.

### 2.3.1. Energia Acústica

O som é uma vibração mecânica que viaja por um meio elástico como uma onda longitudinal. Logo, as características das ondas sonoras são influenciadas pelo meio de propagação. (EVERETT e PETERS et. al., 1995) descreve a velocidade para meios gasosos e líquidos pela Eq. (4).

$$s = \sqrt{\frac{C}{\rho}} \quad (4)$$

Na qual:

- s – velocidade de propagação da onda;
- C – coeficiente de elasticidade do meio; e
- $\rho$  – densidade do meio.

Em sensores ativos, a medida depende da energia sonora refletida pelo meio em direção ao sensor. A energia percebida é apenas parte daquela emitida pelo sensor, pois a potência do sinal sonoro decresce com o aumento da distância devido à sua dispersão em cone, à absorção de parte da energia pelo meio, e à dispersão gerada pela reflexão da energia. Por depender da reflexão da energia pelo meio, os sensores baseados em energia acústica estão suscetíveis a diversas causas de erros, sendo as principais:

- Reflexão Especular – onde a energia refletida não retorna ao sensor;
- *Cross Talk* – onde a energia recebida não foi aquela emitida pelo sensor; e
- Eco Fantasma – onde a energia recebida foi refletida mais de uma vez.

Outro aspecto importante a ser considerado ao se utilizar sensores baseados em energia acústica é a divergência da onda sonora. Como pode ser observado na Fig. 14, o sensor não é capaz de detectar a fenda, pois a largura da onda sonora, quando esta alcança a fenda, é muito grande. Além da não detecção, a divergência pode fazer com que superfícies sejam detectadas mais próximas do que realmente estão, como mostra Fig. 15, onde parte da onda sonora é refletida por um objeto inclinado, fazendo com que a distância medida seja menor do que a real. O controle da largura da onda sonora é feito alterando o diâmetro do transdutor e a frequência de operação. Frequências mais altas geram ondas mais estreitas, entretanto sofrem de maior atenuação do sinal quando operando no ar, reduzindo assim seu alcance.

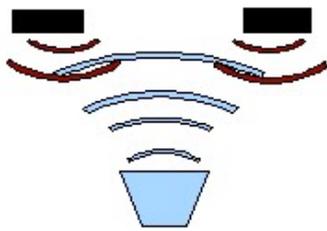


Figura 14 – A não detecção de uma fenda devido à divergência da onda sonora.

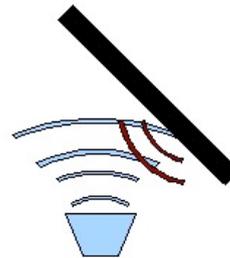


Figura 15 – Detecção do ambiente mais próximo do que este realmente se encontra.

### 2.3.2. Energia Eletromagnética

A energia eletromagnética é uma onda elétrica e magnética que se auto-propaga, logo não necessita de um meio de propagação. O meio em si atrapalha a propagação, reduzindo a sua velocidade. No ar, ela assume a velocidade próxima à da luz no vácuo. A energia eletromagnética é classificada de acordo com seu comprimento de onda vide, Fig. 16.

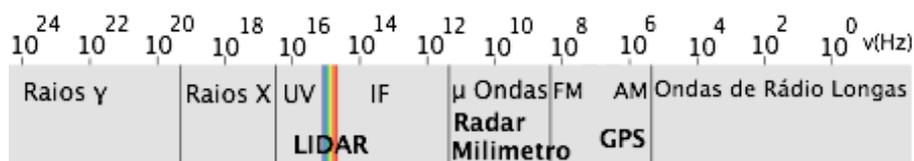


Figura 16 – Espectro da energia eletromagnética

A escolha da frequência de operação depende da aplicação e do meio onde o sensor precisará funcionar. Quanto mais alta a frequência, menor o comprimento de onda, permitindo resoluções mais altas. Entretanto, ficarão mais suscetíveis a atenuações atmosféricas, o que diminui o alcance e incapacita o sensor de operar em condições muito adversas, como em uma nuvem de poeira ou neblina. As frequências mais baixas estão mais susceptíveis à reflexão especular, onde a energia não é refletida de volta ao sensor, mas conseguem operar mesmo sobre condições adversas.

A frequência da energia existente no ambiente é outra variável que precisa ser levada em conta, pois ao trabalhar com os sensores ativos em uma frequência muito próxima a uma existente no ambiente, o sensor pode detectar a reflexão da energia vinda do ambiente, o que acarreta em erros. Por exemplo, ao se trabalhar em ambientes externos sob sol intenso, a frequência na faixa do ultravioleta com 0,3 microns de comprimento de onda alcança um desempenho melhor que o infravermelho, pois a primeira frequência é absorvida pela camada de ozônio.

Em (FISHED e KONOLIGE et. at., 2008) encontra-se um maior detalhamento dos principais métodos de medição de distância por energia eletromagnética e o resultado da navegação utilizando os mesmos.

### **2.3.3. Medição por Tempo de Vôo**

A medição por tempo de vôo é realizada enviando pulsos de onda e medindo o tempo que os mesmos demoram a ser refletidos de volta ao sensor. Sabendo a velocidade da onda no meio e aplicando a Eq. (5), (EVERETT e PETERS et. al., 1995), obtém-se a distância ao objeto. Este método de medida permite a utilização de ambos os tipos de energia.

$$d = v \frac{t}{2} \quad (5)$$

Na qual:

- d – distância ao objeto que refletiu a energia;
- v – velocidade de propagação da energia emitida; e
- t – tempo que a energia levou para retornar ao sensor.

Na escolha de qual tipo de energia utilizar, é importante considerar a velocidade da onda, pois no ar o som se propaga com uma velocidade de 0,3 m/ms, enquanto a onda eletromagnética se propaga com uma velocidade de 0,3m/ns, i.e., um milhão de vezes mais rápido. Logo, para distâncias muito pequenas, os sensores eletromagnéticos apresentam imprecisão pela dificuldade de medir um tempo tão pequeno. Em contrapartida, os sensores sonoros possuem uma taxa de atualização baixa para distâncias longas devido ao tempo necessário para a onda ser refletida e retornar ao sensor.

#### **2.3.4. Medição por Diferença de fase**

Na medição por diferença de fase, o sensor transmite continuamente a energia em uma frequência escolhida, obtendo a distância através da diferença entre a fase da onda refletida e da enviada de acordo com (EVERETT e PETERS et. al., 1995)

$$d = \frac{\phi\lambda}{4\pi} \quad (6)$$

Na qual:

d – distância ao objeto que refletiu a energia;

$\phi$  - diferença de fase; e

$\lambda$  - comprimento de onda.

A vantagem deste método é permitir medições de distâncias pequenas com sensores eletromagnéticos, além de medir a velocidade relativa ao objeto que refletiu a energia. Entretanto, como a eletrônica mede na realidade a distância a partir do cosseno da diferença de fase, existirá mais de uma distância que resultará nesta mesma diferença. Mas em geral esta ambiguidade não é encontrada, pois a atenuação do sinal ocorre antes da distância necessária para gerar 360° de diferença de fase.

### 2.3.5. Medição por Variação de Frequência

Na medição por variação de frequência, o sensor envia continuamente uma onda modulada por um sinal triangular periódico que ajusta a frequência transmitida, onde esta é uma função linear do tempo de acordo com (EVERETT e PETERS et. al., 1995).

$$f(t) = f_o + at \quad (7).$$

Na qual:

- a – constante;
- $f_o$  – frequência portadora; e
- t – tempo.

A distância é obtida através da comparação do sinal recebido com aquele que está sendo enviado, de acordo com (EVERETT e PETERS et. al., 1995), Eq. (8). A vantagem deste método é não possuir medições ambíguas.

$$d = \frac{F_b v}{4F_r F_d} \quad (8)$$

Na qual:

- d - distância ao objeto que refletiu a energia;
- v – velocidade da energia no meio;
- $F_b$  – frequência enviada e recebida combinada em um *mixer*;
- $F_r$  – frequência de repetição; e
- $F_d$  – desvio total da frequência.

### 2.3.6. Medição por Triangulação

Medições por triangulações utilizam propriedades geométricas para determinar a distância. Uma energia é emitida no ambiente e, a partir de geometrias conhecidas na configuração do emissor/receptor, a distância é calculada por triangulação.

A triangulação em uma dimensão (1D) calcula a distância através da projeção da energia refletida em um sensor linear, vide Eq. (9) dada por (EVERETT e PETERS et. al., 1995) e Fig 17. O problema com a triangulação 1D reside no fato de a distância ser proporcional ao inverso da posição  $x$  do raio refletido no sensor de posição, logo a resolução do sensor é melhor para objetos mais próximos.

$$d = f \frac{L}{x} \quad (9)$$

Na qual:

$d$  – distância ao objeto que refletiu a energia;

$f$  – frequência da energia;

$L$  – distância entre o emissor e o receptor; e

$x$  – posição do raio refletido no sensor de posição.

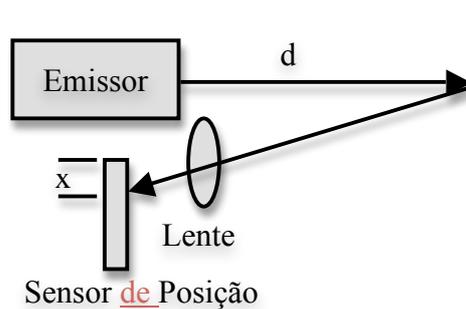


Figura 17 – Triangulação 1D

Na triangulação em duas dimensões, o emissor projeta um padrão conhecido e o receptor - uma câmera - calcula a distância a partir da deformação observada deste padrão no objeto, vide Fig. 18.



Figura 18 – Padrão estruturado de luz para triangulação em 2 dimensões, (RAMAMOORTHY et. al.)

### 2.3.7. Medição por Velocidade Relativa

Sensores de velocidade relativa estimam a velocidade relativa entre dois corpos. Estes sensores são baseados no efeito Doppler onde, para uma frequência  $F_t$  transmitida, a frequência  $F_r$  recebida é uma função da velocidade relativa entre o emissor e o receptor. Quando se mede a velocidade relativa do sensor ao ambiente estático, é preciso acrescentar um fator de dois, pois é preciso considerar o caminho de volta da onda, logo (EVERETT e PETERS et. al., 1995) descreve a velocidade relativa entre o receptor e o transmissor como

$$v = \frac{(F_t - F_r).c}{2F_t \cos\theta} \quad (10)$$

Na qual:

$v$  – velocidade relativa entre o receptor e o transmissor;

$c$  – velocidade da energia emitida no meio;

$F_t$  – frequência transmitida;

$F_r$  – frequência recebida; e

$\theta$  - ângulo relativo entre a direção do movimento e a direção da energia emitida.

### 2.3.8. LIDAR

LIDAR é a sigla em inglês para detector de luz e distância. São sistemas que utilizam a energia eletromagnética em frequências altas para medir a distância ao

ambiente. As frequências utilizadas são tipicamente ultravioleta, visíveis, ou próximas ao infravermelho. O método de medição comumente utilizado nestes dispositivos é por tempo de voo. Os dispositivos por LIDAR em geral são acoplados a um espelho rotatório, possibilitando assim fazer uma varredura do ambiente, vide a Fig. 19.

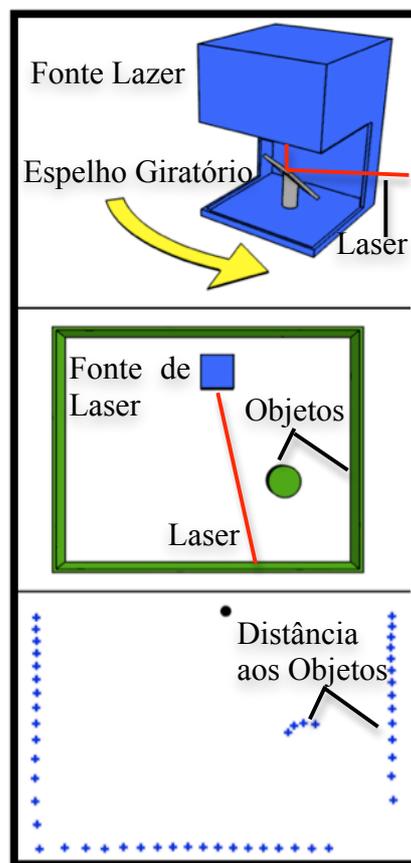


Figura 19 – LIDAR mapeando em duas dimensões.

O sistema LIDAR, por trabalhar com frequências altas, possui uma alta resolução e baixa incidência de reflexões especulares. Entretanto, esta frequência faz com que o alcance seja reduzido, além de não ser capaz de operar em condições atmosféricas adversas como neblina e chuva, e de apresentar mau desempenho em ambientes ensolarados.

### 2.3.9. Sonar

O sonar é uma sigla para navegação e medição de distâncias por som. Na robótica móvel, em geral, trabalha-se com frequências altas de som - o ultra-som - utilizando medições por tempo de voo. Um resultado típico de uma varredura por som pode ser visto na Fig. 20.

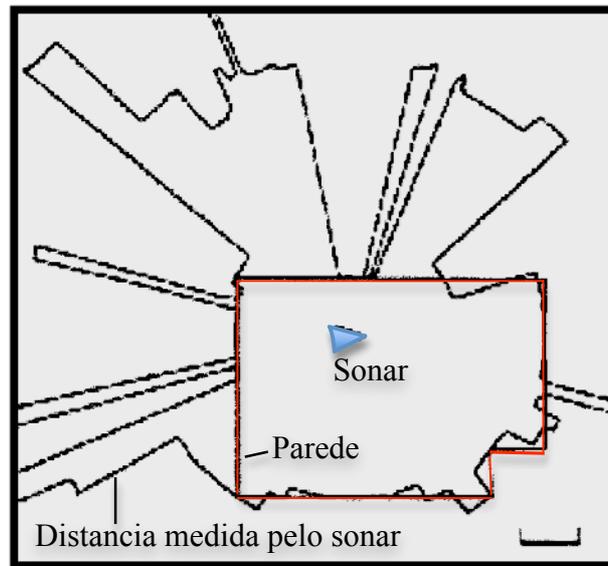


Figura 20 – Resultado de uma varredura utilizando um sonar

A medição por som é mais lenta que por luz devido à velocidade de propagação da onda sonora, além de ocorrerem mais frequentemente ecos fantasmas e reflexões especulares. A vantagem do som é que este funciona igualmente em ambientes internos e externos, com ou sem adversidade atmosférica, além de refletir sobre vidros, que em geral não são enxergados pelos sensores de luz. Entretanto, a varredura do ambiente, quando feito com o sonar, exige em geral mais de um sensor, o que pode resultar em erros de *cross talk*.

### 2.3.10. Radar de Milímetro

Os radares de milímetro utilizados na robótica trabalham, em geral, com modulação de frequência na faixa de 35GHz. São capazes de medir a velocidade relativa entre os alvos e o sensor, e a distância a diversos alvos em profundidade,

uma vez que, dependendo do alvo, parte da energia é refletida, enquanto parte atravessa o alvo. E.g., a energia enviada em direção a um arbusto é em parte refletida pelo arbusto, enquanto parte o atravessa sendo refletida pela parede atrás do arbusto, obtendo-se, assim, a distância a ambos os alvos. Um exemplo da utilização do radar de milímetro no mapeamento do ambiente pode ser visto na Fig. 21.

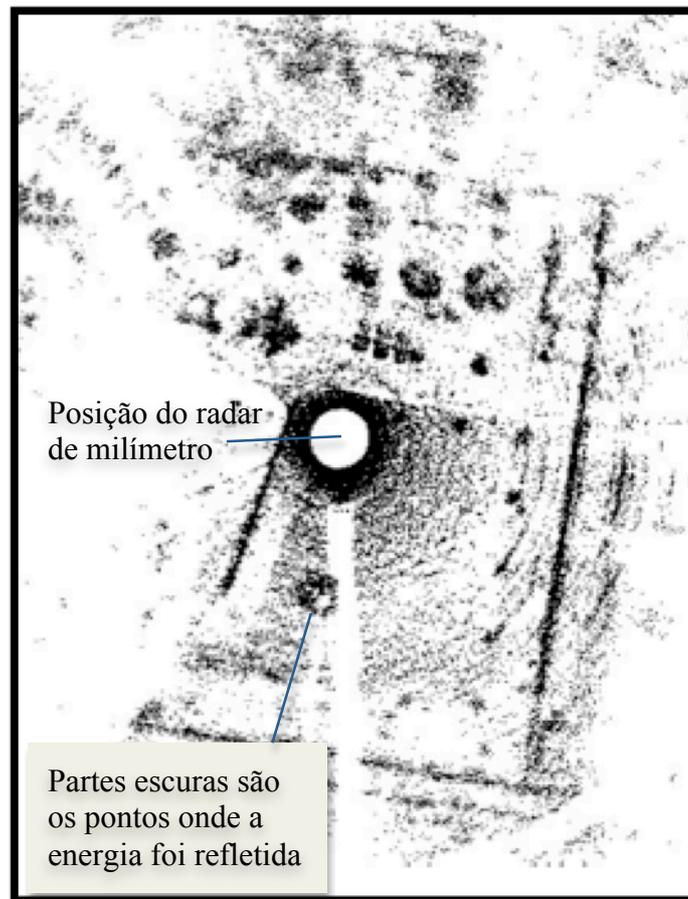


Figura 21– Varredura feita por um radar de milímetro. (SCHEDING; BROOKER; HENNESSY; BISHOP et. al., 2002)

Os radares de milímetro, por operarem em uma frequência mais baixa que os *LIDARs*, apresentam uma menor resolução e uma maior incidência de reflexões especulares. Possuem também um tamanho e custo maior que os sistemas *LIDAR* e os sonares. A vantagem consiste em funcionarem em ambientes ensolarados e sob condições atmosféricas adversas. Possuem um alcance longo, além da medição de distância em profundidade. Os trabalhos de (SCHEDING, BROOKER, HENNESSY, BISHOP E MACLEAN et. at., 2002; FOESSEL,

CHHEDA E APOSTOLOPOULOS et. at., 1999) apresentam resultados do funcionamento do radar de milímetro em ambientes adversos, bem como da percepção de longo alcance e com profundidade.

### **2.3.11. Bússolas**

Os sensores caracterizados como bússolas são aqueles capazes de medir a direção de um campo magnético. Em geral, são utilizados na robótica para obter a direção do robô através da medição do campo magnético da Terra, o qual flui paralelamente à sua superfície, do pólo magnético sul para o norte. As bússolas eletrônicas comumente utilizadas são as magnetoresistivas, onde a resistência varia com o campo magnético aplicado.

Na robótica móvel, o robô não está confinado a um plano horizontal na superfície da Terra, logo é necessário utilizar três bússolas montadas ortogonalmente, uma à outra, para se obter a leitura do campo magnético terrestre. A partir da orientação que os eixos das bússolas se encontram com relação à superfície da Terra, é possível girar os sistemas de coordenadas usados na medições para encontrar a direção do norte magnético.

Erros nas medidas são causados principalmente por elementos ferrosos próximos à bússola, que distorcem o campo magnético da Terra. O ferro duro, material ferroso que mantém o direcionamento de um campo magnético após este ter sido retirado, adiciona um campo magnético constante, modelado como um bias ao campo magnético da Terra. O ferro mole, material ferroso que volta ao alinhamento aleatório após o campo magnético ter sido retirado, gera um campo magnético variável, modelado como um fator de escala. Existe também o erro devido às interferências magnéticas, geradas por outros equipamentos, e devido ao ruído do sensor, ambos aleatório por natureza. Na robótica móvel, a medição do campo magnético com relação à horizontal depende de uma transformação de coordenadas, logo estará sujeito a erros gerado pelo sensor de orientação que determina a orientação dos eixos das bússolas em relação à horizontal.

### **2.3.12. Sensores Baseados em Visão**

Os sensores baseados em visão adquirem informações do meio através da energia eletromagnética emitida ou refletida pelos corpos no espectro visível, produzindo uma imagem digital do que foi observado. A partir de uma imagem ou seqüência de imagens capturadas por um ou mais sensores de visão, podem-se reconhecer formas e cores, identificar pessoas, medir distâncias e velocidades. A visão computacional é o campo que trata de obter informação de imagens adquiridas com sensores.

Existem duas tecnologias predominantes e distintas para os sensores de visão, a CCD e a CMOS. Comparativamente, a CCD fornece imagens de maior qualidade e menor ruído, possuindo uma maior sensibilidade à luz. Enquanto a CMOS possui um tamanho e custo menor, além de consumir cem vezes menos energia.

### **2.3.13. Sistema de Satélites para Navegação Global**

Um sistema GNSS é um conjunto de satélites, cada qual com seu relógio atômico sincronizado com os outros satélites. Cada satélite transmite continuamente por ondas de rádio uma mensagem de navegação o tempo de seu relógio atômico, sua posição na órbita e um código único de identificação (parâmetros necessários para o cálculo da posição de um corpo no espaço).

A mensagem de navegação é espalhada em uma frequência portadora por um código de espalhamento de espectro. Sendo o sinal uma onda eletromagnética, este viaja na velocidade da luz no espaço e um pouco mais devagar na atmosfera. A posição do satélite é determinada a partir da mensagem transmitida pelo mesmo. O tempo que o sinal demora a chegar ao receptor é determinado através da comparação do código de espalhamento recebido com uma cópia do mesmo gerado no receptor. A velocidade de propagação vezes o tempo é a pseudo-distância do receptor ao satélite. De acordo com (BLEWITT, et. at. 1997) calculam-se a posição do receptor e sua velocidade através das Eqs. (11) e (12) respectivamente:

$$(\rho_r - C_b)^2 = (x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2 \quad (11)$$

$$(\dot{\rho}_r - \dot{C}_b)(\rho_r - C_b) = (\dot{x} - \dot{X})(x - X) + (\dot{y} - \dot{Y})(y - Y) + (\dot{z} - \dot{Z})(z - Z) \quad (12)$$

Na qual:

$\rho_r$  – pseudo-distância do receptor ao satélite;

$x, y, z$  – coordenadas de posição do satélite;

$X, Y, Z$  – coordenadas de posição do usuário;

$C_b$  – Bias do relógio (correção da defasagem de tempo entre o relógio do receptor e do satélite);

$\dot{\rho}_r$  – velocidade relativa entre o usuário e o satélite, estimado pela diferença na frequência entre o sinal transmitido e o recebido (efeito Doppler);

$\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  – velocidade do satélite; e

$\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}$  – velocidade do usuário.

Para resolver o sistema de equações, é necessário o sinal de quatro satélites, determinando assim as variáveis de posição  $X, Y, Z$  e  $C_b$  do receptor. A existência da variável  $C_b$  se dá pelo fato de o relógio presente no receptor ser impreciso, quando comparado aos relógios atômicos presentes nos satélites transmissores. Logo, a hora marcada pelo mesmo precisa ser corrigida por este termo, sincronizando-o assim com o horário marcado pelos satélites.

Existem diferentes sistemas de GNSS, como pode ser visto na Tab. 1. Esta dissertação irá tratar apenas do GPS, detalhado a seguir.

**Tabela 1 – Sistemas de GNSS existentes**

| GNSS    | País           | Status                   |
|---------|----------------|--------------------------|
| GPS     | Estados Unidos | Operacional              |
| Glonass | Rússia         | Parcialmente Operacional |
| Galileo | União Européia | 2010                     |

|       |       |      |
|-------|-------|------|
| IRNSS | Índia | 2012 |
|-------|-------|------|

## 2.4. GPS

O GPS é constituído por uma constelação de 24 ou mais satélites ativos, os quais se encontram em 6 órbitas circulares, com quatro ou mais satélites cada. Essa configuração permite que três ou mais satélites estejam sempre visíveis em praticamente qualquer ponto da superfície do planeta, possibilitando assim determinar a posição geo-referenciada 24 horas por dia, vide Fig. 22. Maiores informações sobre as órbitas e sobre o funcionamento do sistema GPS podem ser encontradas em (GREWAL, WEILL AND WILEY et. at., 2007).

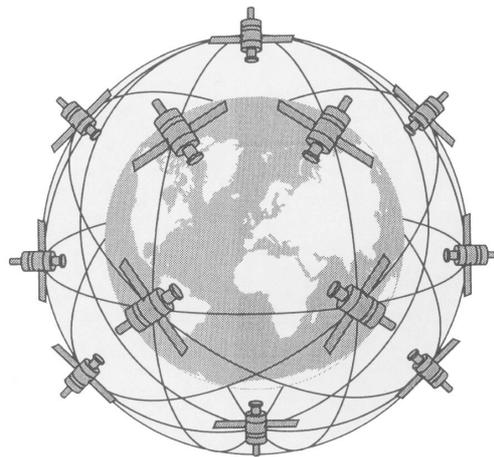


Figura 22 - Constelação de Satélites. (Brock University Map Library)

Os satélites do sistema GPS são continuamente monitorados por estações em terra e diariamente atualizados. As atualizações sincronizam os relógios atômicos dos satélites com base em um relógio atômico referencial em terra, mantendo assim a diferença de tempo entre satélites em menos de alguns nanosegundos. A informação *ephemeris* do modelo de órbita de cada satélite também é atualizada diariamente, onde estas informações são estimativas geradas por um filtro de Kalman, o qual utiliza como entrada a informação de diversas estações terrestres de rastreamento, assim como informações sobre o clima, entre outros parâmetros.

Todos os satélites transmitem simultaneamente nas frequências 1575,42 e 1227,60 MHz, respectivamente chamadas de L1 e L2. A mensagem de navegação, que pode ser vista em maiores detalhes no Apêndice A, é transmitida utilizando dois códigos de espalhamento de espectro: o código C/A e o P. A transmissão está representada na Fig. 23.

O código P pode ser criptografado pelo código Y, produzindo o código P(Y), o que mantém o seu uso limitado aos militares norte-americanos. A frequência L1 possui ambos os códigos e a L2 possui apenas o código P. Cada satélite possui seus códigos C/A e P únicos, possibilitando que todos os satélites transmitam na mesma frequência sem interferir um em outro.

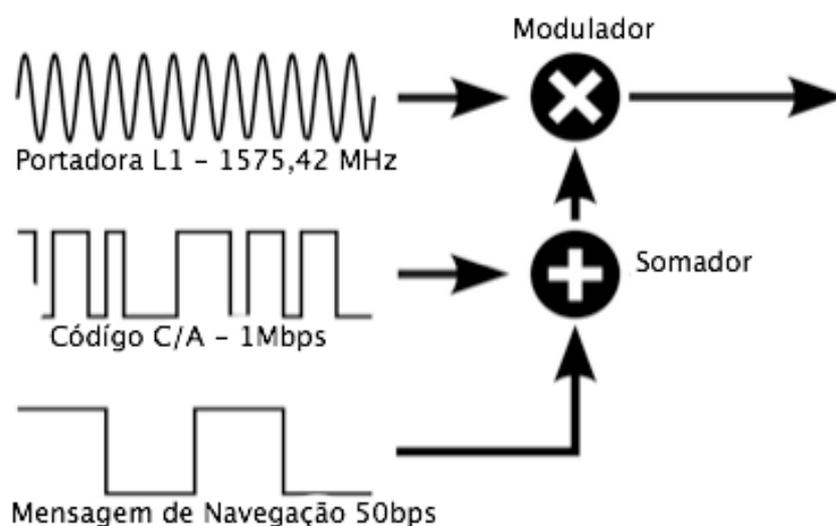


Figura 23 – Transmissão da Mensagem de Navegação com espalhamento C/A na L1.

#### 2.4.1. Receptores

Existem diversas marcas e modelos de receptores de sinal de GPS. Os receptores geralmente são classificados por seus números de canais, o que indica o número de satélites que é capaz de monitorar simultaneamente, e se são de alta sensibilidade ou não, ou seja, qual a sua capacidade de perceber o sinal de GPS mesmo quando este está fraco.

Os receptores de melhor desempenho são aqueles de alta sensibilidade e de mais de cinco canais, pois a estimativa da posição é mais precisa quando se

utilizam mais de quatro satélites. Logo, com apenas quatro dentre os canais é possível rastrear o sinal dos quatro satélites simultaneamente, e os canais sobressalentes podem ser utilizados para rastrear os outros satélites visíveis ao receptor. Além de permitir que o receptor comute os satélites utilizados no cálculo da posição e da velocidade, sem perda de desempenho.

Outra característica importante em um receptor é a capacidade de utilizar a frequência L2. Apesar de a mensagem de navegação estar criptografada, o que inviabiliza seu uso para usuários não autorizados, ainda é possível recuperar a fase da frequência portadora, o que permite uma melhor correção do erro gerado pela ionosfera.

#### **2.4.2. Erro**

A estimativa da posição através do sinal do GPS está sujeita a erros. Os erros podem ser provenientes do equipamento do usuário, de informações imprecisas transmitidas pelo satélite, assim como da propagação do sinal em si. As diversas causas de erro estão detalhadas a seguir. O modelo utilizado por (BOSE et. al., 1982) para o erro da pseudo-distância medida entre o satélite e o receptor é dada pela Eq. (14).

$$\rho_m = \rho_r + c(\delta T + \delta I + \delta R + \delta C + \delta M) + b_w \quad (14)$$

na qual:

- $\rho_m$  – pseudo-distância medida;
- $\rho_r$  – pseudo-distância real;
- $\delta T$  – atraso devido à troposfera;
- $\delta I$  – atraso devido à ionosfera;
- $\delta R$  – atraso devido à comparação do sinal;
- $\delta M$  – atraso devido a múltiplos caminhos;
- $c$  – velocidade da luz; e
- $b_w$  – ruído branco.

### 2.4.3. Disponibilidade Seletiva (SA)

Até maio de 2000 a disponibilidade seletiva era um mecanismo adotado pelo departamento de defesa dos Estados Unidos, que degradava a acurácia que usuários comuns conseguiriam obter na estimação da posição utilizando o sinal do GPS. Essa degradação era realizada através da transmissão errônea da posição e do bias do relógio do satélite. Atualmente este mecanismo se encontra desligado, mas pode voltar a funcionar se assim for decidido pelo governo dos EUA.

### 2.4.4. Ionosfera

A ionosfera possui nuvens de elétrons livres, gerados por gases ionizados pelo sol, que agem como um meio dispersivo, onde a velocidade de propagação do sinal do GPS é uma função da frequência do mesmo, vide fig. 24. A medida de posição de um receptor depende da velocidade estimada de propagação do sinal de GPS, logo sua alteração levará a erros. O problema em estimar a alteração na velocidade é que a camada de elétrons livres não é espacialmente homogênea, variando com a atividade solar.

Os satélites enviam modelos da ionosfera em sua mensagem de navegação, permitindo a redução do erro em 50%, em média. Receptores com capacidade de detectar ambas as frequências L1 e L2 são capazes de remover a maior parte desses erros, considerando o fato de a velocidade de propagação na ionosfera depender da frequência.

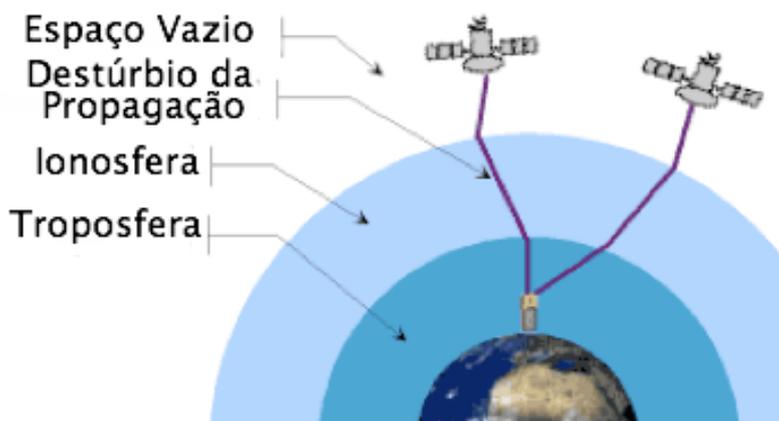


Figura 24 – Erro do GPS devido a Troposfera e Ionosfera.

#### **2.4.5. Troposfera**

A troposfera é composta por gases e vapor d'água, o que aumenta o percurso de propagação do sinal de GPS devido à refração, vide fig. 24. As características da troposfera são locais e sofrem alterações mais velozes. Modelos precisos para a refração necessitariam de informações de pressão, umidade e temperatura da atmosfera ao longo do caminho do sinal do GPS, informações essas em geral inviáveis de se obter. A maioria dos receptores utiliza modelos para atmosfera seca para uma correção deste erro.

#### **2.4.6. Múltiplos Caminhos**

O sinal do GPS pode refletir na superfície de estruturas, como em um prédio, vide Fig. 25 A reflexão gera múltiplos caminhos possíveis entre o satélite e o receptor. A estimativa de posição considera sempre que o sinal do GPS seguiu um caminho direto entre o satélite e o receptor, logo quando o receptor recebe um sinal refletido ao invés do direto a estimativa da distância se torna maior do que realmente é.

Existem diferentes técnicas e métodos para a redução do erro gerado por múltiplos caminhos como, e.g., utilizar um formato da antena que minimize o sinal recebido por baixo, reduzindo o erro causado por sinais refletidos pelo solo. Esse problema afeta os receptores estáticos e móveis de maneiras bem distintas. No caso do receptor estático, a geometria de propagação do sinal de GPS muda muito lentamente à medida que o satélite se move, o que torna mais difícil detectar o erro por múltiplos caminhos, enquanto no caso do receptor móvel a geometria muda mais rapidamente facilitando assim a detecção.

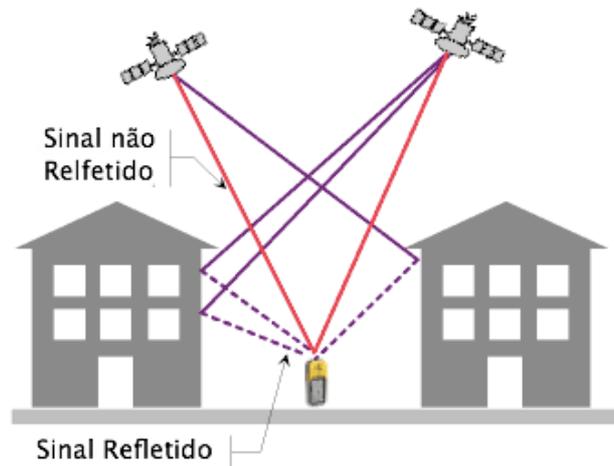


Figura 25 – Erro do GPS devido a múltiplos Caminhos.

#### 2.4.7. Dados *Ephemeris*

As posições *ephemeris* transmitidas pelos satélites não são exatas. Estas são atualizadas uma vez ao dia com uma estimativa da posição real do satélite e com uma previsão da posição do satélite no futuro. Logo, o erro na posição do satélite cresce com o tempo desde a sua última atualização.

#### 2.4.8. Relógio do Satélite

Os relógios atômicos dos satélites estão suscetíveis a ruídos e pequenas variações. As mensagens de navegação contêm as informações necessárias para corrigir estes erros e estimar a acurácia do relógio. Entretanto, estas são baseadas em observações e podem não indicar o estado real do relógio.

#### 2.4.9. Resolução e Ruído do Receptor

O receptor de sinal de GPS compara a transição dos bits do C/A ou P(Y) recebidos do satélite com um gerado internamente, estimando assim o atraso que o sinal sofreu. Existe um erro na comparação dependendo da resolução do receptor.

#### 2.4.10. Diluição de Precisão (DOP)

A qualidade das estimativas de posição e velocidade do receptor depende da distribuição espacial dos satélites que estão sendo usados para os cálculos. As Figs. 26 e 27 exemplificam uma boa e má distribuição espacial respectivamente. Como os cálculos são baseados em diferença, satélites muito próximos têm erros relativamente pequenos amplificados. Essa diluição da precisão (DOP) amplifica os erros de acordo com a Eq. (13), considerando que o erro de cada satélite é descorrelacionado e de média zero.

$$\sigma_f = DOP \cdot \sigma_i \quad (13)$$

Na qual:

$\sigma_i$  – desvio padrão do erro; e

$\sigma_f$  – desvio padrão após aplicar a diluição de precisão.

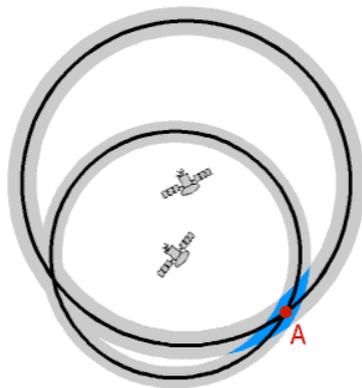


Figura 26 – Boa distribuição espacial dos satélites.

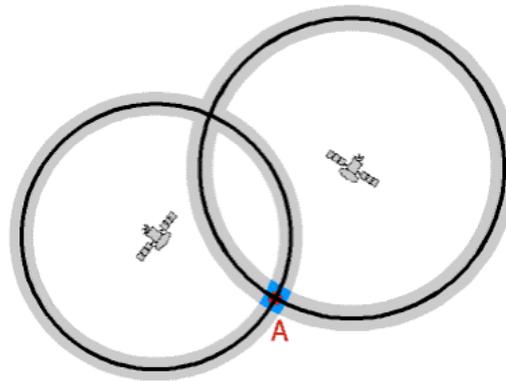


Figura 27 – Má distribuição espacial dos satélites.

A denominação DOP utilizado na Eq. (13) depende do erro que se está estimando, sendo: HDOP para o erro horizontal de posição; VDOP para erro vertical de posição; PDOP para erro de posição, consistindo este na raiz quadrada da soma dos quadrados de HDOP com VDOP; TDOP para erro no tempo; e GDOP para um erro geral, sendo este definido como a raiz quadrada da soma dos quadrados de PDOP com TDOP.

### 2.4.11. Sistema Diferencial de Posicionamento de Satélites

O Sistema Diferencial de Posicionamento de Satélites do sistema GPS (DGPS) é uma das técnicas para reduzir o erro na estimativa de posição de sistemas baseados em satélites. Esta técnica se baseia em utilizar um receptor com posição conhecida, transmitindo em tempo real o erro que existe ao estimar sua posição por GPS, o que permite corrigir os erros gerados por disponibilidade seletiva (SA), *ephemeris*, relógio, ionosfera e troposfera.

Assumindo que cada fonte de erro seja estatisticamente descorrelacionada de todas as outras, então o desvio-padrão pode ser obtido pela raiz quadrada da soma dos quadrados do desvio-padrão de cada uma. Uma visão geral do desvio padrão (raiz quadrada da variância) da variância das diferentes fontes de erros encontra-se na Tab. 2. Os valores desta tabela são específicos ao receptor de GPS, ao local, e às condições ambientes durante o teste.

**Tabela 2 – Desvios padrão dos erros na estimativa de posição utilizando o sinal de GPS. (SCHRIEVER)**

| Fonte de Erro                 | $\sigma(m)$<br>CA | $\sigma(m)$ DGPS<br>CA | $\sigma(m)$<br>P(Y) | $\sigma(m)$ DGPS<br>P(Y) |
|-------------------------------|-------------------|------------------------|---------------------|--------------------------|
| Ionosfera                     | 4.0               | 0.4                    | 1.2                 | 0.1                      |
| Troposfera                    | 0.7               | 0.2                    | 0.7                 | 0.1                      |
| Múltiplos Caminhos            | 1.4               | 1.4                    | 1.4                 | 1.4                      |
| Dados <i>Ephemeris</i>        | 2.1               | 0.0                    | 2.1                 | 0.0                      |
| Relógio do Satélite           | 2.1               | 0.0                    | 2.1                 | 0.0                      |
| Resolução e Ruído do Receptor | 0.5               | 0.5                    | 0.5                 | 0.5                      |
| Total (RMS)                   | 5.3               | 1.6                    | 3.6                 | 1.5                      |
| Erro Vertical com VDOP=2.5    | 12.8              | 3.9                    | 8.3                 | 3.7                      |
| Erro Horizontal com HDOP=2.0  | 10.2              | 3.1                    | 6.6                 | 3.0                      |

No próximo capítulo, o Filtro de Kalman Discreto é apresentado, permitindo fundir as medições dos diversos sensores apresentados.

### 3 Filtro de Kalman Discreto

As medidas realizadas por sensores estão sujeitas a erros, como pode ser visto no Capítulo 2. Os filtros são aplicados aos sinais medidos pelos sensores para reduzir os erros, de forma a estimar o valor real. O filtro de Kalman é um filtro estatístico que estima o estado interno de um sistema dinâmico a partir de uma série de medidas ruidosas da saída do sistema. Na abordagem estatística assume-se que o sinal desejado e o ruído possuem características estatísticas e que as medidas realizadas são a soma de ambos. A abordagem clássica considera que o sinal desejado e o não desejado se encontram em faixas de frequência distintas.

Este capítulo será uma revisão do filtro de Kalman apenas no caso discreto, pois em situações práticas as observações e controles são realizados em tempo discreto. As deduções das equações do Filtro de Kalman apresentadas neste capítulo são encontradas em (ANDERSON E MOORE et. al., 1979; HOSET, LYNCH; e Outros et. al., 2005; THRUN, BURGARD e FOX et. al., 2005).

#### 3.1. Sistemas Lineares

A representação por equações de estado modela um sistema físico como um conjunto de entradas, saídas e variáveis de estado. Seja um sistema dinâmico linear de dimensão finita amostrado nos instantes  $t\Delta t$ , representado pelas equações de estado abaixo dada por (HOSET, LYNCH; e Outros et. al., 2005), onde as incertezas na evolução dos estados e nas medidas dos sensores são modeladas pelo acréscimo de um ruído branco em ambas as equações

$$x(t + \Delta t) = F(t)x(t) + G(t)u(t) + v(t) \quad (15)$$

$$z(t) = H(t)x(t) + w(t) \quad (16)$$

na qual:

$\Delta t$  – intervalo entre amostras;

$t$  – número da amostra, indicando indiretamente o instante;

$n$  – número de estados do sistema;

$m$  – número de entradas do sistema;

$p$  – número de estados medidos;

$x \in \mathbb{R}^n$  – vetor de estado do sistema;

$u \in \mathbb{R}^m$  – vetor de entradas do sistema;

$z \in \mathbb{R}^p$  – vetor de saídas do sistema medidas pelos sensores;

$F \in \mathbb{R}^{n \times n}$  – matriz da dinâmica do sistema;

$G \in \mathbb{R}^{n \times m}$  – matriz que relaciona como as entradas alteram a dinâmica do sistema;

$H \in \mathbb{R}^{p \times n}$  – matriz que descreve como as equações de estados são mapeadas em saídas;

$v \in \mathbb{R}^n$  – ruído do processo; e

$w \in \mathbb{R}^p$  – ruído da medida.

O filtro de Kalman é utilizado em sistemas lineares para se obter a melhor estimativa do vetor de estado condicionado às observações. Esta estimativa é calculada através da reconstrução do vetor de estados utilizando a estimativa do vetor de estado anterior, as entradas conhecidas e as saídas medidas. Logo, o filtro de Kalman age filtrando os ruídos do processo e da medida, como um observador.

Se o sistema for observável, todos os estados podem ser reconstruídos através das saídas do sistema. Para qualquer sistema linear observável, o erro entre o valor real e o valor estimado pelo filtro de Kalman será sempre limitado.

### 3.2. Estimação Probabilística

No filtro de Kalman as evoluções dos estados e das medidas são governadas pelas leis da probabilidade. Se o estado de  $x(t)$  é completo, então nenhuma variável anterior a  $x(t)$  influencia a evolução estocástica dos estados futuros, a não ser que esta dependência seja medida através de  $x(t)$ . A densidade de probabilidade de  $x(t)$  será apenas dependente do estado  $x(t-\Delta t)$  e do controle  $u(t-$

$\Delta t$ ), representado pela probabilidade condicional  $p(x(t)|x(t-\Delta t),u(t-\Delta t))$ . A densidade de probabilidade de  $z(t)$  será apenas dependente do estado  $x(t)$ , representada por sua densidade condicional  $p(z(t)|x(t))$ . Neste sistema, a evolução dos estados é constituída por um processo Markoviano não observável, onde a camada escondida tem seu valor corrompido por um ruído de medida para gerar a saída, vide Fig. 28.

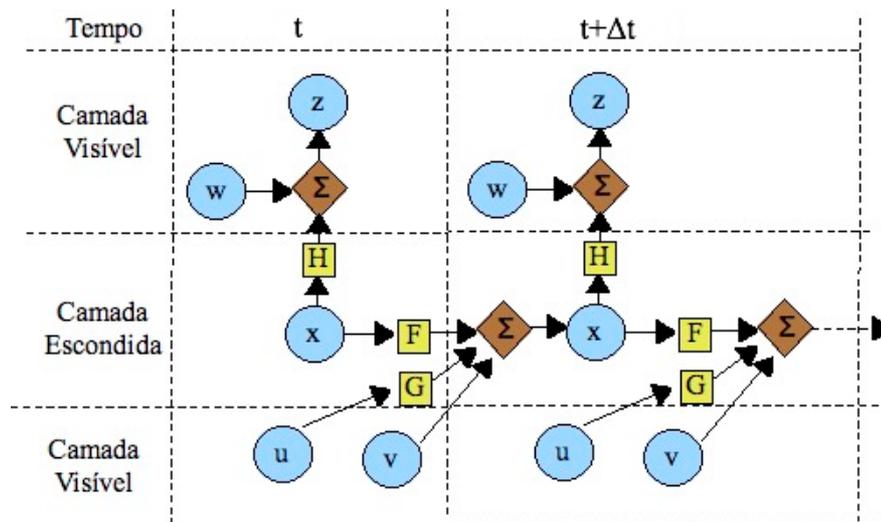


Figura 28 – Cadeia escondida de Markov que caracteriza a evolução do sistema.

### 3.3. Filtro de Kalman

Assume-se que  $v(t)$  e  $w(t)$  são vetores de ruídos brancos, sendo estes processos gaussianos independentes, com média zero e matrizes de covariância  $V(t)$  e  $W(t)$ . Assume-se também que o vetor de estados inicial é um processo gaussiano randômico.

O vetor de estado, dado pela Eq. (15), é uma transformação linear de variáveis gaussianas. A distribuição gaussiana possui a propriedade que uma combinação linear de gaussianas também é uma distribuição gaussiana, logo o vetor de estado no instante  $t$  qualquer será sempre gaussiano, se  $x(0)$  também for gaussiano.

O estimador do vetor de estado no instante  $t+\Delta t$ , construído no instante  $t$ , será representada na forma  $x(t+\Delta t|t)$ , cuja distribuição, por ser gaussiana, é definida por sua média e matriz de covariância dadas, de acordo com

(ANDERSON E MOORE et. al., 1979), pelas Eqs. (17) e (18), respectivamente. Este estimador é calculado através da transformação linear, dada pela Eq. (15), da distribuição do vetor de estado  $x(t)$ , das entradas  $u(t)$  e do ruído do processo  $v(t)$ . Este primeiro passo do filtro de Kalman é conhecido como predição, pois é construído um estimador que prevê a distribuição do vetor de estado um passo a frente.

$$\hat{x}(t + \Delta t|t) = F(t)\hat{x}(t|t) + G(t)u(t) \quad (17)$$

$$P(t + \Delta t|t) = F(t)P(t|t)F(t)^T + V(t) \quad (18)$$

na qual:

$(t+\Delta t, t)$  – instante  $t+\Delta t$  construído no instante  $t$ ;

$\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  – vetor de médias da distribuição  $x$ ;

$P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  – matriz de covariância da distribuição  $x$ ; e

$V \in \mathbb{R}^{n \times n}$  – matriz de covariância da distribuição  $v$ .

No instante  $t$  a observação esperada do vetor de estado do instante  $t+\Delta t$  é dada pelo estimador  $z(t+\Delta t|t)$ . Este estimador é obtido através da transformação linear dada pela Eq. (16). O estimador é um transformação linear de uma distribuição gaussiana, logo é também uma gaussiana.

No instante  $t+\Delta t$  é obtida, através dos sensores, uma observação do vetor de estado,  $x(t+\Delta t)$ , observação representada por  $z(t+\Delta t)$ . A diferença entre o observado e o que se esperava observar é dada pelo estimador  $\Delta z(t+\Delta t)$ . Este é gaussiano, por ser uma combinação linear de gaussianas, que de acordo com (ANDERSON E MOORE et. al., 1979) é definido por seu vetor de médias e matriz de covariância, respectivamente:

$$\Delta \hat{z}(t + \Delta t) = z(t + \Delta t) - H(t + \Delta t)\hat{x}(t + \Delta t|t) \quad (19)$$

$$S(t + \Delta t) = H(t + \Delta t)P(t + \Delta t|t)H(t + \Delta t)^T + W(t + \Delta t) \quad (20)$$

na qual:

$\Delta \hat{z} \in \mathbb{R}^p$  – vetor de médias da distribuição  $\Delta z$ ;

$z \in \mathbb{R}^p$  – vetor de valores observados na medição; e

$W \in \mathbb{R}^{p \times p}$  – matriz de covariância da distribuição  $w$ .

A existência da nova informação, gerada pela observação  $z(t+\Delta t)$ , permite que o estimador do vetor de estado  $x(t+\Delta t)$  seja atualizado. Essa atualização é feita através da adição de um termo de correção ao estimador  $x(t+\Delta t|t)$ . O termo de correção é dado por um ganho  $K$  vezes a diferença das observações,  $\Delta z(t+\Delta t)$ . O ganho  $K$  pode ser visto como um peso que leva em conta a relação entre a acurácia da estimativa  $x(t+\Delta t|t)$  e o ruído da medida. Quanto maior o ganho  $K$ , maior é a crença que o observado está mais próximo do correto que a estimativa propagada. Este passo é conhecido como a atualização, pois o estimador para o vetor de estado  $x(t+\Delta t)$ , feito no instante  $t$ , é atualizado no instante  $t+\Delta t$ . O novo estimador  $x(t+\Delta t|t+\Delta t)$  é gaussiano e descrito de acordo com (ANDERSON E MOORE et. al., 1979) por seu vetor de médias e matriz de covariância, respectivamente:

$$\hat{x}(t + \Delta t|t + \Delta t) = \hat{x}(t + \Delta t|t) + K(t + \Delta t)\Delta \hat{z}(t + \Delta t) \quad (21)$$

$$P(t + \Delta t|t + \Delta t) = P(t + \Delta t|t) - K(t + \Delta t)H(t + \Delta t)P(t + \Delta t|t) \quad (22)$$

na qual:

$(t+\Delta t, t+\Delta t)$  – instante  $t+\Delta t$  construído no instante  $t+\Delta t$ ; e

$K \in \mathbb{R}^{p \times n}$  – matriz de ganhos.

O ganho  $K$  que minimiza o erro quadrático na estimativa do estado é também conhecido como o ganho ótimo de Kalman

$$K(t + \Delta t) = P(t + \Delta t|t)H(t + \Delta t)^T S(t + \Delta t)^{-1} \quad (23)$$

As Eqs. (16) a (23) são as equações do filtro de Kalman, que fornecem um estimador ótimo para o vetor de estado, quando a hipótese de que os ruídos são

gaussianos é mantida. As equações se mantêm válidas para o caso onde as distribuições  $x(0)$ ,  $v(t)$ ,  $w(t)$  não forem conjuntamente gaussianas. Entretanto, dependendo da distribuição de  $v(t)$  e  $w(t)$ , os dois primeiros momentos podem não ser suficientes para descrever a distribuição de probabilidade do vetor de estados  $x(t)$ .

A hipótese de os ruídos do processo e da medida serem brancos pode ser relaxada. Considerando estes processos correlacionados, os mesmos podem ser modelados como um sistema linear de dimensão finita, onde a entrada é um ruído branco. Então, o vetor de estado do filtro de Kalman será composto pelos sinais originais do modelo e pelos do modelo do ruído.

### 3.4. Exemplo

#### 3.4.1. Simples Posicionamento em 1 Dimensão

Para melhor compreender como um filtro de Kalman funciona, um simples exemplo será apresentado, retirado de (MAYBECK et. al., 1979). O exemplo constitui em estimar a posição em uma dimensão, através de observações ruidosas da mesma. Em um determinado tempo  $t_1$  a posição é observada como sendo  $z_1$ . Esta medição possui um desvio padrão  $\sigma_{z_1}$ , logo a probabilidade de se estar em uma determinada posição  $x(t_1)$  no tempo  $t_1$  é baseado na medida e é dada pela probabilidade condicional  $f_{x(t_1)|z(t_1)}(x|z_1)$ , vide Fig. 29.

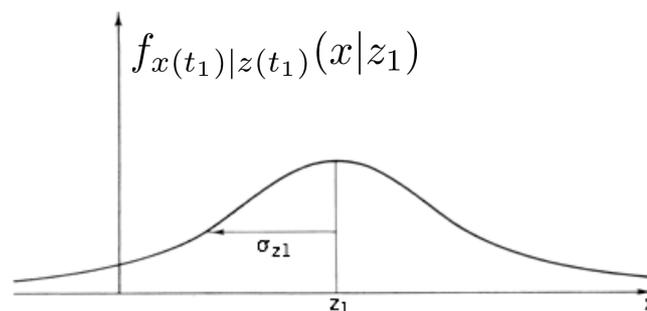


Figura 29 – Densidade condicional da posição baseada no valor medido  $z_1$ . (MAYBECK et. at., 1979)

Em um tempo  $t_2$  próximo a  $t_1$  outra medida é feita da mesma posição,  $z_2$ . Esta possui uma variância  $\sigma_{z_2}$ , onde *e.g.*  $\sigma_{z_1} > \sigma_{z_2}$ , ou seja, a certeza da posição é maior baseada na medição  $z_2$ . A distribuição de probabilidade da posição no instante  $t_2$ ,  $x(t_2)$ , é dada pela probabilidade condicional  $f_{x(t_2)|z(t_2)}(x|z_2)$ , Fig. 30.

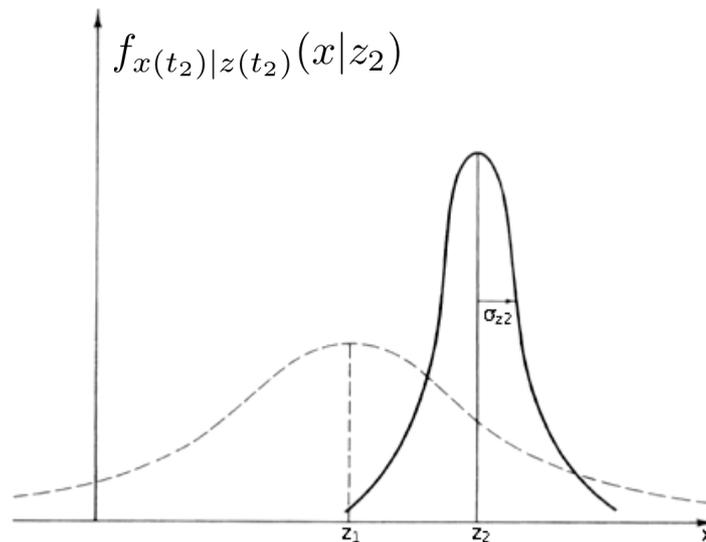


Figura 30 – Densidade condicional da posição baseada no valor medido  $z_2$ . (MAYBECK et. at., 1979)

Considerando as duas medidas de posição ( $z_1$  e  $z_2$ ) e sendo estas gaussianas, o filtro de Kalman fornecerá o melhor estimador possível para a posição no instante  $t_2$ ,  $x(t_2)$ , cuja distribuição é dada pela probabilidade condicional  $f_{x(t_2)|z(t_1),z(t_2)}(x|z_1, z_2)$  com média  $\mu$  e variância  $\sigma$ , onde  $\sigma_{z_1} > \sigma_{z_2} > \sigma$ , vide Fig. 31.

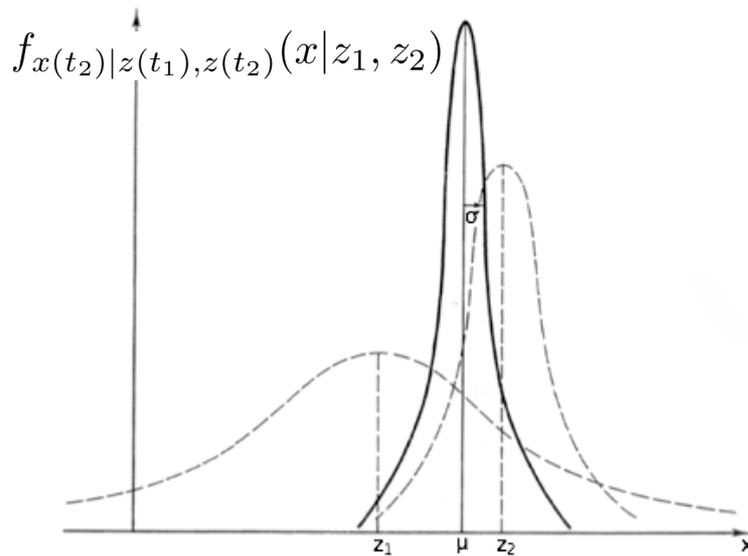


Figura 31 – Densidade condicional da posição baseada nos valores medidos  $z_1$  e  $z_2$ . (MAYBECK et. at., 1979)

### 3.4.2. Ajuste do Ruído da Medida

Este exemplo retirado de (WELCH e BISHOP et. al., 2006) mostra como o desempenho do filtro de Kalman é influenciado pelo parâmetro de ruído da medida. Seja uma constante observada 50 vezes, onde as observações são corrompidas por um ruído branco de média nula e variância 0,1. O filtro de Kalman estima o valor da constante através das 50 medições ruidosas. As Figs. 32, 33 e 34 representam as simulações do filtro onde as variâncias da medida ( $W$ ) são  $(0,01)^2$ ,  $(0,1)^2$ ,  $(1)^2$  respectivamente. A linha sólida representa o valor real da constante, as cruzes representam as medidas ruidosas e a curva restante o valor estimado pelo filtro.

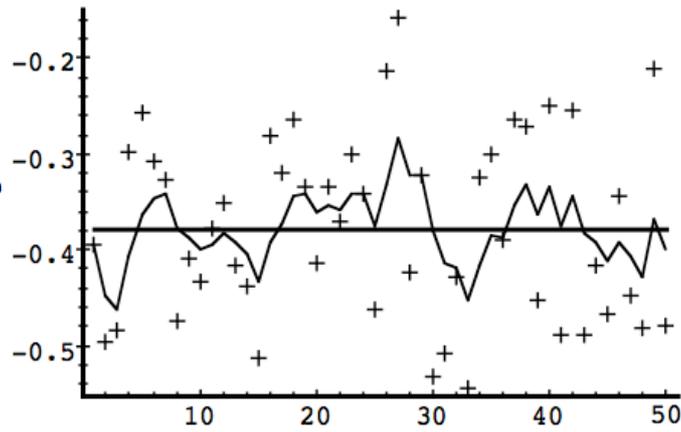


Figura 32 – Simulação do Filtro de Kalman com  $W=(0,01)^2$ . (WELCH e BISHOP et. al., 2006)

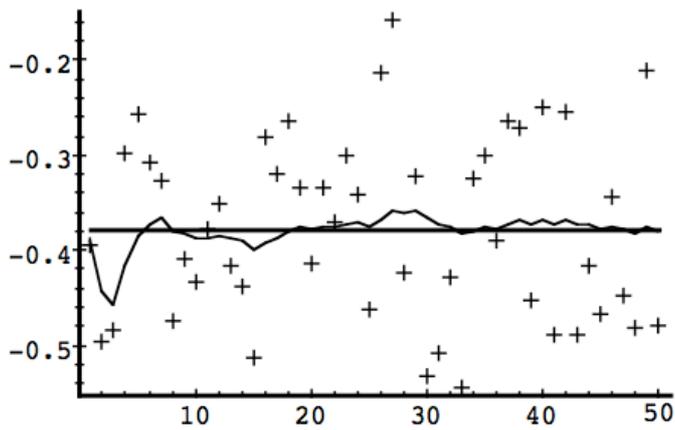


Figura 33 – Simulação do Filtro de Kalman com  $W=(0,1)^2$ . (WELCH e BISHOP et. al., 2006)

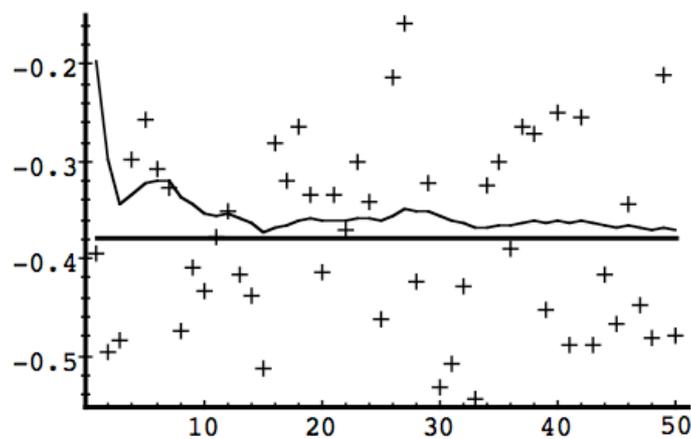


Figura 34 – Simulação do Filtro de Kalman com  $W=(1)^2$ . (WELCH e BISHOP et. al., 2006)

Na Fig. 33 com  $W=(0,1)^2$  obtém-se o melhor desempenho dentre as 3 simulações, pois é utilizado o valor real da variância do erro da medida. Na Fig. 34 observa-se que o filtro responde mais lentamente às medidas, resultando em uma variância reduzida, mas uma maior lentidão na convergência. Enquanto na Fig. 32 o filtro responde mais velozmente às medidas, o que aumenta a variância estimada.

### 3.5. Sistemas Não Lineares

Seja um sistema dinâmico de dimensão finita, não-linear, amostrado discretamente em instantes  $t$  e descrito pelas Eqs. (24) e (25), (HOSET, LYNCH; e Outros et. al., 2005). O filtro ótimo para a estimação do vetor de estado do sistema é não-linear, entretanto filtros não-lineares são de difícil construção. Tendo em vista simplificar a filtragem, o sistema pode ser linearizado e os filtros lineares aplicados ao mesmo.

$$x(t + \Delta t) = f(x(t), u(t), t) + v(t) \quad (24)$$

$$z(t) = h(x(t), t) + w(t) \quad (25)$$

na qual:

$x \in \mathbb{R}^n$  – vetor de estado do sistema;

$u \in \mathbb{R}^m$  – vetor de entradas do sistema;

$z \in \mathbb{R}^p$  – vetor de saídas do sistema medidas pelos sensores;

$f \in \mathbb{R}^n$  – vetor de funções da dinâmica do sistema;

$h \in \mathbb{R}^p$  – vetor de funções que descreve como as equações de estado são

mapeadas em saídas;

$v \in \mathbb{R}^n$  – ruído do processo; e

$w \in \mathbb{R}^p$  – ruído da medida.

### 3.6. Filtro de Kalman Estendido

A adaptação do filtro de Kalman para sistemas não-lineares, linearizados através da expansão da série de Taylor de primeira ordem com relação à estimativa mais recente, é chamado de filtro de Kalman Estendido. No entanto, existem métodos de linearização que produzem melhores estimadores para os vetores de estado gaussianos do que o método de expansão por série de Taylor.

#### 3.6.1. Linearização

A linearização por expansão da série de Taylor de primeira ordem aproxima a função não-linear através de seu valor em um ponto, extrapolado linearmente por sua inclinação no ponto. O ponto escolhido é aquele onde o estado tenha maior probabilidade de ocorrência no momento da linearização, ou seja, no valor esperado do estado. As inclinações e as equações linearizadas das funções  $f$  e  $h$  são dada por (HOSET, LYNCH; e Outros et. al., 2005) como:

$$JF(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=\hat{x}(t|t)} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$f(x(t), u(t), t) \approx f(\hat{x}(t|t), u(t), t) + JF(t)(x(t|t) - \hat{x}(t|t)) \quad (27)$$

$$JH(t + \Delta t) = \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=\hat{x}(t+\Delta t|t)} \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_p}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_p}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$h(x(t + \Delta t), t + \Delta t) \approx f(\hat{x}(t + \Delta t|t), t + \Delta t) + JH(t + \Delta t)(x(t + \Delta t|t) - \hat{x}(t + \Delta t|t)) \quad (29)$$

na qual:

$JF \in \mathbb{R}^{n \times n}$  – Jacobiano de  $f$ ;

$\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  – vetor de médias do estimador  $x$ ;

$f=[f_1 \ f_2 \ \dots \ f_n]^T \in \mathbb{R}^n$  – vetor de funções da dinâmica do sistema;

$h=[h_1 \ h_2 \ \dots \ h_n]^T \in \mathbb{R}^p$  – vetor de funções que descreve como as equações de estado são mapeadas em saídas;

$u \in \mathbb{R}^m$  – vetor de entradas do sistema;

$x \in \mathbb{R}^n$  – vetor de estado do sistema; e

$JH \in \mathbb{R}^{p \times n}$  – Jacobiano de  $h$ .

Visando exemplificar o efeito de uma transformação não-linear sobre a propagação do vetor de estado e os erros que a linearização trazem, simplifica-se o vetor de estado como sendo uma variável única de estado  $X$ , com distribuição gaussiana  $p(x)$ , Figs. 35 a 38. Cada figura possui três gráficos: o inferior à direita representando a distribuição original  $p(x)$ , o superior na direita a transformação e o da esquerda as distribuições resultantes após a transformação, sendo que o gráfico da esquerda possui três distribuições:

A distribuição  $p(y)$  não gaussiana representada pela área em cinza.

A distribuição resultante da transformação não-linear do estado  $X$ ,  $y=g(x)$ , computada através do método de Monte-Carlo é representada pela linha sólida

A distribuição gaussiana resultante da projeção do estado  $X$  através da linearização de  $g(x)$  representada pela linha pontilhada. A linearização é feita através da expansão de primeira ordem da série de Taylor de  $g(x)$  com relação à estimativa de  $X$ , ou seja, a tangente no ponto  $g(\mu)$ , com  $\mu$  sendo a média da distribuição  $p(x)$ .

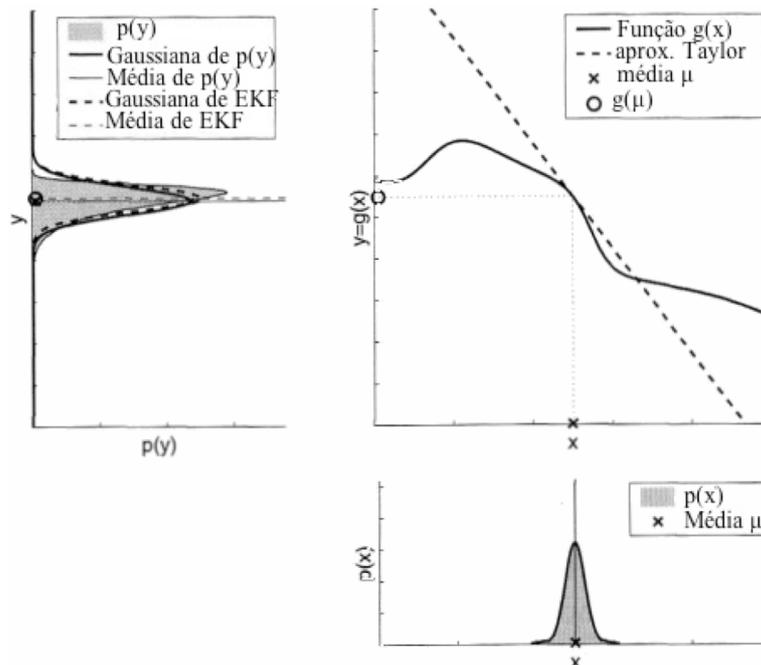


Figura35– Transformação não-linear de uma distribuição com pequena variância. (THRUN; BURGARD; e FOX et. al., 2005)

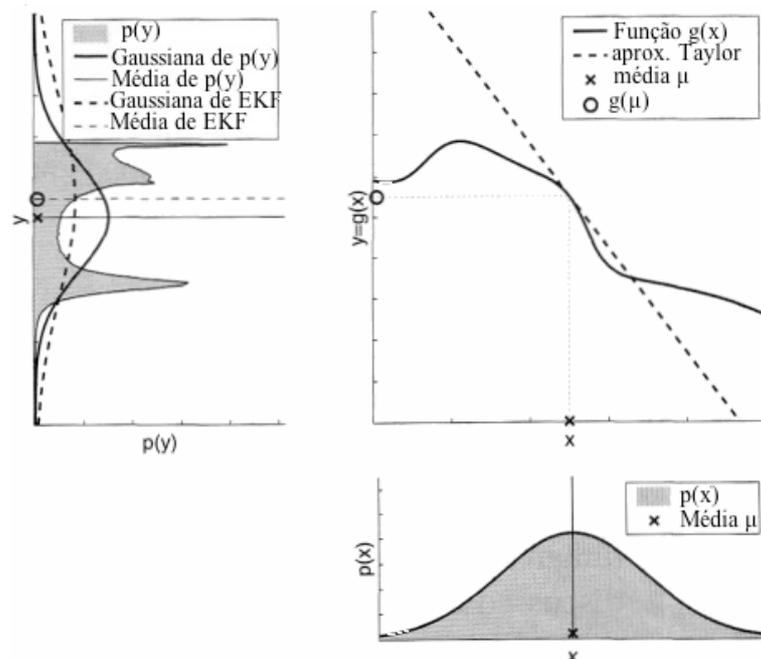


Figura 36 –Transformação não-linear de uma distribuição com grande variância. (THRUN; BURGARD; e FOX et. al., 2005)

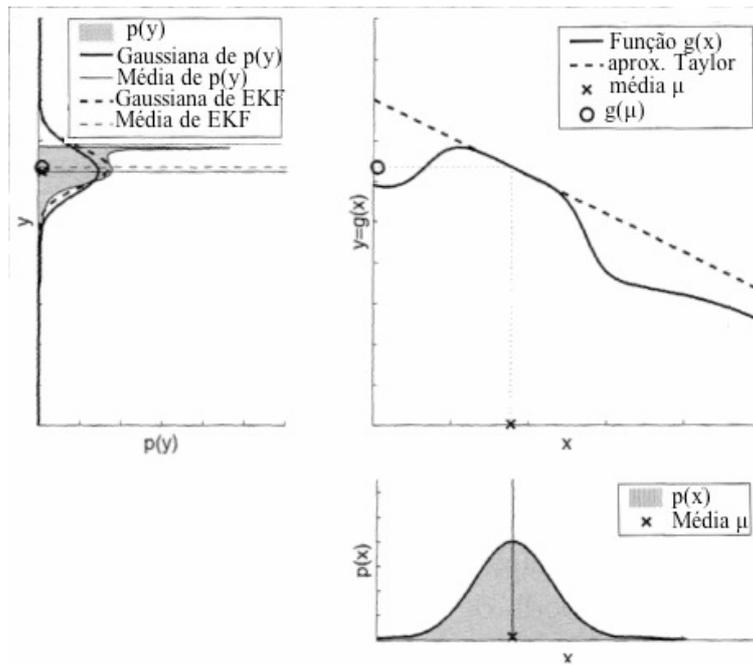


Figura 37 – Transformação através de um ponto com pequena não-linearidade local. (THRUN; BURGARD; e FOX et. al., 2005)

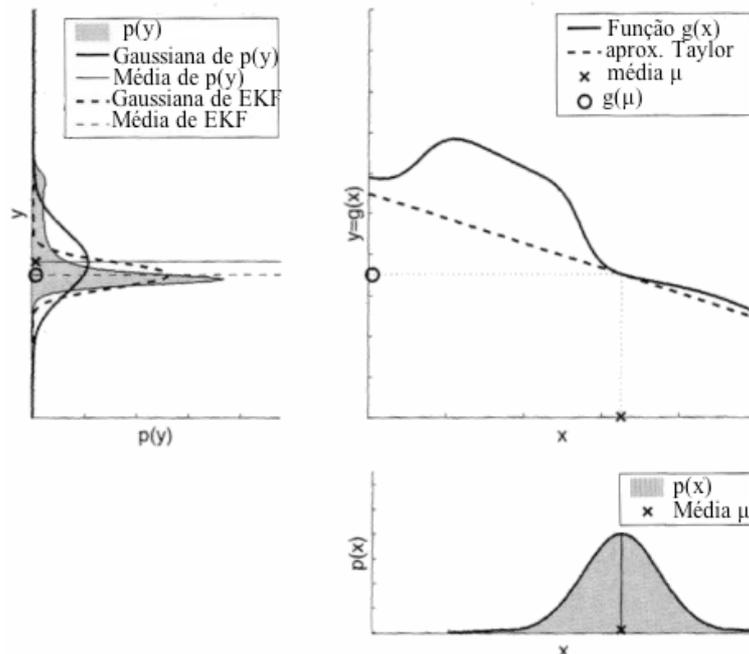


Figura 38 – Transformação através de um ponto com grande não-linearidade local. (THRUN; BURGARD; e FOX et. al., 2005)

A qualidade da aproximação linear de  $g$  pode ser observada pela diferença entre a linha sólida e a linha pontilhada: quanto melhor a aproximação, mais a linha pontilhada irá se aproximar da sólida. Os dois principais fatores que afetam

a qualidade de uma linearização são o grau de incerteza da distribuição que está sendo transformada e o grau de não-linearidade local da função.

As Figs. 35 e 36 mostram a dependência da qualidade da transformação linear com relação à incerteza, em ambas figuras distribuições gaussianas passam pela mesma função  $g$ , linearizada no mesmo ponto. Na Fig. 36 a distribuição possui uma variância maior que na Fig. 35, o que resulta em uma aproximação de pior qualidade.

A dependência da qualidade da linearização, com relação ao grau de linearidade local da função, pode ser observada nas Figs. 37 e 38. Em ambas as figuras a variância da distribuição e a função não-linear são as mesmas. As figuras se diferenciam pelo ponto de linearização, na Fig. 38 existe uma maior não-linearidade local ao ponto, o que resulta em um maior erro de aproximação.

### 3.6.2. Equação do Filtro de Kalman Estendido

O sistema não-linear, dado pelas Eqs. (24) e (25), com as funções  $g$  e  $h$  linearizadas pelas Eqs. (27) e (29), se torna um sistema linear. A lógica do equacionamento do filtro de Kalman para este sistema é a mesma que a desenvolvida para o sistema linear. As equações são descritas por (HOSET, LYNCH; e Outros et. al., 2005) como sendo:

#### Estimador Preditivo:

$$\hat{x}(t + \Delta t|t) = f(\hat{x}(t|t), u(t), t) \quad (30)$$

$$P(t + \Delta t|t) = JF(t)P(t|t)JF(t)^T + V(t) \quad (31)$$

#### Estimador Diferença Observável:

$$\Delta \hat{z}(t + \Delta t) = z(t + \Delta t) - h(\hat{x}(t + \Delta t|t), t + \Delta t) \quad (32)$$

$$S(t + \Delta t) = JH(t + \Delta t)P(t + \Delta t|t)JH(t + \Delta t)^T + W(t + \Delta t) \quad (33)$$

**Estimador Atualizado:**

$$\hat{x}(t + \Delta t|t + \Delta t) = \hat{x}(t + \Delta t|t) + K(t + \Delta t)\Delta\hat{z}(t + \Delta t) \quad (34)$$

$$P(t + \Delta t|t + \Delta t) = P(t + \Delta t|t) - K(t + \Delta t)JH(t + \Delta t)P(t + \Delta t|t) \quad (35)$$

**Ganho de Kalman:**

$$K(t + \Delta t) = P(t + \Delta t|t)JH(t + \Delta t)^T S(t + \Delta t)^{-1} \quad (36)$$

na qual:

$JF \in \mathbb{R}^{n \times n}$  – Jacobiano de  $f$ ;

$\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  – vetor de médias do estimador  $x$ ;

$f \in \mathbb{R}^n$  – vetor de funções da dinâmica do sistema;

$h \in \mathbb{R}^p$  – vetor de funções que descreve como as equações de estados são

mapeadas em saídas;

$u \in \mathbb{R}^m$  – vetor de entradas do sistema;

$x \in \mathbb{R}^n$  – vetor de estado do sistema;

$JH \in \mathbb{R}^{p \times n}$  – Jacobiano de  $h$ ;

$h \in \mathbb{R}^p$  – vetor de funções que descreve como as equações de estados são

mapeadas em saídas;

$P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  – matriz de covariância da distribuição  $x$ ;

$V \in \mathbb{R}^{n \times n}$  – matriz de covariância da distribuição  $v$ ;

$\Delta\hat{z} \in \mathbb{R}^p$  – vetor de médias da distribuição  $\Delta z$ ;

$z \in \mathbb{R}^p$  – vetor de valores observados na medição;

$S \in \mathbb{R}^{p \times p}$  – matriz de covariância da distribuição  $\Delta z$ ; e

$W \in \mathbb{R}^{p \times p}$  – matriz de covariância da distribuição  $w$ .

No próximo capítulo, o Filtro de Kalman apresentado será aplicado ao problema de fusão do GPS e sensor inercial.

## 4 Navegação Inercial (INS)

A fusão de sensores só pode ser realizada quando os mesmos medem a mesma variável, logo primeiramente é necessário a escolha do modelo sobre o qual irá se representar as medidas e em seguida fazer as correções necessárias para que as variáveis medidas sejam as mesmas. Este capítulo apresentará o modelo e os equacionamentos necessários para a fusão do GPS com o sensor inercial.

### 4.1. Modelo da Terra

O mundo possui formas irregulares e complexas, logo este é simplificado em um modelo sobre o qual se navega. A navegação via a fusão do sensor inercial com o GPS requer um modelo da Terra que inclua a forma, gravidade e rotação. O modelo utilizado será o definido pelo WGS 84, o qual é atualmente o melhor sistema geodésico de referência global para a Terra, definido pelo (Department of Defense World Geodetic System 1984 et. al., 2000).

Aplicações geodésicas trabalham com três superfícies distintas: a superfície topográfica da Terra, que é irregular; a superfície gerada pela revolução de uma elipsóide, que é a forma mais simplificada de aproximação da superfície terrestre, devido à sua simplicidade é a preferida para realizar a computação e definir as coordenadas do ponto como latitude, longitude e elevação; e a geóide, que é a superfície sobre a qual o potencial gravitacional é constante. As diferenças das três superfícies podem ser vistas na Fig. 39.

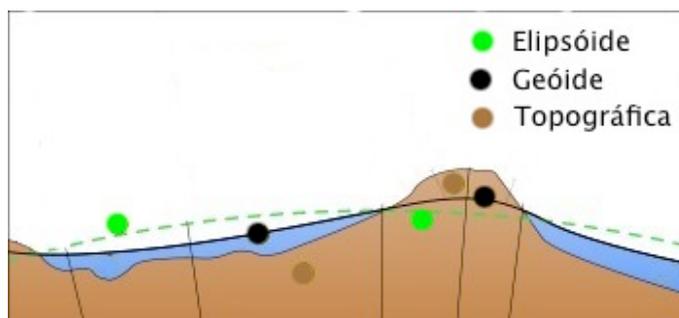


Figura 1 – Aproximações à superfície da Terra.

Nesta dissertação será utilizada como aproximação da superfície terrestre a revolução da elipsóide definida pelo WGS-84. Esta possui o raio equatorial de 6.378.137 metros e raio polar de 6.356.752,3142 metros, sendo o eixo e centro de revolução coincidentes com o eixo de rotação e centro de massa da Terra, respectivamente. Os parâmetros do WGS-84 utilizados neste trabalho encontram-se na Tab. 4.

**Tabela 4 – Parâmetros do WGS-84 (Department of Defense World Geodetic System 1984 et. al, 2000)**

| Parâmetro                   | Notação  | Valor  |
|-----------------------------|----------|--|
| Raio Equatorial             | $R_a$    | 6.378.137m                                     |
| Raio Polar                  | $R_b$    | 6.356.752,3142m                                |
| Constante Gravitacional     | GM       | $3986004,418 \cdot 10^8 \text{m}^3/\text{s}^2$ |
| Velocidade da Luz           | C        | 299792458m/s                                   |
| Gravidade no Equador        | $g_0$    | $9,780373 \text{m}/\text{s}^2$                 |
| Velocidade Angular da Terra | $\Omega$ | $7,292115 \cdot 10^{-11} \text{rad}/\text{s}$  |

## 4.2. Sistemas de Coordenadas

Definido o modelo do meio sobre o qual irá se navegar, um sistema de coordenadas é estabelecido para representar cada ponto deste modelo unicamente. Existem alguns sistemas de coordenadas utilizados para calcular a solução da navegação GPS/INS, sendo estes ECI, ECEF, ENU, Medição e Corpo.

#### 4.2.1. Sistema Centrado e Fixo na Terra (ECEF)

O ECEF é centrado e fixo na Terra, possuindo seu centro coincidente ao centro de massa da Terra e rotacionando com a Terra, vide Fig. 40. O eixo X passa através do equador no meridiano de referência, o eixo Z através do pólo norte, e o eixo Y pode ser determinado pela regra da mão direita.

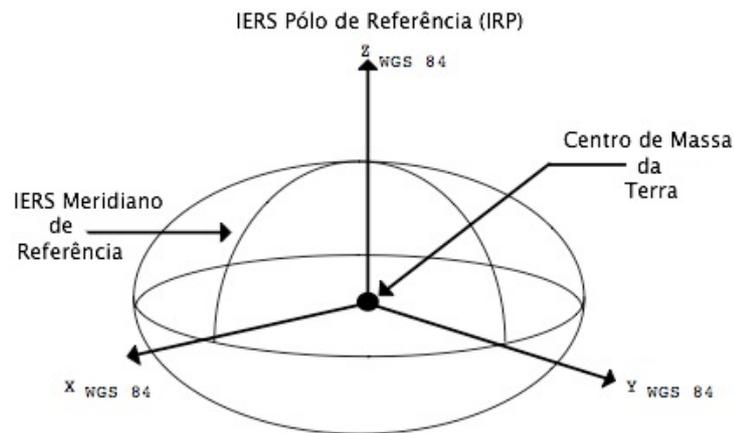


Figura 2 – Sistema de Coordenadas ECEF. (Department of Defense World Geodetic System 1984 et. al., 2000)

Um ponto sobre a superfície do modelo pode ser descrito em termos de Latitude ( $\Phi$ ), Longitude ( $\lambda$ ) e Altura ( $h$ ), vide Fig. 41. Latitude é o ângulo entre a normal à superfície de referência e o plano do equador. Longitude é o ângulo no plano equatorial entre as linhas que conectam o centro da Terra com o meridiano de referência e com o meridiano onde o ponto se encontra. Um meridiano é um caminho direto sobre a superfície de referência que é a menor distância entre os pólos. A altura é a menor distância do ponto à superfície de referência.

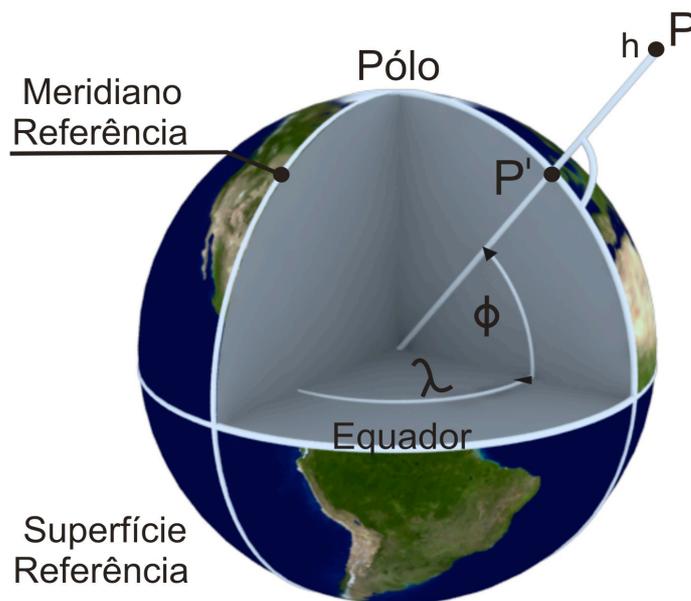


Figura 3 – Representação do Ponto em Latitude, Longitude e Altura.

#### 4.2.2. Sistema Inercial Centrado na Terra (ECI)

O ECI possui o seu centro coincidente ao centro de massa da Terra; o eixo  $X_{ECI}$  na direção do equinócio vernal; o eixo  $Z_{ECI}$  na direção paralela a rotação da Terra; e o eixo  $Y_{ECI}$  na direção que torna o sistema de coordenadas ortogonais e de mão direita, vide Fig. 42.

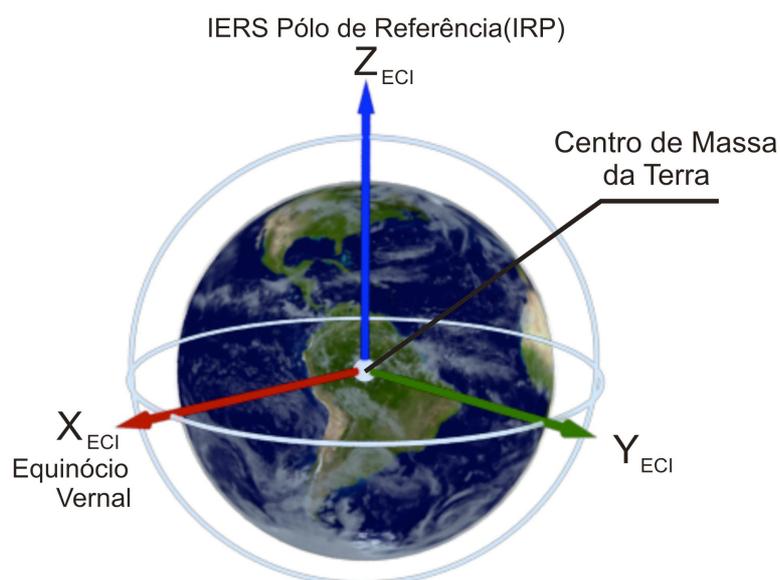


Figura 4 – Sistema de Coordenadas ECI

#### 4.2.3. Sistema Localmente Tangente (ENU)

No Sistema Localmente Tangente, a Terra é considerada localmente plana. Pode-se então construir um sistema de coordenadas auxiliar ENU, onde o eixo norte aponta na direção que a latitude cresce, o eixo leste aponta na direção em que a longitude cresce, e o eixo em cima aponta na direção que a altura cresce, vide Fig. 43.

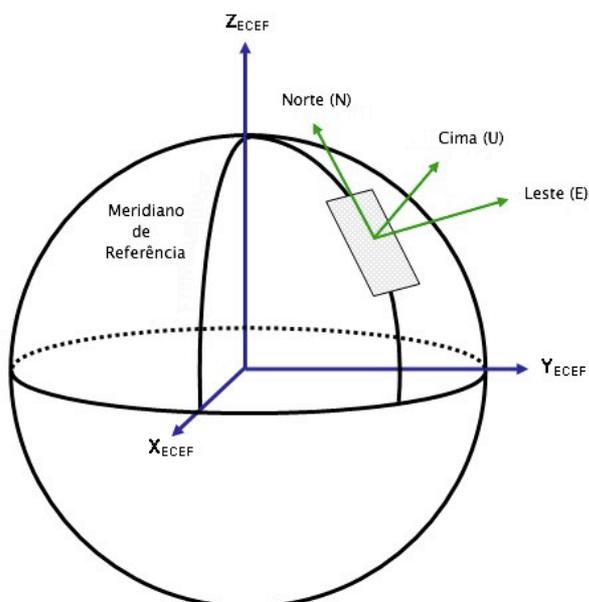


Figura 5 – Sistema de Coordenadas ENU

#### 4.2.4. Sistema Wander-Azimuth (NAV)

O sistema de navegação será o sistema de coordenadas Wander-Azimuth, o qual é relacionado ao sistema localmente tangente por uma rotação em Azimuth ( $\alpha$ ), vide Fig. 44. O ângulo  $\alpha$  é definido como o ângulo positivo entre o primeiro eixo do sistema localmente tangente, neste equacionamento o N, e o primeiro eixo do sistema de navegação (x). O sistema localmente tangente não será utilizado como sistema de navegação, pois este apresentaria uma singularidade ao se navegar sobre os pólos.

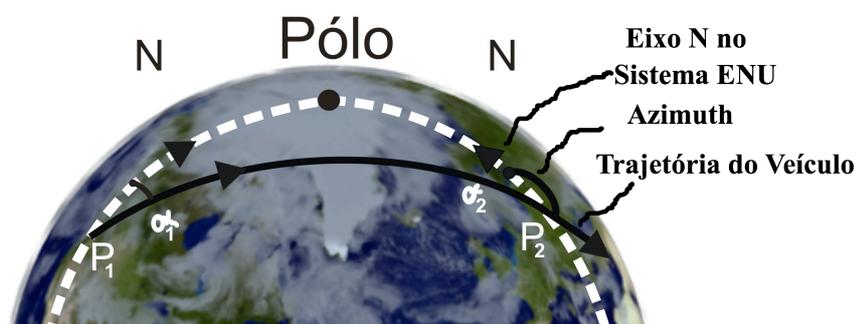


Figura 6 – Wander Azimuth

#### 4.2.5. Coordenadas do Corpo

O Sistema de Coordenadas do Corpo é fixo ao corpo do veículo. Utilizando a definição mais comumente encontrada na literatura, obtemos o eixo X apontando para a frente do veículo, Y para a direita e Z para baixo, como esquematizado na Fig 45. Neste sistema de coordenadas, rotações em torno dos eixos X, Y e Z são chamadas de Roll ( $\phi$ ), Pitch ( $\theta$ ) e Yaw ( $\psi$ ), respectivamente.

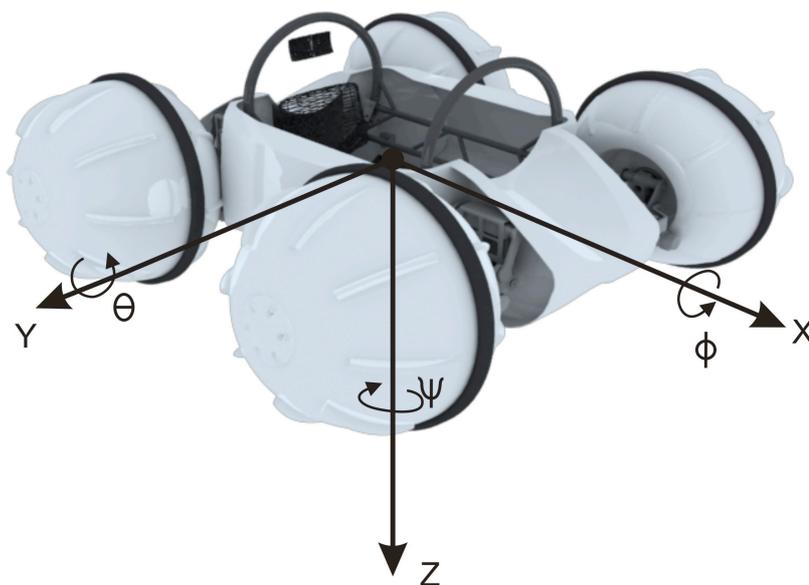


Figura 7 – Coordenadas do Corpo

#### 4.2.6. Coordenada de Medida

As medidas de aceleração e rotação do sensor inercial são feitas ao longo dos três eixos do sensor, estes compõem o Sistema de Coordenadas de Medida, como representado pela Fig. 46.

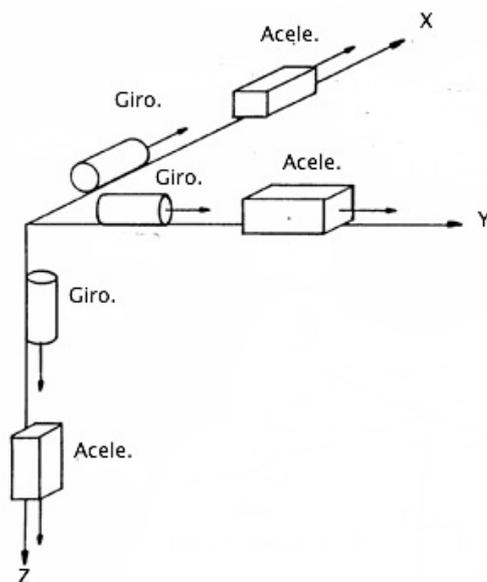


Figura 8 – Coordenadas da Medida

### 4.3. Navegação Inercial

A fusão do GPS com o sensor inercial através do filtro de Kalman requer que as mesmas variáveis sejam observadas por ambos os sensores. Logo, a simples integração do sensor inercial não resultará nas posições e velocidades observadas pelo GPS, sendo necessárias correções devido à forma e à rotação da Terra.

O diagrama de bloco, Fig. 47, mostra a computação necessária para se navegar inercialmente, sob o modelo da Terra definido anteriormente, utilizando um sensor inercial “*Strapdown*”. (BOSE et. al., 1982) apresenta este equacionamento e o do sensor inercial “*Guimbale*” em seu trabalho. Nas seções subsequentes cada diagrama de bloco será detalhado, verificando assim o equacionamento apresentado. As condições iniciais serão definidas e será calculado o erro da navegação inercial.

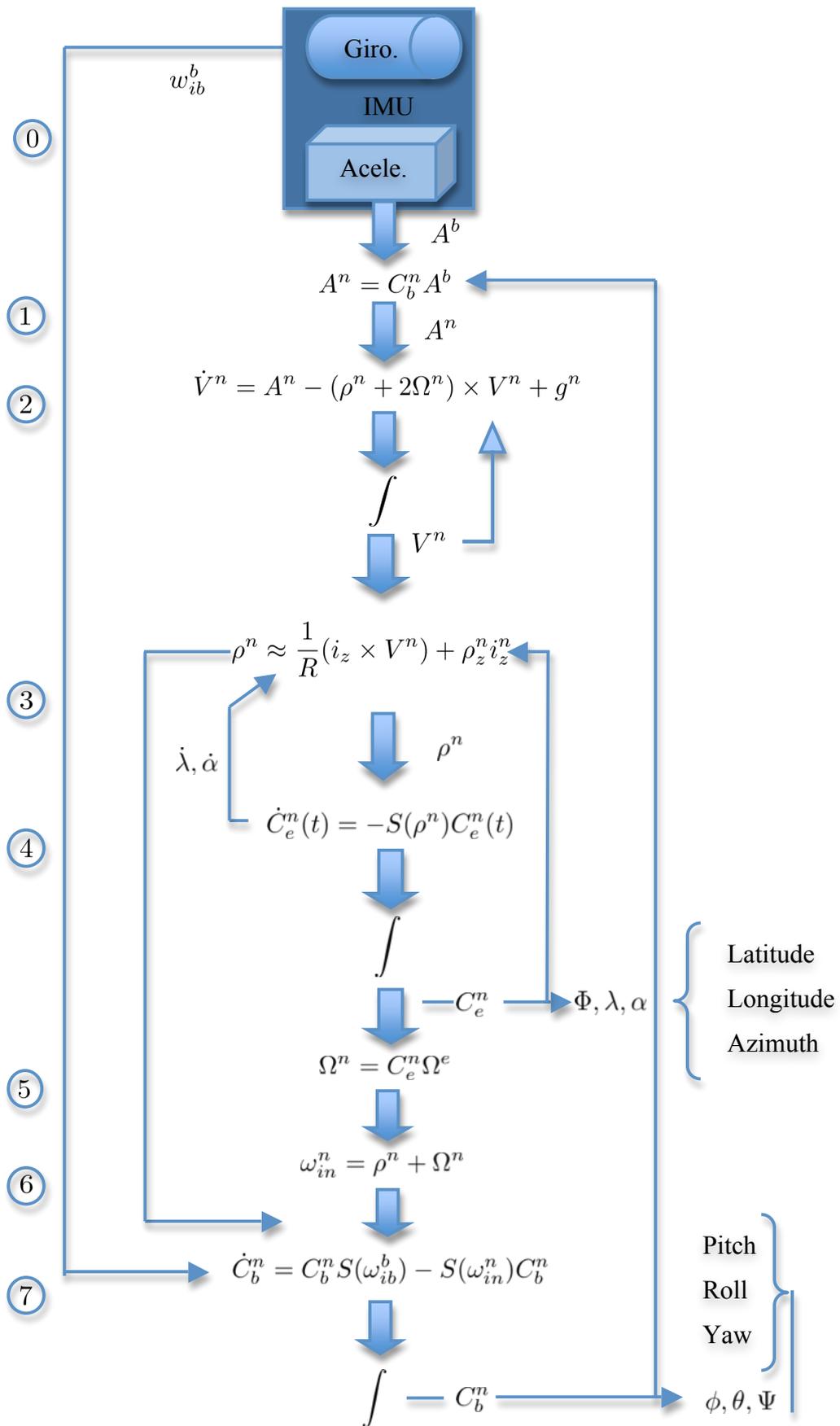


Figura 9 – Diagrama de Blocos da Navegação Inercial

### 4.3.1.

#### Bloco 0 – Transformação das Coordenadas de Medida para as Coordenadas do Corpo.

A relação entre o sistema de coordenadas de Medida e o do Corpo depende de como o sensor foi acoplado no veículo, logo a matriz de transformação será particular a cada caso.

### 4.3.2.

#### Bloco 1 – Aceleração $A^n$ .

Para se calcular a solução da navegação inercial é necessário transformar as medidas de aceleração do sistema de coordenadas do Corpo ( $A^b$ ) para o do modelo navegado ( $A^n$ ). O sistema de coordenadas de navegação utilizado será o NAV, sendo seu centro coincidente ao centro do sistema de coordenadas do Corpo.

De acordo com o teorema de rotação de Euler, qualquer rotação pode ser descrita por três ângulos, conhecidos como ângulos de Euler. Estes ângulos podem ser escritos em termos de matrizes de rotação que multiplicadas resultam na matriz de transformação do sistema, Eq. (37).

$$A^n = C_b^n A^b \quad (37)$$

na qual:

$A^n \in \mathbb{R}^3$  – aceleração no sistema de coordenadas NAV;

$A^b \in \mathbb{R}^3$  – aceleração no sistema de coordenadas do Corpo; e

$C_b^n \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  – matriz de Rotação entre o sistema de coordenadas do Corpo e NAV.

A rotação entre o sistema de coordenadas NAV para do Corpo é dada na seguinte ordem de rotação:

1. Roll ( $\phi$ ): Rotação em torno do eixo X. Medido positivo no sentido horário.
2. Pitch ( $\theta$ ): Rotação em torno do eixo Y. Medido positivo para cima do plano horizontal local.
3. Yaw Plataforma ( $\psi^p$ ): Rotação em torno do eixo Z. Medido positivo no sentido horário a partir do eixo Norte, onde  $\psi^p = \psi + \alpha$ .

Lembrando a seguinte propriedade da matriz rotação  $C_a^b = C_b^{a-1}$ , a rotação entre o Corpo e NAV é descrita pelas equações

$$C_b^{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_c & \phi_s \\ 0 & -\phi_s & \phi_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_c & 0 & -\theta_s \\ 0 & 1 & 0 \\ \theta_s & 0 & \theta_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_c^p & \Psi_s^p & 0 \\ -\Psi_s^p & \Psi_c^p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$C_b^n = \begin{bmatrix} \theta_c \Psi_c^p & \theta_c \Psi_s^p & -\theta_s \\ -\phi_c \Psi_s^p + \phi_s \theta_s \Psi_c^p & \phi_c \Psi_c^p + \phi_s \theta_s \Psi_s^p & \phi_s \theta_c \\ \phi_s \Psi_s^p + \phi_c \theta_s \Psi_c^p & -\phi_s \Psi_c^p + \phi_c \theta_s \Psi_s^p & \phi_c \theta_c \end{bmatrix} \quad (39)$$

na qual:

subscritos S e C significam seno e cosseno, respectivamente;

$\Psi$ ,  $\phi$ ,  $\theta$  – ângulos yaw, roll e pitch, respectivamente;

$\psi^p$  – ângulo yaw da plataforma; e

$\alpha$  – ângulo de Azimuth.

### 4.3.3.

#### Bloco 2 – Velocidade $V^n$ .

A aceleração medida pelo sensor precisa ser compensada, pois este mede forças que não correspondem ao movimento do veículo, sendo estas a centrípeta, a Coriolis e a gravitacional de massa.

A Terra, por possuir uma massa grande, gera uma força de atração de massa vertical à sua superfície e em direção a seu centro. Esta força faz com que um acelerômetro estacionário meça uma aceleração vertical e de direção oposta ao centro da Terra.

Ao ser utilizado um sistema de coordenada que está girando, as equações de movimento são alteradas, sendo necessário incluir forças fictícias que não existirão caso seja utilizado um sistema de coordenada inercial. Devido à rotação do sistema de coordenadas ser uniforme, apenas as forças centrípeta e de Coriolis estarão presentes.

Relembrando a lei de Coriolis: sejam dois sistemas de coordenadas ortogonais  $a$  e  $b$ , onde o sistema  $b$  está girando com relação ao sistema  $a$  com velocidade angular  $\omega_{ab}$ . A derivada de qualquer vetor  $A$  no sistema  $a$  em termos da derivada no sistema  $b$

é dada pela Eq. (40), onde as componentes podem estar em qualquer sistema de coordenadas, que para exemplificar esta derivada será expressa em termos do sistema  $c$ .

$$\left(\frac{dA}{dt}\Big|_a\right)^c = \left(\frac{dA}{dt}\Big|_b\right)^c + \omega_{ab}^c \times A^c \quad (40)$$

na qual:

superscritos  $c$  – Indica que o vetor está no sistema de coordenadas  $c$ ;

$A \in \mathbb{R}^3$  – vetor qualquer;

$\frac{dA}{dt}\Big|_a \in \mathbb{R}^3$  – derivada do vetor  $A$  no sistema  $a$ ;

$\frac{dA}{dt}\Big|_b \in \mathbb{R}^3$  – derivada do vetor  $A$  no sistema  $b$ ; e

$\omega_{ab} \in \mathbb{R}^3$  – velocidade angular de  $b$  relativo a  $a$ .

A posição de um veículo sobre a Terra pode ser expressa no sistema de coordenadas ECI, que é um sistema inercial, por um vetor  $R$ . A segunda derivada do vetor posição  $R$  é o vetor aceleração do veículo. Devido ao sistema de coordenadas ser inercial, a aceleração real difere da medida apenas devido à força gravitacional. A Eq. (41) expressa esta relação no sistema de coordenadas NAV, no qual a aceleração foi medida. A derivada do vetor  $R$  se encontra no sistema ECI, logo será aplicada a lei de Coriolis para representar esta derivada no sistema NAV.

$$\frac{d^2 R}{dt^2}\Big|_i = A^n + g_m^n \quad (41)$$

na qual:

superscrito  $n$  – indica que o vetor está no sistema de coordenadas NAV;

$A \in \mathbb{R}^3$  – aceleração medida;

$R \in \mathbb{R}^3$  – posição real;

$\frac{d^2 R}{dt^2}\Big|_i \in \mathbb{R}^3$  – derivada segunda do vetor  $R$  no sistema ECI, é a aceleração

real; e

$g_m^n \in \mathbb{R}^3$  – aceleração gravitacional de massa.

O sistema NAV está girando com uma velocidade angular  $\rho$  com relação ao sistema ECEF, que por sua vez gira com velocidade angular  $\Omega$  com relação ao sistema ECI, logo NAV gira com velocidade angular  $\rho + \Omega$  com relação a ECI. A derivada do vetor  $V$  com relação ao sistema ECI pode ser então expressa em termo da derivada no sistema NAV através da lei de Coriolis

$$\left. \frac{dR}{dt} \right|_i = \left. \frac{dR}{dt} \right|_e + \Omega \times R \quad (42)$$

na qual:

$R \in \mathbb{R}^3$  – posição real;

$\left. \frac{dR}{dt} \right|_i \in \mathbb{R}^3$  – derivada do vetor  $R$  no sistema  $ECI$ ;

$\left. \frac{dR}{dt} \right|_e \in \mathbb{R}^3$  – derivada do vetor  $R$  no sistema  $ECEF$ ;  $e$

$\Omega \in \mathbb{R}^3$  – velocidade angular de  $ECEF$  relativo a  $ECI$ .

A derivada do vetor de posição com relação ao sistema ECEF é o vetor velocidade  $V$ . Substituindo e diferenciando a Eq. (42) com relação ao sistema ECI, obtém-se

$$\left. \frac{d^2R}{dt^2} \right|_i = \left. \frac{dV}{dt} \right|_i + \left. \frac{d\Omega}{dt} \right|_i \times R + \Omega \times \left. \frac{dR}{dt} \right|_i \quad (43)$$

na qual:

$R \in \mathbb{R}^3$  – posição real;

$V \in \mathbb{R}^3$  – velocidade real;

$\left. \frac{d^2R}{dt^2} \right|_i \in \mathbb{R}^3$  – derivada segunda do vetor  $R$  no sistema  $ECI$ ;

$\left. \frac{dV}{dt} \right|_i \in \mathbb{R}^3$  – derivada do vetor  $V$  no sistema  $ECI$ ;

$\Omega \in \mathbb{R}^3$  – velocidade angular de  $ECEF$  relativo a  $ECI$ ; e

$\left. \frac{d\Omega}{dt} \right|_i \in \mathbb{R}^3$  – derivada da velocidade angular no sistema  $ECI$ .

A velocidade de rotação da Terra é constante com relação ao sistema ECI, logo sua derivada é igual a zero. Substituindo a Eq. (42) na (43), obtém-se

$$\left. \frac{d^2 R}{dt^2} \right|_i = \left. \frac{dV}{dt} \right|_i + \Omega \times (V + \Omega \times R) \quad (44)$$

na qual:

$R \in \mathbb{R}^3$  – posição real;

$V \in \mathbb{R}^3$  – velocidade real;

$\left. \frac{d^2 R}{dt^2} \right|_i \in \mathbb{R}^3$  – derivada segunda do vetor  $R$  no sistema  $ECI$ ;

$\left. \frac{dV}{dt} \right|_i \in \mathbb{R}^3$  – derivada do vetor  $V$  no sistema  $ECI$ ; e

$\Omega \in \mathbb{R}^3$  – velocidade angular de  $ECEF$  relativo a  $ECI$ .

O sistema NAV está girando com uma velocidade angular  $\rho$  com relação ao sistema ECEF, que por sua vez gira com velocidade angular  $\Omega$  com relação ao sistema ECI, logo NAV gira com velocidade angular  $\rho + \Omega$  com relação a ECI. A derivada do vetor  $V$  com relação ao sistema ECI pode ser então expressa em função da derivada no sistema NAV através da lei de Coriolis

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_i = \left. \frac{dV}{dt} \right|_n + (\Omega + \rho^n) \times V \quad (45)$$

na qual:

$V \in \mathbb{R}^3$  – velocidade real;

$\left. \frac{dV}{dt} \right|_i \in \mathbb{R}^3$  – derivada do vetor  $V$  no sistema  $ECI$ ;

$\left. \frac{dV}{dt} \right|_n \in \mathbb{R}^3$  – derivada do vetor  $V$  no sistema  $NAV$ ;

$\Omega \in \mathbb{R}^3$  – velocidade angular de  $ECEF$  relativo a  $ECI$ ; e

$\rho \in \mathbb{R}^3$  – velocidade angular de  $NAV$  relativo a  $ECEF$ .

Substituindo as Eq. (44) e (45) na (41), re-arranjando e representando no sistema de coordenadas NAV, obtém-se

$$\dot{V}^n = A^n - (\rho^n + 2\Omega^n) \times V^n + g_m^n - \Omega^n \times (\Omega^n \times R^n) \quad (46)$$

na qual:

subscrito n – indica que o vetor está no sistema de coordenadas NAV;

$\dot{V} \in \mathbb{R}^3$  – aceleração real;

$V \in \mathbb{R}^3$  – velocidade real;

$A \in \mathbb{R}^3$  – aceleração medida;

$R \in \mathbb{R}^3$  – posição real;

$g_m^n \in \mathbb{R}^3$  – aceleração gravitacional de massa;

$\Omega \in \mathbb{R}^3$  – velocidade angular de *ECEF* relativo a *ECI*;

$\rho \in \mathbb{R}^3$  – velocidade angular de *NAV* relativo a *ECEF*;

$(\rho + 2\Omega) \times V \in \mathbb{R}^3$  – aceleração de Coriolis; e

$\Omega \times (\Omega \times R) \in \mathbb{R}^3$  – aceleração centrífuga.

A força centripeda e de atração de massa são normais à superfície da Terra e dependentes do modelo escolhido para representar a mesma. Essas duas forças em conjunto representam a gravidade normal à superfície. O WGS 84 fornece um modelo gravitacional, que é composto de 130.367 parâmetros devido às anomalias do campo gravitacional. Um modelo mais simplificado descrito em (BOSE, 82) é dado por

$$g_m^n + \Omega^n \times (\Omega^n \times R^n) = g^n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g_z \end{bmatrix} \quad (47)$$

na qual:

subscrito n – sistema de coordenadas NAV.;

$g \in \mathbb{R}^3$  – força gravitacional;

$\Omega \times (\Omega \times R) \in \mathbb{R}^3$  – aceleração centrífuga;

$g_m \in \mathbb{R}^3$  – força de atração de massa; e

$g_z$  – gravidade no eixo z do sistema NAV.

$$g_z = -g_o \left[ 1 - 2 \left( 1 + \frac{R_a - R_b}{R_a} + \frac{\Omega^2 R_a^2 R_b}{GM} \right) \frac{h}{R_a} \right]$$

$$+\left(\frac{5}{2} \frac{\Omega^2 R_a^2 R_b}{GM} - \frac{R_a - R_b}{R_a}\right) \sin^2 \Phi] \quad (48)$$

e:

$g_z$  – gravidade no eixo z do sistema NAV, eixo normal a superfície;

$g_0$  – gravidade no Equador;

$R_a$  – raio Equatorial;

$R_b$  – raio Polar;

$\Omega$  – velocidade angular da Terra;

$GM$  – constante gravitacional da Terra, que vale  $3986004,418 \cdot 10^8 \text{ m}^3/\text{s}^2$ ;

$h$  – altitude no sistema ECEF; e

$\Phi$  – latitude no sistema ECEF.

Reescrevendo a Eq. (46) utilizando a (47) obtém-se a (49).

$$\dot{V}^n = A^n - (\rho^n + 2\Omega^n) \times V^n + g^n \quad (49)$$

na qual:

Subscrito n – indica que o vetor está no sistema de coordenadas ENU.

$\dot{V} \in \mathbb{R}^3$  – aceleração real;

$V \in \mathbb{R}^3$  – velocidade real;

$A \in \mathbb{R}^3$  – aceleração medida;

$g^n \in \mathbb{R}^3$  – aceleração gravitacional;

$\Omega \in \mathbb{R}^3$  – velocidade angular de ECEF relativo a ECI; e

$\rho \in \mathbb{R}^3$  – velocidade angular de NAV relativo a ECEF.

#### 4.3.4.

#### Bloco 3 – Velocidade angular do sistema NAV relativo a ECEF ( $\rho^n$ ).

Os sistemas NAV e ENU são localmente tangentes a Terra sendo, portanto, apenas válidos localmente. Ao existir movimento do veículo, paralelo à superfície da Terra, ambos os sistemas precisam ser retraçados. A forma da Terra no modelo escolhido é um elipsóide, logo os sistemas apresentarão uma rotação ao ser retraçados em uma nova localidade, vide Fig. 48. O sistema ECEF gira com a Terra, assim, a

rotação relativa entre ECEF e os sistemas ENU e NAV será apenas devido à rotação do sistema ao ser retraçado em um novo ponto da superfície.

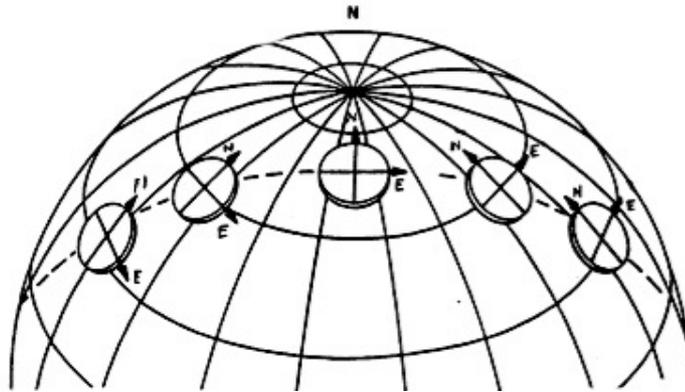


Figura 10 – Rotação do sistema (BOSE. et. al., 1982)

A velocidade angular do sistema ENU relativo ao ECEF em torno do eixo  $E$  ( $\rho_E$ ) e  $N$  ( $\rho_N$ ) é dependente da velocidade do veículo na direção do eixo  $N$  e  $E$  respectivamente (vide Fig. 49)

$$\rho_E = \frac{-V_N}{R_m + h} \quad (50)$$

$$\rho_N = \frac{V_E}{R_p + h} \quad (51)$$

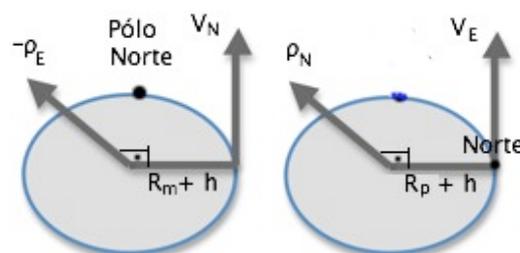


Figura 11 – Velocidade angular em torno do eixo E e N.

O sistema NAV está rotacionado de  $\alpha$  (Wander Azimuth) com relação ao ENU, vide Fig. 50. A velocidade angular em torno do eixo  $x$  ( $\rho_x$ ) e  $y$  ( $\rho_y$ ) é descrita como

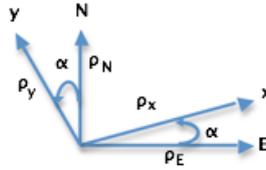


Figura 12 – Velocidade Angular no sistema NAV

$$\rho_x = \rho_E \cos(\alpha) + \rho_N \sin(\alpha) \quad (52)$$

$$\rho_y = -\rho_E \sin(\alpha) + \rho_N \cos(\alpha) \quad (53)$$

Substituindo os termos  $\rho_E$  e  $\rho_N$  das Eqs. (52) e (53), obtém-se

$$\rho_x = -V_y \left( \frac{\sin^2 \alpha}{R_p + h} + \frac{\cos^2 \alpha}{R_m + h} \right) - V_x \left( \frac{1}{R_m + h} - \frac{1}{R_p + h} \right) \cos(\alpha) \sin(\alpha) \quad (54)$$

$$\rho_y = V_x \left( \frac{\cos^2 \alpha}{R_p + h} + \frac{\sin^2 \alpha}{R_m + h} \right) + V_y \left( \frac{1}{R_m + h} - \frac{1}{R_p + h} \right) \cos(\alpha) \sin(\alpha) \quad (55)$$

Utilizando as variáveis auxiliares  $R_y$ ,  $R_x$  e  $T$  definidas como

$$\frac{1}{R_y} = \frac{\sin^2 \alpha}{R_p + h} + \frac{\cos^2 \alpha}{R_m + h} \quad (54)$$

$$\frac{1}{R_x} = \frac{\cos^2 \alpha}{R_p + h} + \frac{\sin^2 \alpha}{R_m + h} \quad (55)$$

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{R_m + h} - \frac{1}{R_p + h} \quad (56)$$

Reescreve-se as Eq. (54) e (55) como

$$\rho_y = V_x \left( \frac{1}{R_x} \right) + V_y \frac{1}{T} \quad (57)$$

$$\rho_x = -V_y \left( \frac{1}{R_y} \right) - V_x \frac{1}{T} \quad (58)$$

Tendo em vista que a altura  $h$  é muito pequena comparada com o raio meridional e com o principal e que o valor de ambos os raios são próximos, pode-se aproximar

$$\rho^n \approx \frac{1}{R}(i_z \times V^n) + \rho_z^n i_z^n \quad (59)$$

A velocidade angular total é a combinação linear das variações de posições, dada pela Eq. (60), vide Fig. 51. A velocidade angular em torno do eixo  $z$  ( $\rho_z$ ) é dada pela componente vertical da velocidade angular total, Eq. (61) e (62).

A taxa de variação do ângulo azimuth ( $\alpha$ ) será escolhida de acordo com a Eq. (63), o que é definido na literatura como Azimuth livre. Logo, a velocidade angular em torno do eixo  $z$  ( $\rho_z$ ) será nula.

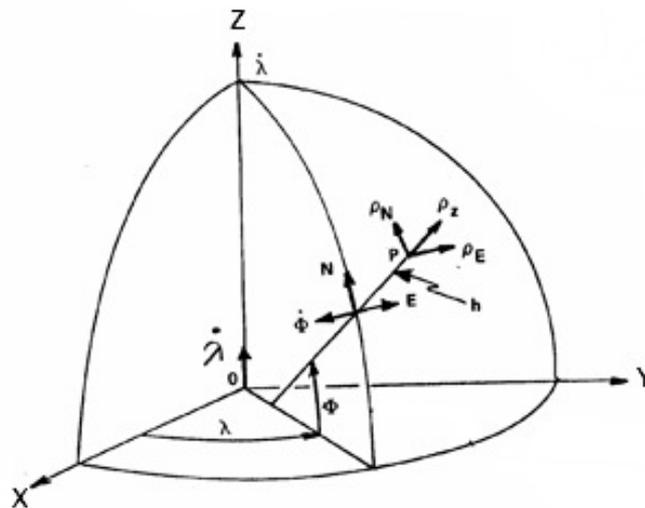


Figura 13 – Velocidade Angular total. (BOSE et. al., 1982)

$$\rho = -\dot{\Phi}i_E + \dot{\lambda}i_z^e + \dot{\alpha}i_U \quad (60)$$

$$\rho_z^n = \rho i_z^n \quad (61)$$

$$\rho_z^n = \dot{\lambda} \sin(\Phi) + \dot{\alpha} \quad (62)$$

$$\dot{\alpha} = -\dot{\lambda} \sin \Phi \quad (63)$$

na qual:

- subscrito n – sistema de coordenadas NAV;
- subscrito e – sistema de coordenadas ECEF;
- subscrito E, N e U – eixos do sistema ENU;
- subscrito x e y – eixos do sistema NAV;
- i – vetor unitário;
- $\rho$  – velocidade angular;
- V – velocidade;
- $R_m$  – raio meridional de curvatura do modelo da Terra;
- $R_p$  – raio principal de curvatura do modelo da Terra;
- h – altura;
- $\Phi$  – latitude;
- $\lambda$  – longitude; e
- $\alpha$  – azimuth.

#### 4.3.5. Bloco 4 – Posição Angular ( $C_e^n$ )

##### Transformação de Coordenadas ECEF para NAV

A matriz de rotação  $C_e^n$ , Eqs. (64) e (65), transforma o sistema ECEF para NAV e é descrita por ângulos de Euler, vide Fig. 52, na seguinte ordem:

“wander azimuth” ( $\alpha$ ) - rotação em torno do eixo Z;

latitude ( $-\Phi$ ) - rotação em torno do eixo X; e

longitude ( $\lambda$ ) - rotação em torno do eixo Y.

$$C_e^n = \begin{bmatrix} \alpha_c & \alpha_s & 0 \\ -\alpha_s & \alpha_c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_c & -\Phi_s \\ 0 & \Phi_s & \Phi_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_c & 0 & -\lambda_s \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda_s & 0 & \lambda_c \end{bmatrix} \quad (64)$$

$$C_e^n = \begin{bmatrix} \alpha_c \lambda_c - \alpha_s \Phi_s \lambda_s & \alpha_s \Phi_c & -\alpha_c \lambda_s - \alpha_s \Phi_s \lambda_c \\ -\alpha_s \lambda_c - \alpha_c \Phi_s \lambda_s & \alpha_c \Phi_c & \alpha_s \lambda_s - \alpha_c \Phi_s \lambda_c \\ \Phi_c \lambda_s & \Phi_s & \Phi_c \lambda_c \end{bmatrix} \quad (65)$$

na qual:

Subscrito S e C – significam seno e coSseno, respectivamente; e

$\alpha, \Phi, \lambda$  – ângulos de Euler (“Wander Azimuth”, Latitude e Logitude, respectivamente).

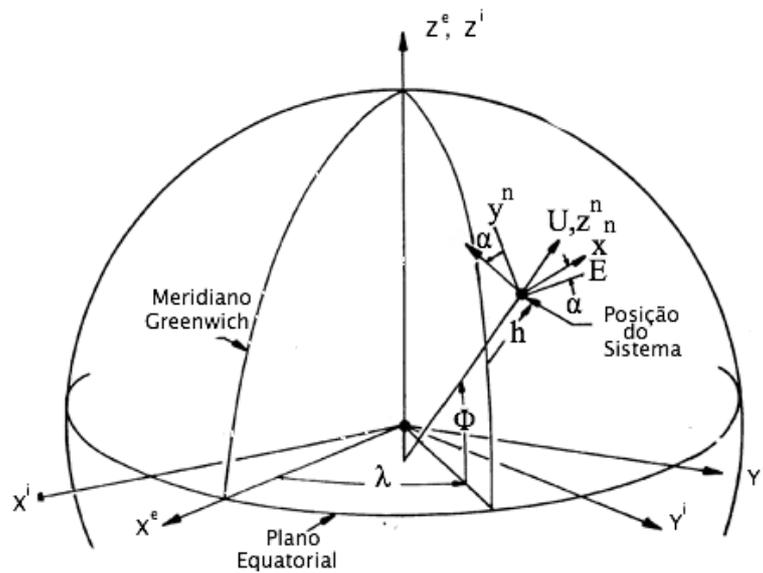


Figura 14 – Ângulos de Euler da Matriz de Rotação  $C_e^n$ . (BOSE et. al., 1982)

### Obtendo “Wander Azimuth” ( $\alpha$ ), Latitude ( $\Phi$ ) e Logitude ( $\lambda$ ).

Utilizando a matriz de rotação  $C_e^n$ , Eq. (65), e relações trigonométricas obtêm-se os três ângulos  $\alpha, \Phi, \lambda$

$$\alpha = \tan^{-1}(C_e^n(1,2)/C_e^n(2,2)) \quad (66)$$

$$\Phi = \sin^{-1}(C_e^n(3,2)) \quad (67)$$

$$\lambda = \tan^{-1}(C_e^n(3,1)/C_e^n(3,3)) \quad (68)$$

### Derivada da Matriz de Rotação

Seja a matriz de rotação da coordenada *ECEF* e *NAV* descrita por  $C_e^n$ . Tendo em vista a ortogonalidade, pode-se escrever

$$C_e^n(t)C_e^{nT}(t) = I \quad (69)$$

Diferenciando com relação ao tempo, obtém-se a identidade descrita

$$\dot{C}_e^n(t)C_e^{nT}(t) + C_e^n(t)(\dot{C}_e^n)^T(t) = 0 \quad (70)$$

Criando uma variável auxiliar  $S(t)$ , define-se

$$S(t) = \dot{C}_e^n(t)C_e^{nT}(t) \quad (71)$$

Substituindo a Eq. (72) na (73), temos que  $S$  é Skew Simétrica já que satisfaz a

$$S^T = -S \quad (72)$$

Multiplicando ambos os lados da eq. (70) por  $C_e^n(t)$ , obtém-se

$$\dot{C}_e^n(t) = S(t)C_e^n(t) \quad (73)$$

Considere o vetor  $v(t)$  expresso com relação a um vetor constante  $v'$  através de

$$v(t) = C_e^n(t)v' \quad (74)$$

Diferenciando a Eq. (74), obtém-se

$$\dot{v}(t) = \dot{C}_e^n(t)v' \quad (75)$$

Usando a Eq. (73), pode-se reescrever a Eq. (75) como

$$\dot{v}(t) = S(t)C_e^n(t)v' \quad (76)$$

Seja o vetor  $w_{ne}^n$  a velocidade angular da coordenada ECEF com relação a NAV, expressa no sistema ENU. Pode-se então escrever

$$\dot{v}(t) = w_{ne}^n(t) \times C_e^n(t)v' \quad (77)$$

Logo, o operador  $S(t)$  descreve o produto de vetores entre  $w_{ne}^n$  e o  $C_e^n(t)v'$ . A matriz  $S(t)$  é de tal forma que seus elementos simétricos com relação à diagonal principal representam os componentes do vetor  $w_{ne}^n$  de acordo com

$$S(w_{ne}^n) = \begin{bmatrix} 0 & -w_z & w_y \\ w_z & 0 & -w_x \\ -w_y & w_x & 0 \end{bmatrix} \quad (78)$$

Onde  $w_{ne}^n = -w_{en}^n = -\rho^n$ . Substituindo a Eq. (78) na (73) obtém-se

$$\dot{C}_e^m(t) = -S(\rho^n)C_e^m(t) \quad (79)$$

na qual:

$\dot{C}_e^m \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  – derivada da matriz de rotação entre os sistemas ECEF e NAV;

$C_e^m \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  – matriz de rotação entre os sistemas ECEF e ENU; e

$S(\rho^n) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  – matriz anti-simétrica da velocidade angular do sistema NAV

com relação ao sistema ECEF, expressa no sistema NAV.

#### 4.3.6.

#### Bloco 5 – Velocidade Angular da Terra expressa nas Coordenadas NAV ( $\Omega^n$ ).

No modelo da Terra escolhido anteriormente, tem-se a velocidade angular da Terra ocorrendo em torno do eixo Z do modelo ECEF. A velocidade angular da Terra no modelo de navegação ENU é encontrado através de

$$\Omega^n = C_e^n \Omega^e \quad (80)$$

na qual:

subscrito  $n$  e  $e$  – significa sistemas de coordenadas ENU e ECEF, respectivamente, nos quais os vetores estão sendo representados;

$C_e^n \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  – matriz de rotação entre ECEF e NAV; e

$\Omega \in \mathbb{R}^3$  – vetor velocidade angular da Terra.

#### 4.3.7.

#### **Bloco 6 – Velocidade Angular do sistema NAV com relação ao sistema ECI ( $w_{in}^n$ ).**

O sistema ENU possui uma velocidade angular  $\rho^n$  com relação ao sistema ECEF, que por sua vez possui uma velocidade angular  $\Omega^n$  com relação ao sistema ECI. Logo, a velocidade angular de NAV com relação ao ECI é dada por

$$\omega_{in}^n = \rho^n + \Omega^n \quad (81)$$

na qual:

subscrito  $n$  – vetores expressos no sistema ENU;

$\omega_{in}^n \in \mathbb{R}^3$  – velocidade angular do sistema NAV com relação ao ECI;

$\rho^n \in \mathbb{R}^3$  – velocidade angular do sistema NAV com relação ao ECEF; e

$\Omega^n \in \mathbb{R}^3$  – velocidade angular do sistema ECEF com relação ao ECI.

#### 4.3.8.

#### **Bloco 7 – Orientação ( $C_b^n$ ).**

Utilizando o mesmo raciocínio do bloco 4, obtém-se a derivada da matriz de rotação entre o sistema de coordenadas do Corpo e NAV,  $\dot{C}_b^n$ . Esta derivada depende da própria matriz de rotação,  $C_b^n$ , assim como da matriz anti-Simétrica,  $S(w_{nb}^n)$ , representando os componentes do vetor velocidade angular entre o sistema do Corpo e NAV expresso no sistema NAV,  $w_{nb}^n$ , por

$$\dot{C}_b^n = S(w_{nb}^n)C_b^n \quad (82)$$

As velocidades angulares entre o sistema do Corpo e o ECI,  $w_{ib}$ , pode ser escrita como uma soma das velocidades angulares entre os sistemas NAV e ECI,  $w_{in}$ , com a entre os sistemas do Corpo e NAV,  $w_{nb}$ , logo

$$w_{ib} = w_{in} + w_{nb} \quad (83)$$

Substituindo a Eq. (83) em (82), obtém-se

$$\dot{C}_b^m = S(w_{ib}^n - w_{in}^n)C_b^m = S(w_{ib}^n)C_b^m - S(w_{in}^n)C_b^m \quad (84)$$

Considerando a igualdade dada por

$$C_b^n S(w_{ib}^b) = C_b^n [C_n^b C_b^n] S(w_{ib}^b) [C_n^b C_b^n] = S(w_{ib}^n) C_b^n \quad (85)$$

pode-se então reescrever a Eq. (84) na forma dada por

$$\dot{C}_b^m = C_b^n S(w_{ib}^b) - S(w_{in}^n) C_b^m \quad (86)$$

na qual:

$\dot{C}_b^m \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  – derivada da matriz de rotação entre o sistema de coordenadas do Corpo e NAV;

$C_b^m \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  – matriz de rotação entre o sistema do Corpo e NAV;

$w_{ib}^b \in \mathbb{R}^3$  – velocidade angular entre o Corpo e o sistema ECI expresso no sistema de coordenadas do Corpo, ou seja, valor medido pelos giroscópios; e

$w_{in}^n \in \mathbb{R}^3$  – velocidade angular entre o sistema NAV e o ECI expresso no sistema de coordenadas NAV; este é o valor computado através da posição e velocidade.

**Obtendo Roll ( $\phi$ ), Pitch ( $\theta$ ) e Yaw ( $\psi$ ).**

Utilizando a matriz de rotação  $C_b^n$  e relações trigonométricas obtêm-se os três ângulos  $\phi$ ,  $\theta$  e  $\psi$

$$\phi = \tan^{-1}(C_b^n(3, 2)/C_b^n(3, 3)) \quad (87)$$

$$\theta = \sin^{-1}(C_b^n(3, 1)) \quad (88)$$

$$\psi = \tan^{-1}(C_b^n(1, 1)/C_b^n(1, 2)) \quad (89)$$

#### 4.3.9. Condições Iniciais

Os sensores inerciais são apenas capazes de detectar mudanças sofridas pelo mesmo. Logo, para se chegar a uma solução na navegação é, necessário saber-se os valores iniciais de velocidade, posição e orientação. A velocidade e posição iniciais são geralmente adquiridas a partir de outros sensores como o GPS. A orientação inicial é adquirida em duas etapas, sendo que em ambas o sensor inercial precisa estar estático. Na primeira etapa, o pitch( $\theta$ ) e o roll( $\phi$ ) são calculados através da Eqs. (90) e (91), respectivamente. Essas equações são obtidas, utilizando-se do fato que sob condições estáticas as medidas dos acelerômetros medem apenas a força gravitacional. Na segunda etapa o yaw( $\Psi$ ) é calculado utilizando-se a Eq. (92), a qual é obtida do fato que, sob condições estáticas, os valores medidos pelos giroscópios são apenas devidos à rotação da Terra. Entretanto, este cálculo para o yaw só é possível para sensores inerciais de alta precisão; a alternativa para se estimar o valor do yaw é utilizar bússolas magnéticas ou a velocidade do GPS em condições dinâmicas.

$$\theta = \sin^{-1} \frac{A_x^b}{g} \quad (90)$$

$$\phi = \sin^{-1} \frac{A_y^b}{g} \quad (91)$$

$$\psi = \tan^{-1} \frac{\omega_y^b \cos(\phi)}{\omega_x^b \cos(\theta)} \quad (92)$$

na qual:

subscrito  $b$  – indica que as medidas se encontram no sistema de coordenadas do corpo;

$A_x$  - aceleração medida no eixo x sob condições estáticas;

$A_y$  - aceleração medida no eixo y sob condições estáticas;

$\omega_x$  – velocidade angular no eixo x sob condições estáticas;

$\omega_y$  – velocidade angular no eixo y sob condições estáticas ;

$g$  – valor da gravidade; e

$\Psi, \phi, \theta$  – ângulos de Euler (yaw, pitch e roll, respectivamente).

#### 4.4. Erro na Navegação Inercial

O erro na navegação inercial é resultante dos erros dos acelerômetros e giroscópios do sensor inercial; estes se propagam pela solução da navegação inercial, degradando a mesma. O equacionamento do erro na navegação inercial, aqui desenvolvido, assumirá que os erros na posição angular são pequenos seguindo a linha do trabalho de (BOSE et. al., 1982). Em (KONG et. al., 2000) este mesmo equacionamento é desenvolvido para erros grandes.

##### 4.4.1. Erro na Posição Angular ( $\delta C_e^n$ )

A posição angular na Navegação Inercial é dada pelos ângulos wander azimuth ( $\alpha$ ), Latitude ( $\Phi$ ) e Longitude ( $\lambda$ ). Esta posição é computada, logo existe um erro entre o valor computado e o atual, vide Fig. 53 e 54. Definido o erro como **Erro = Computado - Atual**, tem-se o erro no Wander Azimuth ( $\delta\alpha$ ), na Latitude ( $\delta\Phi$ ) e na Longitude ( $\delta\lambda$ ).

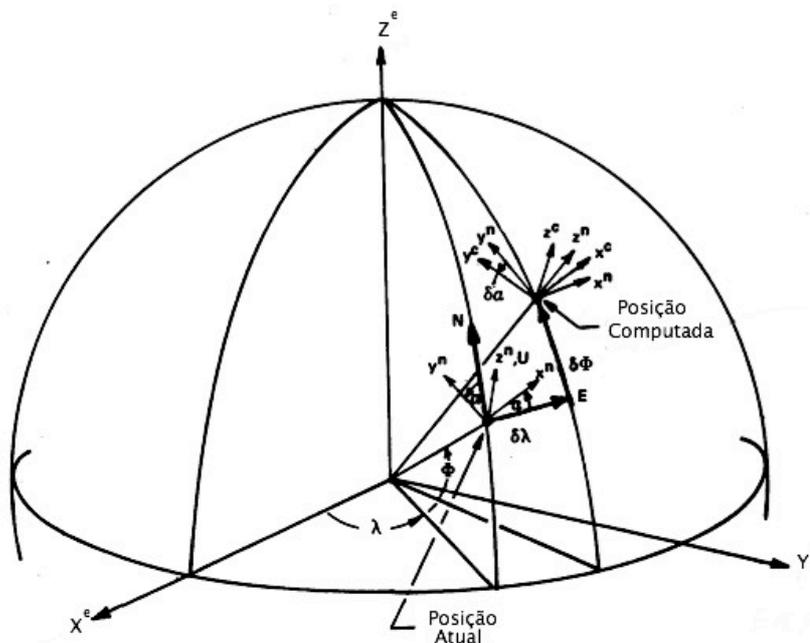


Figura 15 – Erro na Posição Angular. (BOSE et. al., 1982)

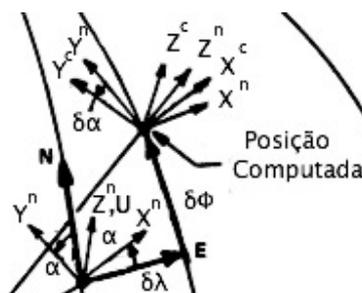


Figura 16 – Erro na Posição Angular Zoom. (BOSE et. al., 1982)

A posição atual no sistema NAV é encontrada através da matriz  $C_e^n$  que transforma do sistema de coordenadas ECEF para NAV.  $C_e^n$  é construída utilizando os valores reais dos ângulos “Wander Azimuth” ( $\alpha$ ), Latitude ( $\Phi$ ) e Longitude ( $\lambda$ ).

A posição computada no sistema NAV é calculada através da matriz  $C_e^c$  que rotaciona o sistema ECEF para o NAV Computado. A matriz é construída de maneira análoga à na Eq. (65), sendo os ângulos de rotação os valores reais somados aos erros da computação: Wander Azimuth computado ( $\alpha + \delta\alpha$ ), Latitude computada ( $\Phi + \delta\Phi$ ) e Longitude computada ( $\lambda + \delta\lambda$ ).

A matriz  $C_n^c$  transforma o sistema NAV para o NAV Computado. Os ângulos de Euler desta matriz de rotação são: erros no “Wander Azimuth” ( $\delta\alpha$ ), na Latitude ( $\delta\Phi$ ) e na Longitude ( $\delta\lambda$ ). O diagrama da Fig. 55 exemplifica as três transformações.

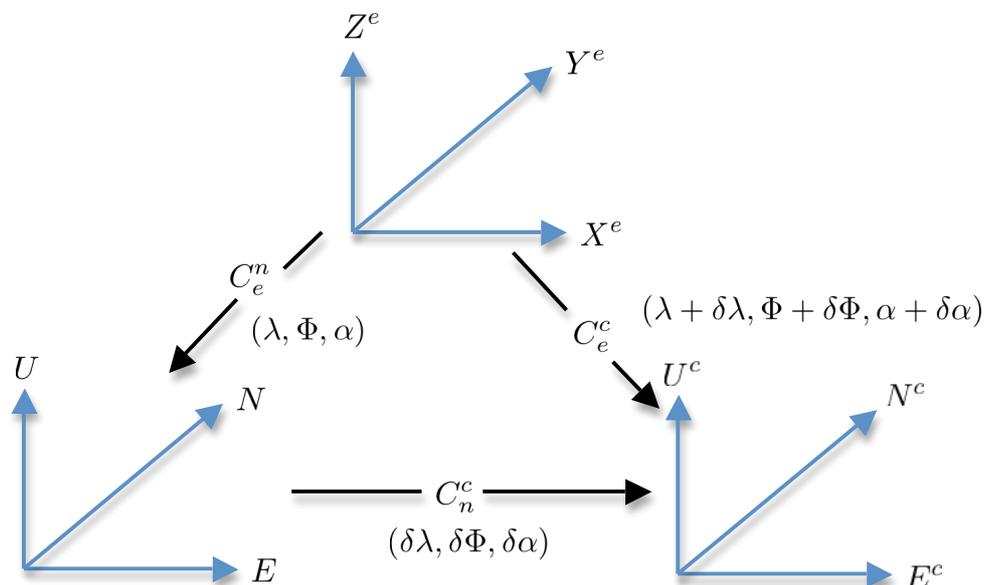


Figura 17 – Diagrama de Transformação do Erro na Posição Angular.

A matriz de posição NAV Computada pode ser escrita como a matriz da posição real somada a uma matriz de erro, vide Eq. (93), ou como a matriz de posição real rotacionada, vide Eq. (94).

$$C_e^c = C_e^n + \delta C_e^n \quad (93)$$

$$C_e^c = C_n^c C_e^n \quad (94)$$

Considerando o vetor

$$\delta\theta = [\delta\lambda, \delta\Phi, \delta\alpha] \quad (95)$$

Para ângulos pequenos pode-se escrever a igualdade abaixo para a matriz de transformação entre o real e o computado

$$C_c^n = I + S(\delta\theta^n) \quad (96)$$

Substituindo a Eq. (96) na (94),

$$C_e^c = [I - S(\delta\theta^n)]C_n^e \quad (97)$$

Reescrevendo a Eq. (93) utilizando o resultado obtido na Eq. (97),

$$\delta C_e^n = -S(\delta\theta^n)C_e^n \quad (98)$$

na qual:

$\delta C_e^n \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  – erro da matriz de rotação entre o sistema de coordenadas do ECEF e NAV;

$S(\delta\theta^n) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  – matriz anti-simétrica do vetor erro de posição; e

$C_e^n \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  – matriz de rotação entre o sistema de coordenadas do ECEF e NAV.

#### 4.4.2. Erro na Orientação ( $\delta C_b^n$ )

Análogo ao que ocorre no erro da posição angular os ângulos Yaw ( $\psi$ ), Pitch ( $\theta$ ) e Roll ( $\phi$ ), utilizados para transformar do sistema de coordenadas do Corpo para NAV,  $C_b^n$ , possuem erros ao serem computados. Esses erros expressos como ângulos no sistema de coordenadas NAV são  $\phi^n = [\phi_E \ \phi_N \ \phi_U]^T$ . Considerando os erros pequenos pode-se equacionar a matriz do erro de transformação do Corpo para NAV de modo análogo à seção anterior, Eq. (99).

$$\delta C_b^n = -S(\phi^n)C_b^n \quad (99)$$

onde

$\delta C_b^n \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  – erro da matriz de rotação entre o sistema de coordenadas do Corpo e NAV;

$S(\phi^n) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  – matriz anti-simétrica do vetor erro; e

$C_b^n \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  – matriz de rotação entre o sistema de coordenadas do Corpo e NAV.

#### 4.5. Propagação do Erro

O erro dos sensores inerciais e acelerômetros se propagam na solução da navegação inercial de acordo com o diagrama de blocos dado pela Fig. 56. Essas equações de propagação estão deduzidas a seguir e se utilizam de algumas relações de matrizes anti-simétricas dadas pelas

$$S(w^a)V^a = w^a \times V^a \quad (100)$$

$$S(w^a)S(V^a) - S(V^a)S(w^a) = S(w^a \times V^a) \quad (101)$$

$$C_a^b S(w^a) C_b^a = S(w^b) \quad (102)$$

$$S(w^a) = \begin{bmatrix} 0 & -w_z^a & w_y^a \\ w_z^a & 0 & -w_x^a \\ -w_y^a & w_x^a & 0 \end{bmatrix} \quad (103)$$

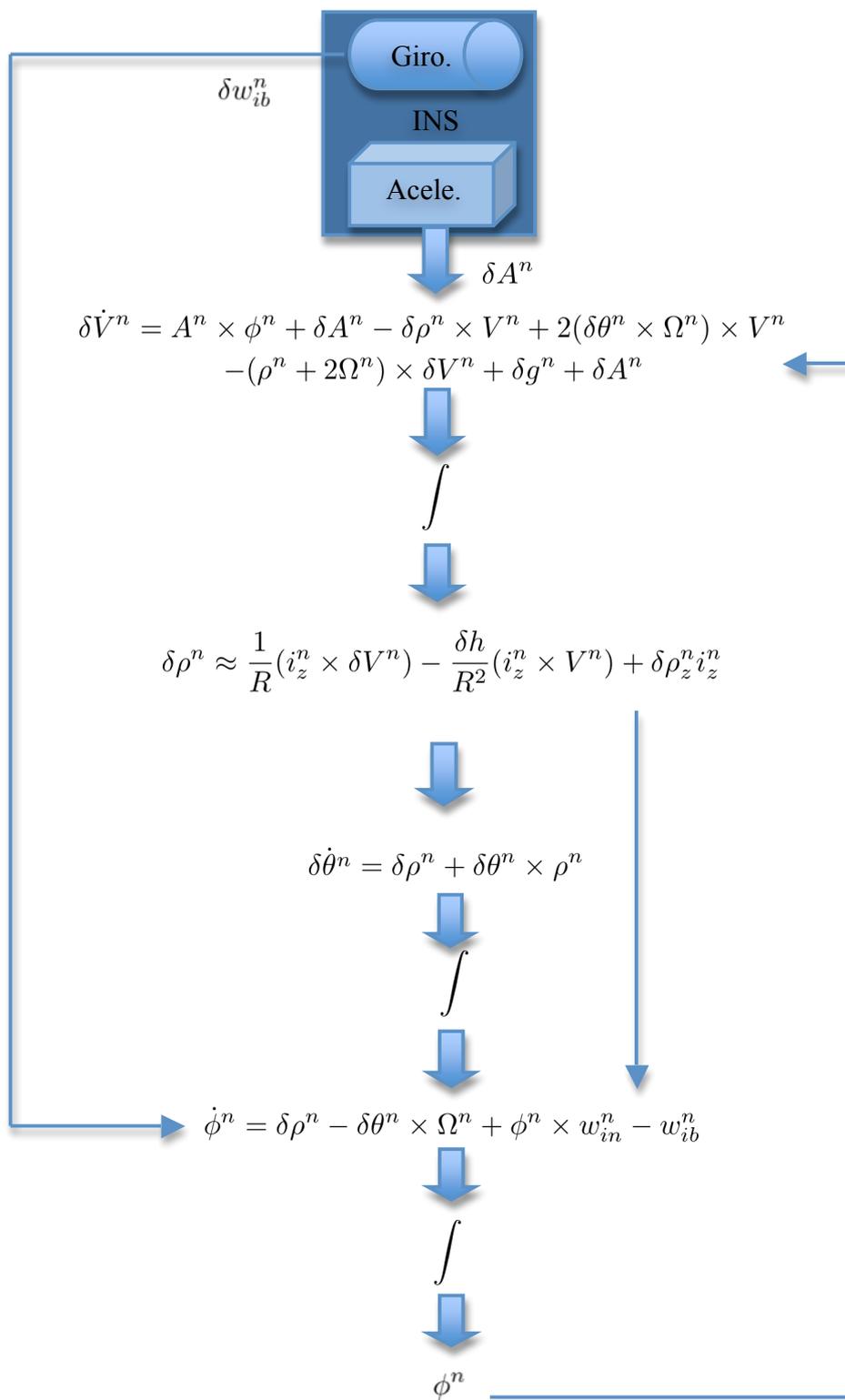


Figura 18 – Diagrama de Blocos da Propagação do Erro na Navegação Inercial

#### 4.5.1. Erro da Derivada da Posição Angular ( $\delta C_e^n$ ).

A derivada da posição angular, dada pela Eq. (84), quando perturbada gera

$$\delta \dot{C}_e^n = -S(\delta \rho) C_e^n - S(\rho) \delta C_e^n \quad (104)$$

O erro da matriz de rotação entre ECEF e NAV está definido pela Eq. (98) que diferenciada gera

$$\delta \dot{C}_e^n = -S(\delta \dot{\theta}^n) C_e^n - S(\delta \theta^n) \dot{C}_e^n \quad (105)$$

Substituindo a Eq. (84) na Eq. (105), obtém-se

$$\delta \dot{C}_e^n = -S(\delta \dot{\theta}^n) C_e^n + S(\delta \theta^n) S(\rho^n) C_e^n \quad (106)$$

Inserindo as Eq. (106) e (105) na (104):

$$S(\delta \dot{\theta}^n) = S(\delta \rho^n) + S(\delta \theta^n) S(\rho^n) - S(\rho^n) S(\delta \theta^n) \quad (107)$$

Utilizando a relação anti-simétrica dada pela eq. (101) reescreve-se a (107) na forma

$$S(\delta \dot{\theta}^n) = S(\delta \rho^n) + S(\delta \theta^n \times \rho^n) \quad (108)$$

Retirando o operador  $S$  e reescrevendo a Eq. (108) na forma vetorial:

$$\delta \dot{\theta}^n = \delta \rho^n + \delta \theta^n \times \rho^n \quad (109)$$

na qual:

subscrito  $n$  – significa que os vetores estão expressos no sistema de coordenadas NAV;

$\dot{\theta} \in \mathbb{R}^3$  – derivada do vetor de erros de posição angular;

$\delta \rho \in \mathbb{R}^3$  – erro na velocidade angular de NAV relativo a ECEF;

$\delta \theta \in \mathbb{R}^3$  – erro de posição angular; e

$\rho \in \mathbb{R}^3$  – velocidade angular de NAV relativo a ECEF

#### 4.5.2.

#### Erro na Latitude( $\delta\Phi$ ), Longitude ( $\delta\lambda$ ) e Wander ( $\delta\alpha$ ).

Os ângulos Wander, Latitude e Longitude dependem da matriz  $C_e^n$  que possui erros, vide Eq. (98). Perturbando as equações dos ângulos, encontram-se o erro no Wander, Latitude e Longitude, Eq. (110), (111) e (112), respectivamente, através de relações trigonométricas:

$$\delta\alpha = \delta\theta_z - \delta\lambda\Phi_s \quad (110)$$

$$\delta\Phi = \delta\theta_y\alpha_s - \delta\theta_x\alpha_c \quad (111)$$

$$\delta\lambda = (\delta\theta_x\alpha_s + \delta\theta_y\alpha_c)SEC\Phi \quad (112)$$

#### 4.5.3.

#### Erro na Derivada de Velocidade ( $\delta\dot{V}$ )

A derivada da velocidade é dada pela Eq. (49); esta pode ser reescrita no formato

$$\dot{V}^n = C_b^n A^b - (\rho^n + 2C_e^n \Omega^e) \times V^n + g^n \quad (113)$$

Perturbando a derivada da velocidade dada pela Eq. (113),

$$\begin{aligned} \delta\dot{V}^n &= \delta C_b^n A^b + C_b^n \delta A^b \\ &\quad - (\delta\rho^n + 2\delta C_e^n \Omega^e) \times V^n - (\rho^n + 2C_e^n \Omega^e) \times \delta V^n + \delta g^n \end{aligned} \quad (114)$$

Usando o resultado obtido na Eq. (99) e a relação anti-simétrica dada pela Eq. (100), pode-se reescrever um trecho da Eq. (101) no formato

$$\delta C_b^n A^b = -S(\delta\phi^n)C_b^n A^b = -\phi^n \times A^n = A^n \times \phi^n \quad (115)$$

Utilizando o resultado obtido na Eq. (98), reescreve-se outro trecho da Eq. (114) de modo análogo:

$$\delta C_e^n \Omega^e = -S(\delta \theta^n) C_e^n \Omega^e = -\delta \theta^n \times \Omega^e \quad (116)$$

Substituindo as Eq. (115) e (116) na (114):

$$\begin{aligned} \delta \dot{V}^n &= A^n \times \phi^n + \delta A^n \\ &\quad - \delta \rho^n \times V^n + 2(\delta \theta^n \times \Omega^n) \times V^n - (\rho^n + 2\Omega^n) \times \delta V^n + \delta g^n \end{aligned} \quad (117)$$

na qual:

subscrito  $n$  – significa sistema de coordenadas NAV;

$\delta \dot{V} \in \mathbb{R}^3$  – erro da derivada da velocidade;

$V \in \mathbb{R}^3$  – velocidade;

$\delta V \in \mathbb{R}^3$  – erro na velocidade;

$A \in \mathbb{R}^3$  – aceleração medida;

$\delta A \in \mathbb{R}^3$  – erro na aceleração medida;

$\delta g \in \mathbb{R}^3$  – erro na aceleração gravitacional;

$\Omega \in \mathbb{R}^3$  – velocidade angular de *ECEF* relativo a *ECI*;

$\rho \in \mathbb{R}^3$  – velocidade angular de *NAV* relativo a *ECEF*;

$\delta \theta \in \mathbb{R}^3$  – erro de posição angular;

#### 4.5.4. Erro na Gravidade ( $\delta g$ )

O modelo utilizado na estimativa do campo gravitacional possui erros em sua modelagem e nos parâmetros de entrada do modelo. Considerando apenas o erro propagado devido aos parâmetros de Latitude ( $\Phi$ ) e Altura ( $h$ ), o erro do campo gravitacional calculado é obtido por

$$\delta g_u = 2g_o \left[ \left( 1 + \frac{a-b}{a} + \frac{\Omega^2 a^2 b}{GM} \right) \frac{\delta h}{a} - \left( \left( \frac{5\Omega^2 a^2 b}{2GM} - \frac{a-b}{a} \right) \text{sen} \Phi \text{cos} \Phi \right) \delta \Phi \right] \quad (118)$$

Devido ao erro do ângulo ser pequeno a Eq. (118) pode ser aproximada

$$\delta g_u = 2g_0 \frac{\delta h}{a} \quad (119)$$

na qual:

$\delta g$  – erro da gravidade no eixo z do sistema NAV;

$g_0$  – gravidade no equador = 9,780373 m / s<sup>2</sup>;

$a$  – raio equatorial = 6.378.137,00 m;

$b$  – raio polar = 6.356.752,3142 m;

$\Omega$  – velocidade angular da Terra = 7,292115.10<sup>-5</sup> rad / s;

$GM$  – constante gravitacional da Terra = 3986004,418.108 m<sup>3</sup> / s<sup>2</sup>;

$\delta h$  – erro da altitude no sistema ECEF;

$\Phi$  – latitude no sistema ECEF; e

$\delta\Phi$  – erro da latitude no sistema ECEF.

#### 4.5.5. Erro na Aceleração ( $\delta A^n$ )

A saída do acelerômetro está no sistema de coordenadas do corpo, logo o erro se encontra no mesmo sistema. O erro do acelerômetro no sistema NAV ( $\delta A^n$ ) é encontrado através da transformação dada por

$$\delta A^n = C_b^n \delta A^b \quad (120)$$

onde

subscritos  $n$  e  $b$  – significam os sistemas de coordenadas NAV e BOD, respectivamente;

$C_b^n$  – matriz de transformação entre os sistemas BOD e NAV; e

$\delta A$  – erro na aceleração.

#### 4.5.6. Erro na Velocidade Angular do sistema NAV relativo a ECEF ( $\delta \rho^n$ )

A velocidade angular do sistema NAV relativo a ECEF, quando perturbada, resulta na equação do erro da velocidade angular, Eq. (121). Escreve-se esta equação considerando a relação dada pela Eq. (122).

$$\delta\rho^n \approx \frac{1}{R}(i_z^n \times \delta V^n) - \frac{\delta h}{R^2}(i_z^n \times V^n) + \delta\rho_z^n i_z^n \quad (121)$$

$$\delta\frac{1}{R} = -\frac{\delta R}{R^2} = \frac{-\delta h}{R^2} \quad (122)$$

onde

subscrito n – sistema de coordenadas NAV;

$\rho$  – velocidade angular de NAV relativo a ECEF;

V – velocidade tangencial do veículo;

$i_z$  – vetor unitário no eixo z;

$\delta$  – operador erro;

h – altitude; e

R – raio da Terra aproximado pela média entre o raio polar e equatorial.

#### 4.5.7. Erro na Altura ( $\delta h$ )

A altitude é dada pela integral da velocidade na direção perpendicular à Terra, sendo o erro desta dado por

$$\delta\dot{h} = \delta V_z \quad (123)$$

onde

$\delta\dot{h}$  – erro da derivada da altitude; e

$\delta V_z$  – erro da velocidade no eixo z do sistema NAV.

#### 4.5.8. Erro na Orientação ( $\delta C_b^n$ )

A orientação do veículo é dada pela matriz de rotação entre o sistema de coordenadas do Corpo e ENU,  $C_b^n$ , onde

$$\dot{C}_b^n = C_b^n S(w_{ib}^b) - S(\rho^n + C_e^n \Omega^e) C_b^n \quad (124)$$

Perturbando a Eq. (124),

$$\begin{aligned} \delta \dot{C}_b^n &= \delta C_b^n S(w_{ib}^b) + C_b^n S(\delta w_{ib}^b) \\ &\quad - S(\delta \rho^n + \delta C_e^n \Omega^e) C_b^n - S(\rho^n + C_e^n \Omega^e) \delta C_b^n \end{aligned} \quad (125)$$

Derivando o resultado da Eq. (99),

$$\delta \dot{C}_b^n = -S(\dot{\phi}^n) C_b^n - S(\phi^n) [C_b^n S(w_{ib}^b) - S(\rho^n + \Omega^n) C_b^n] \quad (126)$$

Substituindo as Eqs. (98), (99) e (126) na (124), e utilizando a relação anti-simétrica dada pela Eq. (100),

$$\begin{aligned} S(\dot{\phi}^n) &= S(\delta \rho^n) - S(\delta \theta^n \times \Omega^n) + \\ &\quad S(\phi^n) S(\phi^n + \Omega^n) S(\phi^n) - C_b^n S(w_{ib}^b) C_n^b \end{aligned} \quad (127)$$

Reescrevendo a Eq. (127) utilizando a relação dada pelas Eqs. (101) e (102):

$$S(\dot{\phi}^n) = S(\delta \rho^n) - S(\delta \theta^n \times \Omega^n) + S(\phi^n \times w_{in}^n) - S(w_{ib}^n) \quad (128)$$

Retirando o operador anti-simétrico e escrevendo a Eq. (128) na forma vetorial, obtém-se

$$\dot{\phi}^n = \delta \rho^n - \delta \theta^n \times \Omega^n + \phi^n \times w_{in}^n - \delta w_{ib}^n \quad (129)$$

onde

subscrito  $n$  – indica o sistema de coordenadas ENU;

$\dot{\phi} \in \mathbb{R}^3$  – deriva do erro na orientação;

$\delta \rho \in \mathbb{R}^3$  – erro na velocidade angular entre ENU e ECEF;

$\Omega \in \mathbb{R}^3$  – velocidade de rotação da Terra;

$\phi \in \mathbb{R}^3$  – erro na orientação;

$\omega_{in} \in \mathbb{R}^3$  – velocidade angular de ENU relativo ao ECI;

$\omega_{ib} \in \mathbb{R}^3$  – velocidade angular de Corpo relativo ao ECI;

$\delta\omega_{ib} \in \mathbb{R}^3$  – velocidade angular de Corpo relativo ao ECI;

## 5 Equacionamento do Filtro de Kalman

As implementações do filtro de Kalman para a fusão do GPS com o sensor inercial são classificadas na literatura principalmente como:

**acopladas**, utilizando como informação a pseudo-distância e pseudo-velocidade a cada satélite;

**desacopladas**, onde a informação para a fusão é baseada na posição e velocidade do receptor de GPS.

A vantagem da implementação desacoplada é que esta permite a utilização de qualquer receptor de sinal GPS, enquanto na acoplada é necessário um receptor que informe as pseudo-distâncias e pseudo-velocidades. A desvantagem da desacoplada é que a informação para a fusão só existe quando quatro satélites estão visíveis ao receptor, enquanto na acoplada cada satélite visível significa uma informação a mais na fusão. (WAGNER e WIENEKE et. al., 2002) mostra que este ganho de informação na acoplada resulta em uma melhor performance.

O diagrama de blocos da Fig. 57 representa a implementação escolhida nesta dissertação. Esta é desacoplada, pois o GPS disponível para os experimentos não fornece pseudo-distâncias e pseudo-velocidades. O vetor de estado do filtro de Kalman é definido como os erros da navegação inercial, a qual é realimentada com os erros computados. Esta é uma abordagem clássica, (WANG et. al., 2000) desenvolve o mesmo filtro complementado por técnicas de inteligência computacional.

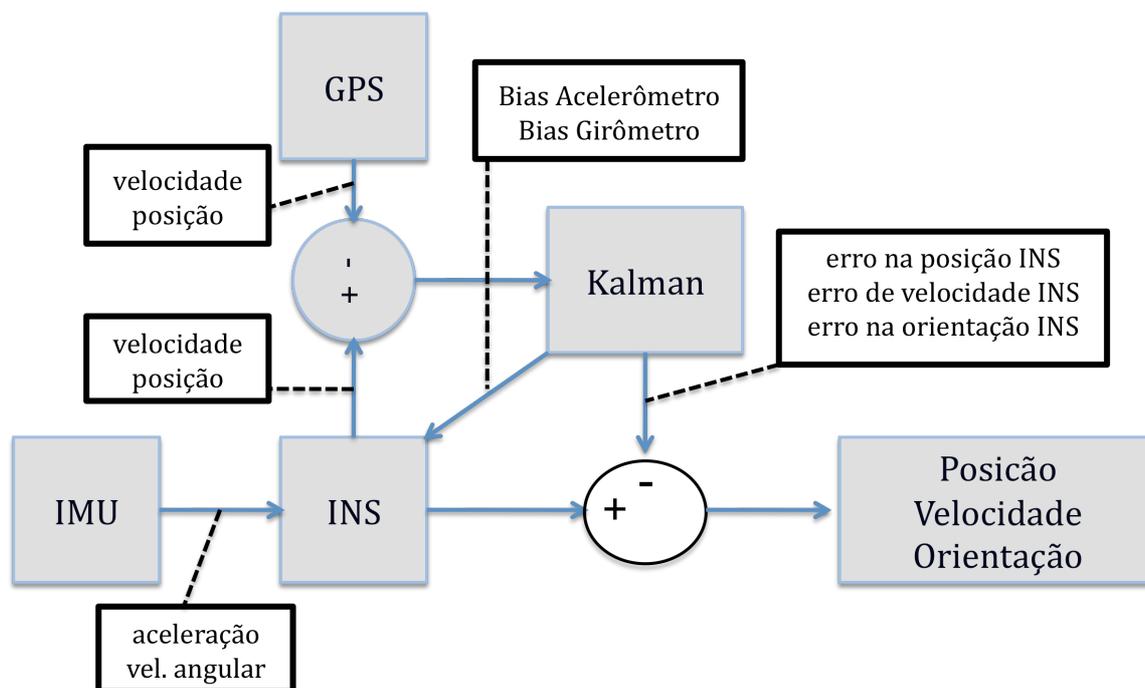


Figura 1 – Diagrama de Blocos da Fusão GPS/INS

Neste trabalho o filtro será utilizado para determinar os erros da navegação inercial, visando assim diminuir o erro da mesma. A realimentação da navegação inercial com os Bias do acelerômetro e girômetro calculados pelo filtro permite uma melhor navegação puramente inercial, enquanto o filtro não estiver sendo atualizado por ausência do sinal de GPS.

Além da implementação clássica será proposto uma implementação com orientação para sensores inerciais de baixa qualidade. Estes devido a imprecisão de seus acelerômetros e girômetros possuem 3 bússolas montadas ortogonalmente, que auxiliam no cálculo da orientação. Logo nesta implementação além de observar o erro de velocidade e posição entre o calculado pela navegação inercial e o medido pelo GPS, o filtro vai observar o erro de orientação entre o calculado pela navegação inercial e o medido pelo sensor inercial.

### 5.1. Vetor de Estado ( $x$ )

As variáveis de estado do Filtro de Kalman são descritas pela Eq. (130), mesmo modelo utilizado por (WANG et. al., 2000).

$$x = \left[ \begin{array}{l} \delta\theta_x^n \\ \delta\theta_y^n \\ \delta h^n \\ \delta V_x^n \\ \delta V_y^n \\ \delta V_z^n \\ \delta\phi_x^n \\ \delta\phi_y^n \\ \delta\phi_z^n \\ \delta A_x^m \\ \delta A_y^m \\ \delta A_z^m \\ \delta w_{ibx}^m \\ \delta w_{iby}^m \\ \delta w_{ibz}^m \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \text{Erro na} \\ \text{Posição do} \\ \text{INS} \\ \text{Erro na} \\ \text{Velocidade do} \\ \text{INS} \\ \text{Erro na} \\ \text{Orientação do} \\ \text{INS} \\ \text{Bias do} \\ \text{Acelerômetro} \\ \text{Bias do} \\ \text{Girômetro} \end{array} \right. \quad (130)$$

na qual:

- subscrito n – significa sistema de coordenadas NAV;
- subscrito m – significa sistema de coordenadas de medida;
- $\delta\theta$  – erro na posição;
- $\delta h$  – erro na altitude;
- $\delta V$  – erro na velocidade;
- $\phi$  – erro na orientação;
- $\delta A$  – bias que se move do acelerômetro;
- $\delta w_{ib}$  – bias que se move do girômetro;

## 5.2. Matriz de Observabilidade Clássica (H)

O filtro vai observar a diferença entre as posições e velocidades medidas pelo sensor inercial e pelo GPS, descritas pelas Eqs. (131) a (142). A diferença entre a longitude calculada pela navegação inercial e medida pelo GPS é dada por

$$\delta\lambda = \lambda^I - \lambda^G = \lambda^R + \delta\lambda^I - (\lambda^R + \delta\lambda^G) = \delta\lambda^I - \delta\lambda^G \quad (131)$$

E a diferença entre a latitude calculada pela navegação inercial e medida pelo GPS é dada por

$$\delta\Phi = \Phi^I - \Phi^G = \Phi^R + \delta\Phi^I - (\Phi^R + \delta\Phi^G) = \delta\Phi^I - \delta\Phi^G \quad (132)$$

Considerando as relações

$$\delta\theta_N = \delta\lambda \cos\Phi \quad (133)$$

$$\delta\theta_E = -\delta\Phi \quad (134)$$

Pode-se calcular o erro de posição nas coordenadas de navegação (NAV)

$$\delta\theta_x = \delta\theta_N \cos\alpha - \delta\theta_E \sin\alpha \quad (135)$$

$$\delta\theta_y = \delta\theta_N \sin\alpha + \delta\theta_E \cos\alpha \quad (136)$$

O erro na altitude em coordenadas de navegação (NAV) é dado diretamente pela diferença entre a altitude calculada pela navegação inercial e observada pelo GPS:

$$\delta h = h^I - h^G = h^R + \delta h^I - (h^R + \delta h^G) = \delta h^I - \delta h^G \quad (137)$$

A velocidade medida pelo GPS está no sistema de coordenadas ENU, a qual pode ser reescrita no sistema NAV da seguinte forma:

$$V_x^G = V_N^G \cos\alpha - V_E^G \sin\alpha \quad (138)$$

$$V_y^G = V_N^G \sin\alpha - V_E^G \cos\alpha \quad (139)$$

Logo a diferença entre as velocidades calculadas pela navegação inercial e medida pelo GPS é dada por

$$\delta V_x = V_x^I - V_x^G = V_x^R + \delta V_x^I - (V_x^R + \delta V_x^G) = \delta V_x^I - \delta V_x^G \quad (140)$$

$$\delta V_y = V_y^I - V_y^G = V_y^R + \delta V_y^I - (V_y^R + \delta V_y^G) = \delta V_y^I - \delta V_y^G \quad (141)$$

$$\delta V_z = V_z^I - V_z^G = V_z^R + \delta V_z^I - (V_z^R + \delta V_z^G) = \delta V_z^I - \delta V_z^G \quad (142)$$

na qual:

superscrito I e G – significa o INS e GPS, respectivamente.

superscrito R – significa o valor real;

subscrito x,y e z – significa o eixo no sistema NAV;

subscrito E, N e U – significa o eixo no sistema ENU;

$\delta\lambda$  – erro na latitude;

$\delta\Phi$  – erro na longitude;

$\delta h$  – erro na altitude; e

$\delta V$  – erro na velocidade.

Utilizando as diferenças observadas, monta-se a matriz de observabilidade H

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (143)$$

### 5.3. Matriz de Observabilidade Orientação (H)

O filtro vai observar a diferença entre a orientação medida pelo sensor inercial e a calculada pela navegação inercial, além das observações da implementação clássica.

$$\delta\phi_x = \delta\phi^I - \delta\phi^{IMU} \quad (144)$$

$$\delta\phi_y = \delta\theta^I - \delta\theta^{IMU} \quad (145)$$

$$\delta\phi_z = \delta\psi^I - \delta\psi^{IMU} \quad (146)$$

Na qual:

superscrito I e IMU – significa a medida da navegação inercial e do sensor inercial, respectivamente;

$\delta\phi$  – erro no “roll”;

$\delta\theta$  – erro no “pitch”; e

$\delta\psi$  – erro no “yaw”.

A matriz de observação quando existe sinal de GPS e de orientação é dada por:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (147)$$

Quando existe apenas sinal de orientação a matriz de observação é dada por:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (148)$$

#### 5.4. Matriz de Dinâmica do Sistema (F)

Expandindo as equações das propagações dos erros na navegação inercial calculadas anteriormente, obtêm-se:

Eqs. (149) e (150) para o erro da posição angular;

$$\delta\dot{\theta}_x = \rho_z \delta\theta_y + \frac{\delta V_y}{R_y} - \rho_y \phi_z \quad (149)$$

$$\delta\dot{\theta}_y = -\rho_z \delta\theta_x - \frac{\delta V_x}{R_x} - \rho_x \phi_z \quad (150)$$

Eq. (151) para o erro da altitude medida pelo sensor inercial;

$$\delta\dot{h} = \delta V_z \quad (151)$$

Eqs. (152) a (154) para o erro da velocidade medida pelo sensor inercial;

$$\begin{aligned} \delta\dot{V}_x = & -2(V_y\Omega_y + V_z\Omega_z)\delta\theta_x + (\rho_z + 2\Omega_z)\delta V_y - (\rho_y + 2\Omega_y)\delta V_z \\ & - A_z\phi_y + A_y\phi_z + C_m^n(1,1)\delta A_x + C_m^n(1,2)\delta A_y + C_m^n(1,3)\delta A_z \end{aligned} \quad (152)$$

$$\begin{aligned} \delta\dot{V}_y = & -2(V_x\Omega_x + V_z\Omega_z)\delta\theta_y - (\rho_z + 2\Omega_z)\delta V_x + (\rho_x + 2\Omega_x)\delta V_z \\ & + A_z\phi_x - A_x\phi_z + C_m^n(2,1)\delta A_x + C_m^n(2,2)\delta A_y + C_m^n(2,3)\delta A_z \end{aligned} \quad (153)$$

$$\begin{aligned} \delta\dot{V}_z = & +\frac{2g_0}{a}\delta h - (\rho_x + 2\Omega_x)\delta V_y + (\rho_y + 2\Omega_y)\delta V_x - A_y\phi_x + A_x\phi_y \\ & + 2(V_x\Omega_x + V_y\Omega_y)\phi_z + C_m^n(3,1)\delta A_x + C_m^n(3,2)\delta A_y + C_m^n(3,3)\delta A_z \end{aligned} \quad (154)$$

Eqs. (155) a (157) para o erro da orientação;

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_x &= \frac{\delta V_y}{R_y} - \frac{\rho_x}{R_y} \delta h - \Omega_z \delta \theta_y - w_y \phi_z + w_z \phi_y \\ &- C_m^n(1,1) \delta w_{ibx} - C_m^n(1,2) \delta w_{iby} - C_m^n(1,3) \delta w_{ibz}\end{aligned}\quad (155)$$

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_y &= -\frac{\delta V_x}{R_x} - \frac{\rho_y}{R_x} \delta h + \Omega_z \delta \theta_x - w_z \phi_x + w_x \phi_z \\ &- C_m^n(2,1) \delta w_{ibx} - C_m^n(2,2) \delta w_{iby} - C_m^n(2,3) \delta w_{ibz}\end{aligned}\quad (156)$$

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_z &= \Omega_x \delta \theta_y - \Omega_y \delta \theta_x - w_x \phi_y + w_y \phi_x \\ &- C_m^n(3,1) \delta w_{ibx} - C_m^n(3,2) \delta w_{iby} - C_m^n(3,3) \delta w_{ibz}\end{aligned}\quad (157)$$

Eqs. (158) a (160) para o bias móvel do acelerômetro;

$$\dot{A}_x^= - A_x / \tau_{Ax} \quad (158)$$

$$\dot{A}_y^= - A_y / \tau_{Ay} \quad (159)$$

$$\dot{A}_z^= - A_z / \tau_{Az} \quad (160)$$

Eqs. (161) a (163) para o bias móvel do girômetro.;

$$\dot{w}_{ibx} = -w_{ibx} / \tau_{wx} \quad (161)$$

$$\dot{w}_{iby} = -w_{iby} / \tau_{wy} \quad (162)$$

$$\dot{w}_{ibz} = -w_{ibz} / \tau_{wz} \quad (163)$$

na qual:

C(i,j) se refere ao elemento da linha i e coluna j da matriz C;

$\delta$  – operador erro;

$\theta$  – posição angular;

h – altitude;

V – velocidade do veículo;

$\phi$  – orientação do veículo;

$A$  – aceleração do veículo;

$\omega_{ib}$  – giroscópio;

$\rho$  – velocidade angular do sistema NAV relativo a ECEF;

$R_y$  – definido pela Eq. (54);

$R_x$  – definido pela Eq. (55);

$\Omega$  – velocidade angular da Terra;

$C_m^n$  – matriz de transformação do sistema da Medida para NAV;

$g_0$  – gravidade no equador = 9,780373 m / s<sup>2</sup>;

$a$  – raio equatorial = 6.378.137 m; e

$\tau$  – constante de tempo.

O que resulta em uma matriz  $\mathfrak{N}^{15 \times 15}$  dada por

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \rho_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\rho_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/R_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2(V_y\Omega_x + V_z\Omega_z) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\rho_z + 2\Omega_y) & (\rho_z + 2\Omega_z) & 0 & 0 & -(\rho_y + 2\Omega_x) \\ 0 & -2(V_x\Omega_x + V_z\Omega_z) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(\rho_z + 2\Omega_y) & 0 & 0 & (\rho_x + 2\Omega_x) & 0 & (\rho_x + 2\Omega_z) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\rho_y + 2\Omega_y) & -(\rho_x + 2\Omega_x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2g_0/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho_x/R_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_z & -\rho_x/R_y & -\rho_y/R_x & -1/R_x & -1/R_x & 0 & 0 & 0 & 1/R_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/R_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(164)

$$\begin{bmatrix}
 0 & -\rho_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -\rho_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -A_z & A_y & C_m^n(1,1) & C_m^n(1,2) & C_m^n(1,3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -A_x & C_m^n(2,1) & C_m^n(2,2) & C_m^n(2,3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 A_x & 2(V_x\Omega_x + V_y\Omega_y) & C_m^n(3,1) & C_m^n(3,2) & C_m^n(3,3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \omega_z & -\omega_y & 0 & 0 & 0 & -C_m^n(1,1) & -C_m^n(1,2) & -C_m^n(1,3) & 0 & 0 \\
 \omega_z & -\omega_y & 0 & 0 & 0 & -C_m^n(2,1) & -C_m^n(2,2) & -C_m^n(2,3) & 0 & 0 \\
 -\omega_x & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_m^n(3,1) & -C_m^n(3,2) & -C_m^n(3,3) & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1/\tau_{Ax} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1/\tau_{Ay} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1/\tau_{Az} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/\tau_{\omega_x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/\tau_{\omega_y} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/\tau_{\omega_z} & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

### 5.5. Vetor de Entrada (u)

Nesta implementação o vetor de entradas no sistema será nulo, pois a entrada  $u$  não é conhecida. Logo o termo  $G(t)u(t)$  não será utilizado. Os sensores considerados para o filtro de Kalman aplicado são o GPS e o inercial que modelados como medindo o resultado da entrada desconhecida no sistema.

## **5.6. Ruídos da Medida**

O ruído da medida  $w$  deve levar em conta todos os erros de medida. Nesta modelagem como o erro do GPS não é estimado ele é incorporado como sendo o ruído da medida. Assumindo que todas as componentes do ruído são descorrelacionadas a matriz de covariância  $W$  é diagonal.

## **5.7. Ruídos do Processo**

O ruído do processo  $v$  deve conter fenômenos não modelados. A matriz de covariância  $V$  será diagonal assumindo que todas as componentes do ruído são independentes. Os valores dos ruídos são então dependentes do modelo de sensores utilizado, variando de aplicação para aplicação. Um exemplo seria o ruído do bias do acelerômetro no eixo  $Z$  conter a variância devido a anomalia da gravidade, devido a sensibilidade a altas taxas de rotação.

Apos apresentar toda a metodologia e modelagem do sistema, simulações e experimentos são conduzidos para comprovar sua eficácia. As simulações são apresentadas a seguir.

## 6 Simulações

Este capítulo descreve os testes realizados para validar a teoria proposta pela presente dissertação.

### 6.1. Descrição da Simulação

Visando validar o equacionamento desenvolvido no Capítulo 4, este será simulado cinematicamente no software Matlab. A simulação é descrita pelo diagrama de blocos da Fig. 58.

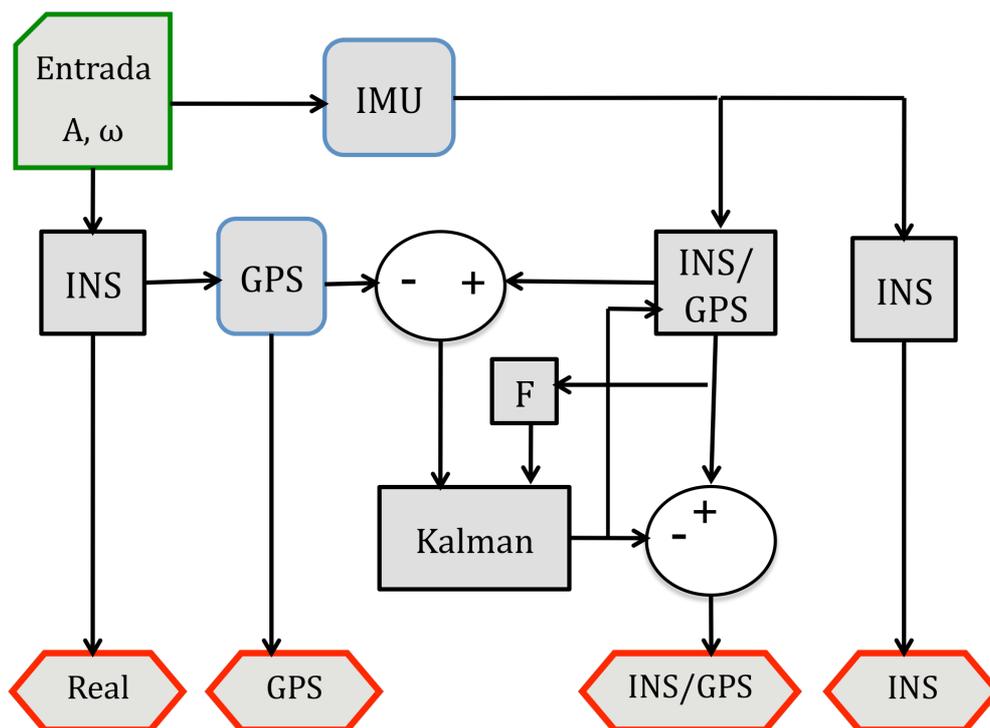


Figura 1 – Diagrama de Blocos da Simulação

## 6.2. Entrada

As entradas do sistema são as acelerações e velocidades angulares nos 3 eixos do sistema de coordenadas do Corpo. Estas foram amostradas a cada 1ms a partir um modelo simplificado do robô utilizado nos experimentos. Este tem suas rodas submetidas a velocidades angulares de natureza aleatória a cada 1ms.

O modelo do robô é o proposto por (SIEGWART, R.; e NOURBAKSHSH, I. R. et. at., 2004) para veículos com direção tipo tanque se movendo-se sob um plano. Logo, o mesmo é modelado como um corpo sólido com duas rodas de raio  $r$  que são equidistantes com distância  $l$  do centro de massa  $cm$ , vide Fig. 59.

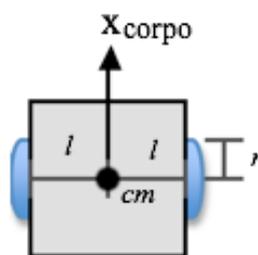


Figura 2 – Modelo Simplificado do Robô Ambiental Híbrido

Dado que as rodas da direita e da esquerda giram com velocidades angulares  $\omega_{dir}$  e  $\omega_{esq}$ , respectivamente, e que não existe derrapagem, as velocidades lineares e angulares nas coordenadas do corpo são dadas por:

$$\begin{bmatrix} V_x^b \\ V_y^b \\ V_z^b \\ \omega_x^b \\ \omega_y^b \\ \omega_z^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left( \frac{r\omega_{dir}}{2} + \frac{r\omega_{esq}}{2} \right) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{r\omega_{dir}}{2l} - \frac{r\omega_{esq}}{2l} \end{bmatrix} \quad (165)$$

No robô ambiental híbrido os parâmetros do modelo assumem os valores descritos na tabela 11.

**Tabela 1 – Parâmetros do modelo do Robô Ambiental Híbrido**

|                  | valor | unidade            |
|------------------|-------|--------------------|
| $l$              | 0.76  | m                  |
| $r$              | 0.38  | m                  |
| $\omega_{\max}$  | 21    | rad/s              |
| $d\omega_{\max}$ | 4.2   | rad/s <sup>2</sup> |

### 6.3. Modelo do Sensor Inercial (IMU)

O sensor utilizado nos experimentos da marca Xsens possui taxa de amostragem de 1ms e suas fontes de erros descritas pelo *Datasheet* são:

**Tabela 2 – Fontes de Erro do Sensor Inercial (Xsens)**

| Fonte de Erro    | simbolo    | velocidade angular                             | aceleração                                     | orientação dinâmica |
|------------------|------------|--|--|---------------------|
| Linearidade      | L          | 0.1 % do FS                                    | 0.2 % do FS                                    |                     |
| Bias que se move | $\sigma_b$ | $87.3 \cdot 10^{-3}$ rad/s                     | 0.02 m/s                                       |                     |
| Fator de Escala  | FS         | -  | 0.05 %   |                     |
| Ruído            | $\sigma_r$ | $1.7 \cdot 10^{-3}$ rad/s / $\sqrt{\text{Hz}}$ | $0.0001$ m/s <sup>2</sup> / $\sqrt{\text{Hz}}$ | 2 deg               |

O erro de orientação será modelado como o valor real da orientação perturbado por uma normal de média 0 e desvio padrão de 2 graus. Já o erro de aceleração e velocidade angular é calculado através da simplificação do equacionamento de (FLENNIKEN, W.; WALL, J. BEVLY, D et. al., 2004) para sensores inerciais de acordo com as fontes de erros descritas na tabela 4. O modelo da velocidade angular e da aceleração para cada eixo é dada respectivamente por:

$$\omega_m = \omega_r + c_\omega + b_\omega + r_\omega \quad (166)$$

$$A_m = A_r + c_A + b_A + r_A + SF_A * A_r + L_A * SF_A * A_r \quad (167)$$

Na qual:

subscrito  $\omega$  – significa da velocidade angular;

subscrito A – significa da aceleração;

$\omega_m$  – velocidade angular medida;

$\omega_r$  – velocidade angular real;

$c$  – *offset* constante;

$b$  – bias que se move;

$r$  – ruído branco;

SF – fator de escala; e

L – linearidade.

De acordo com (FLENNIKEN, W.; WALL, J. BEVLY, D et. al., 2004) assume-se que o ruído branco da velocidade angular é normalmente distribuídos com média 0 e variância amostral dependente da frequência amostral ( $f_s$ ) dada por

$$E[r_\omega^2] = \sigma_r^2 f_s \quad (168)$$

O bias que se move é modelado como um processo de Markov de primeira ordem, ou seja, pode ser descrito de acordo com Eq. (169). Este possui média 0 e variância

$$E[b_\omega^2] = \sigma_b^2 \quad (169)$$

$$\dot{b}_\omega = -\frac{1}{\tau_\omega} b_\omega + r_{bias} \quad (170)$$

Na qual,

$$r_{bias} = \sqrt{\frac{2f_s\sigma_b^2}{\tau_\omega} v} \quad (171)$$

e,

$$v \sim N[0, 1] \quad (172)$$

O bias que se move do acelerômetro é modelado de maneira análoga ao da velocidade angular, sendo que as variâncias amostrais do ruído e do bias são modeladas, respectivamente, como:

$$E[r_A^2] = \sigma_r^2 f_s \quad (173)$$

$$E[r_b^2] = \frac{\sigma_b^2 2f_s}{\tau_A} \quad (174)$$

sendo que:

$\tau_\omega$  – constante de tempo da velocidade angular;

$\tau_A$  – constante de tempo do acelerômetro;

$N[0,1]$  – distribuição normal; e

$f_s$  – frequência amostral.

#### 6.4. Modelo do GPS

A posição dada pelo GPS vai ser modelada como a posição real acrescida de um erro. De acordo com o capítulo 2, em condições comuns de operação, o erro é modelado com uma normal de média 0 e desvio padrão de 10.2m e 12.8m para a horizontal e vertical, respectivamente.

A velocidade em cada eixo vai ser modelada como o valor real acrescido de uma normal de média 0 e desvio padrão de 0.051444445 m/s. Este valor é fornecido no *datasheet*, em anexo, do GPS da marca Garmin que foi utilizado nos experimentos. A taxa de amostragem para este sensor é de 10ms.

#### 6.5. Navegação Inercial (INS)

A navegação inercial é dada pelo equacionamento descrito no capítulo 4. As entradas são as acelerações lineares e as velocidades angulares; a saída, a orientação, velocidade linear e posição do veículo. Nesta dissertação, o sensor inercial é de má

qualidade, possuindo bússolas para auxiliar na orientação, logo, existirão duas implementações das navegações inerciais: a clássica e com orientação, onde a matriz de rotação entre o corpo e navegação será fornecida pelo sensor e não será calculada pela navegação inercial.

## 6.6. Filtro de Kalman do GPS/INS

Na simulação os valores dos sensores são amostrados discretamente em intervalos  $\Delta t$ , logo o filtro de Kalman utilizado será o de tempo discreto. Este descrito por (WANG, et. al.2006 ) e (BOSE, et. al. 1982), através da expansão de segunda ordem da transformada inversa de Laplace, como:

**Propagação da Estimativa :**

$$\hat{x}_t = \left( I + F_{t-}\Delta t + \frac{(F_{t-}\Delta t)^2}{2} \right) \hat{x}_{t-} \quad (175)$$

$$P_t = P_{t-} + (F_{t-}P_{t-} + P_{t-}F_{t-}^T)\Delta t + F_{t-}P_{t-}F_{t-}^T(\Delta t)^2 + V_{t-}\Delta t \quad (176)$$

**Ganho Kalman:**

$$K_t = P_t H_t^T (H_t P_t H_t^T + R_t)^{-1} \quad (177)$$

**Atualização:**

$$\hat{x}_t = \hat{x}_t + K_t(z_t - H_t \hat{x}_t) \quad (173)$$

$$P_t = (I - K_t H_t) P_t \quad (178)$$

na qual:

$t-$  significa o instante  $t - \Delta t$

$\hat{x} \in \mathbb{R}^{15}$  – vetor de médias da distribuição  $x$ ;

$P \in \mathbb{R}^{15 \times 15}$  – matriz de covariância da distribuição  $x$ ;

$V \in \mathbb{R}^{15 \times 15}$  – matriz de covariância do ruído do processo;

$W \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  – matriz de covariância do ruído da medida;

$z \in \mathbb{R}^6$  – vetor de saídas do sistema medidas pelos sensores;

$F^{15 \times 15} \in \mathbb{R}$  – Matriz da dinâmica do sistema; e

$H \in \mathbb{R}^6$  – vetor de funções que descreve como as equações de estado são mapeadas em saídas.

A navegação através da fusão do GPS com o sensor inercial, utilizando um filtro de Kalman, é uma navegação inercial, corrigida pelos valores calculados pelo filtro. Este é atualizado através das observações da diferença entre o valor calculado pela navegação inercial e aqueles medidos por outros sensores. O diagrama de blocos da Fig. 60 mostra esta navegação, sendo que o equacionamento da navegação inercial é descrita em detalhe no capítulo 4. Os números nos blocos são referências às equações no diagrama de blocos da Fig. 47.

Nesta dissertação serão simuladas duas implementações distintas do filtro GPS/INS; a clássica, onde é observada a diferença de posição e velocidade entre o INS e o GPS, e aquela com orientação, onde, além das diferenças observadas pela implementação clássica, também será observada a diferença entre a orientação calculada pela navegação inercial e medida pelo sensor inercial.

A matriz de covariância do filtro é propagada a cada atualização da navegação inercial, 1ms. O vetor de estado contendo os erros da navegação inercial é atualizado a cada observação do sistema, ou seja, quando existe sinal de GPS. Os valores dos erros calculados pelo filtro são realimentados ao sistema e propagados pelo mesmo; ao se realizar uma observação do sistema é observada diretamente a diferença  $e = z - Hx$ .

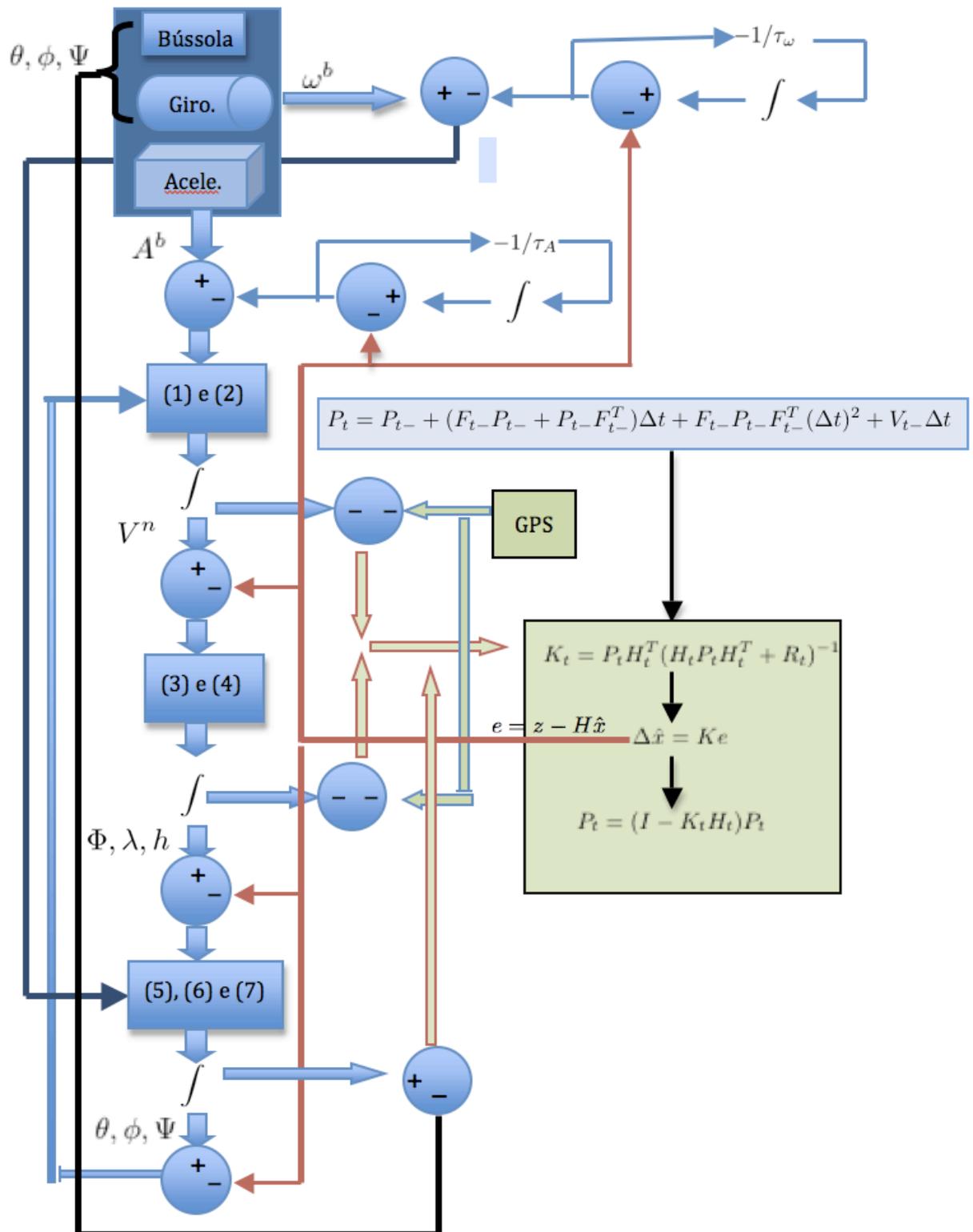


Figura 3 – Diagrama de Blocos da Fusão GPS/INS

As matrizes do ruído do processo e da medida são diagonais, ou seja, os erros são considerados decorrelacionados. Os valores são encontrados através de ajustes

manuais, estes realizados com vistas a reduzir o rms da estimativa dos estados do filtro. As tabelas 5, 6 e 7 contêm os valores da diagonal das matrizes do ruído do processo e da medida nas implementações clássica e com orientação, respectivamente, utilizados nesta simulação.

**Tabela 3 – Diagonal da Matriz de Ruído do Processo (V)**

|        |                  |           |          |                  |           |
|--------|------------------|-----------|----------|------------------|-----------|
| V(1,1) | $\delta\theta_x$ | $10^{-8}$ | V(9,9)   | $\delta\phi_z$   | $10^{-4}$ |
| V(2,2) | $\delta\theta_y$ | $10^{-8}$ | V(10,10) | $\delta A_x$     | $10^{-2}$ |
| V(3,3) | $\delta h$       | $10^{-8}$ | V(11,11) | $\delta A_y$     | $10^{-2}$ |
| V(4,4) | $\delta V_x$     | $10^{-6}$ | V(12,12) | $\delta A_z$     | $10^{-1}$ |
| V(5,5) | $\delta V_y$     | $10^{-6}$ | V(13,13) | $\delta\omega_x$ | 0.5       |
| V(6,6) | $\delta V_z$     | $10^{-4}$ | V(14,14) | $\delta\omega_y$ | 0.5       |
| V(7,7) | $\delta\phi_x$   | $10^{-4}$ | V(15,15) | $\delta\omega_z$ | 0.5       |
| V(8,8) | $\delta\phi_y$   | $10^{-4}$ |          |                  |           |

**Tabela 4 – Diagonal da Matriz de Ruído do Medida Implementação Clássica (W)**

|        |                  |               |        |              |      |
|--------|------------------|---------------|--------|--------------|------|
| W(1,1) | $\delta\theta_x$ | $1.6*10^{-6}$ | W(4,4) | $\delta V_x$ | 0.05 |
| W(2,2) | $\delta\theta_y$ | $1.6*10^{-6}$ | W(5,5) | $\delta V_y$ | 0.05 |
| W(3,3) | $\delta h$       | 12.8          | W(6,6) | $\delta V_z$ | 0.05 |

**Tabela 5 – Diagonal da Matriz de Ruído do Medida Implementação com Orientação (W)**

|        |                  |               |        |                  |              |
|--------|------------------|---------------|--------|------------------|--------------|
| W(1,1) | $\delta\theta_x$ | $1.6*10^{-6}$ | W(6,6) | $\delta V_z$     | 0.05         |
| W(2,2) | $\delta\theta_y$ | $1.6*10^{-6}$ | W(7,7) | $\delta\sigma_x$ | $35*10^{-3}$ |
| W(3,3) | $\delta h$       | 12.8          | W(8,8) | $\delta\sigma_y$ | $35*10^{-3}$ |
| W(4,4) | $\delta V_x$     | 0.05          | W(9,9) | $\delta\sigma_z$ | $35*10^{-3}$ |
| W(5,5) | $\delta V_y$     | 0.05          |        |                  |              |

## 6.7. Resultados da Simulação

O modelo do robô é simulado durante 10 minutos. A posição inicial é a mesma do experimento realizado na região amazônica ( latitude  $-3.314375^\circ$  e longitude  $-60.186111^\circ$ ), com velocidades e orientações iniciais nulas.

### 6.7.1. RMS

O rms dos parâmetros da posição , velocidade linear, orientação, aceleração linear e velocidade angular da navegação puramente inercial, do GPS e da fusão GPS/INS clássica e com orientação são calculados a partir dos resultados da simulação, tabela 8.

**Tabela 6 – RMS da Simulação**

|                  | GPS     | INS<br>Clássica | INS<br>Orientação | GPS/INS<br>Clássica | GPS/INS<br>Orientação | unidade |
|------------------|---------|-----------------|-------------------|---------------------|-----------------------|---------|
| $\delta\theta_x$ | 6.9715  | 228996.8341     | 113.059           | 0.4638              | 0.4568                | m       |
| $\delta\theta_y$ | 7.0223  | 416466.0691     | 146.5283          | 1.0464              | 0.1477                | m       |
| $\delta h$       | 12.8547 | 653249.9761     | 46029.7333        | 0.2532              | 0.2343                | m       |
| $\delta V_x$     | 0.0515  | 1149.1202       | 0.434             | 0.0177              | 0.0137                | m/s     |
| $\delta V_y$     | 0.0513  | 1493.0263       | 0.8749            | 0.018               | 0.0134                | m/s     |
| $\delta V_z$     | 0.0516  | 3070.3637       | 198.1474          | 0.0269              | 0.0267                | m/s     |
| $\delta\phi_x$   | -       | 131.2864        | 1.9992            | 0.7709              | 0.5197                | °       |
| $\delta\phi_y$   | -       | 40.8665         | 1.9988            | 0.7585              | 0.5047                | °       |
| $\delta\phi_z$   | -       | 92.7576         | 1.9978            | 30.7657             | 0.5254                | °       |
| $\delta A_x$     | -       | 0.045           | 0.045             | 0.045               | 0.0443                | $m/s^2$ |
| $\delta A_y$     | -       | 0.0215          | 0.0215            | 0.0215              | 0.0194                | $m/s^2$ |
| $\delta A_z$     | -       | 0.5854          | 0.5854            | 0.1207              | 0.1207                | $m/s^2$ |
| $\delta\omega_x$ | -       | 0.1015          | 0.1015            | 0.0775              | 0.0766                | rad/s   |
| $\delta\omega_y$ | -       | 0.1029          | 0.1029            | 0.0768              | 0.0752                | rad/s   |
| $\delta\omega_z$ | -       | 0.1018          | 0.1018            | 0.1048              | 0.0706                | rad/s   |

Observa-se, pela tabela, que a fusão GPS/INS com orientação forneceu o menor erro para todos os parâmetros da navegação, o que era esperado pela teoria, pois, dentre as implementações testadas, é a filtragem com a maior quantidade de informação.

A fusão GPS/INS clássica possui quase todos os erros menores que a navegação inercial com orientação, entretanto, apresenta um pior resultado na velocidade angular em torno do eixo z e no Yaw, porquanto esses estados são fracamente observados no filtro clássico e o erro da velocidade angular nesta simulação é grande. Ou seja, apesar da filtragem, esta não consegue reduzir o bastante o erro dessas variáveis para fornecer um resultado melhor do que o observado pelo sensor inercial utilizando a bússola.

A navegação inercial com orientação apresenta um menor erro para todos os parâmetros com relação à navegação inercial clássica. Este fato ocorre, uma vez que, na implementação clássica, o erro da orientação cresce ilimitadamente, já que o mesmo é calculado através da integral da velocidade angular medida, enquanto na implementação com orientação o erro é limitado, devido ao auxílio das bússolas no cálculo da orientação.

### **6.7.2. Posição**

A latitude e longitude do percurso real, do medido pelo GPS e dos calculados pela navegação INS e INS/GPS clássica e com orientação são mostrados nos mapas geo-referenciados, Figs. 61, 63 e 65. Estes foram construídos utilizando-se o site [www.gpsvisualizer.com/](http://www.gpsvisualizer.com/). O erro entre o valor real do percurso e o medido pelas cinco técnicas de navegação é dado pelas Figs. 62, 64 e 66.

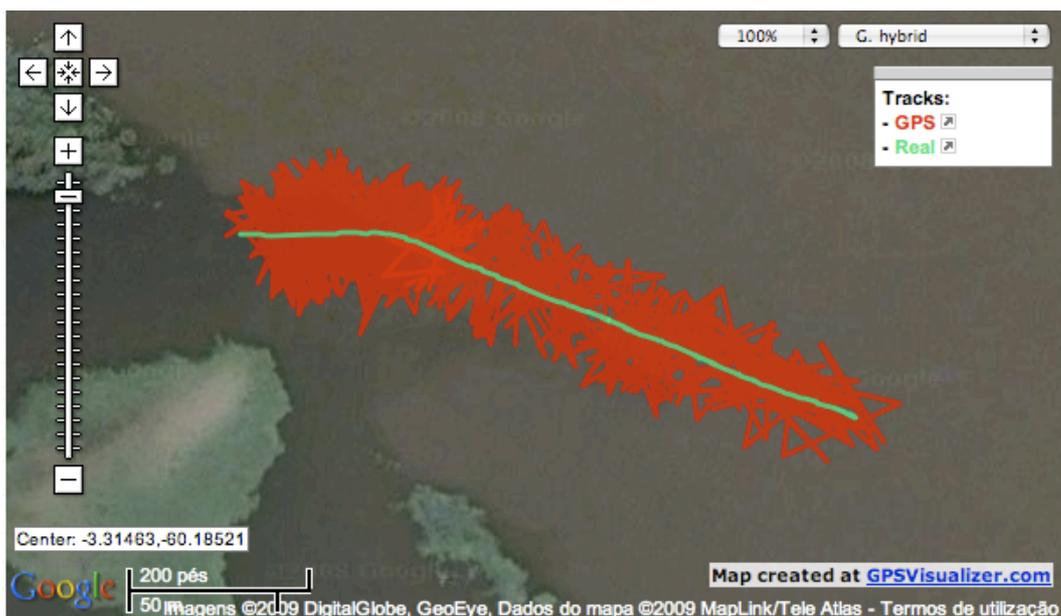


Figura 4 – Mapa Geo-referenciado do Percurso Medido pelo GPS na Simulação.

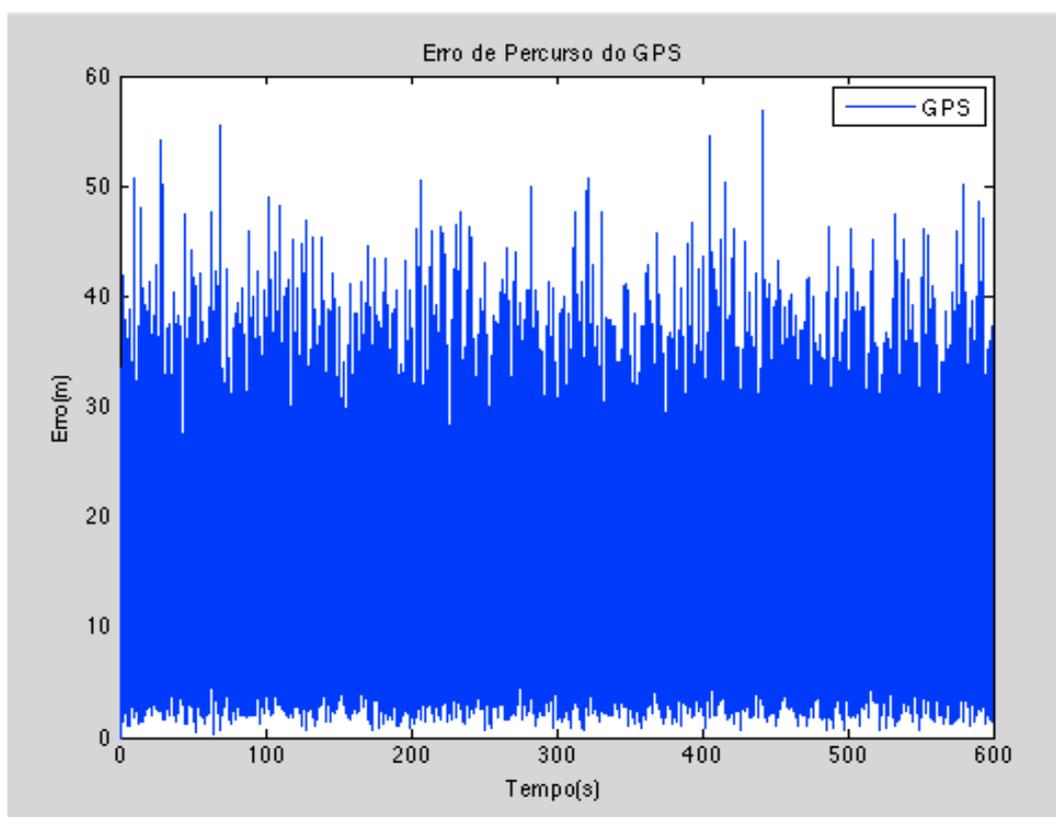


Figura 5 – Erro do Percurso Medido pelo GPS na Simulação.

Observa-se pelo mapa e no gráfico que o erro do GPS é limitado, o que condiz com a teoria e com o modelo utilizado para simular o sinal do mesmo.

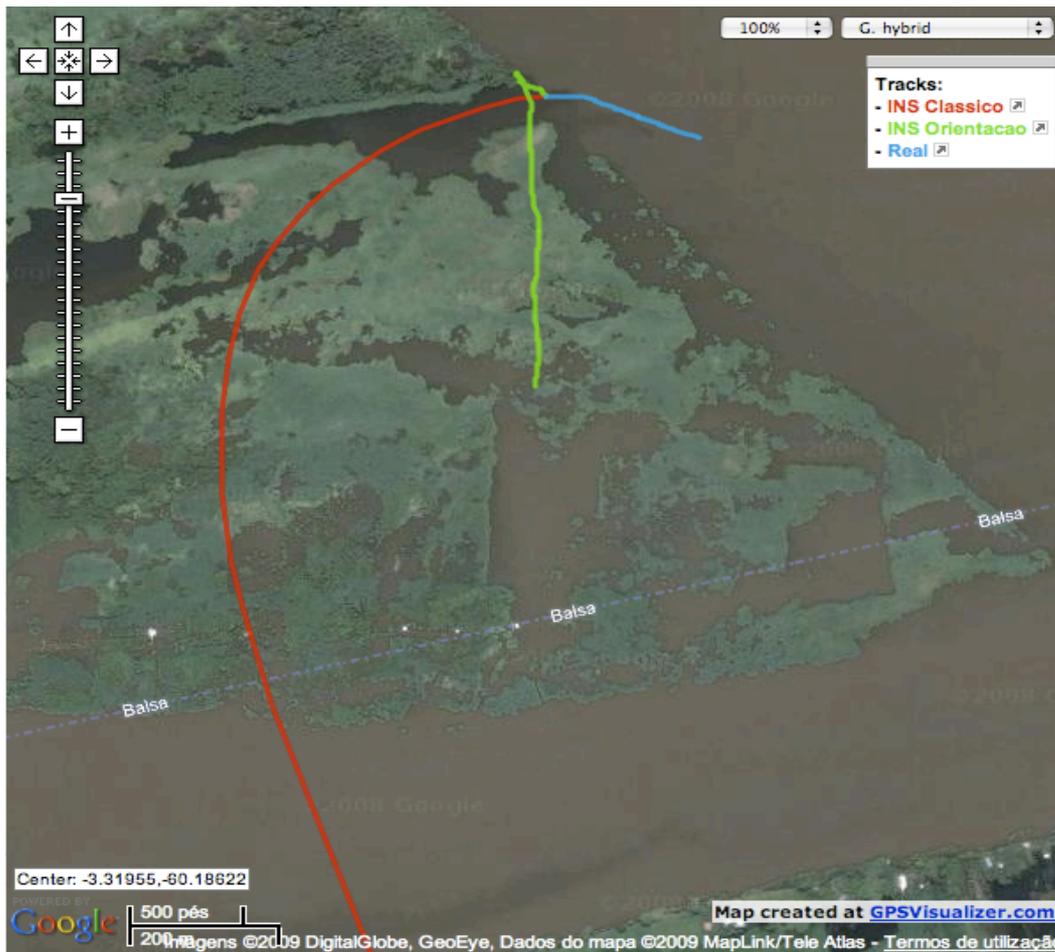


Figura 6 – Mapa Geo-referenciado do Percurso Calculado pela Navegação Inercial Clássica e com Orientação.

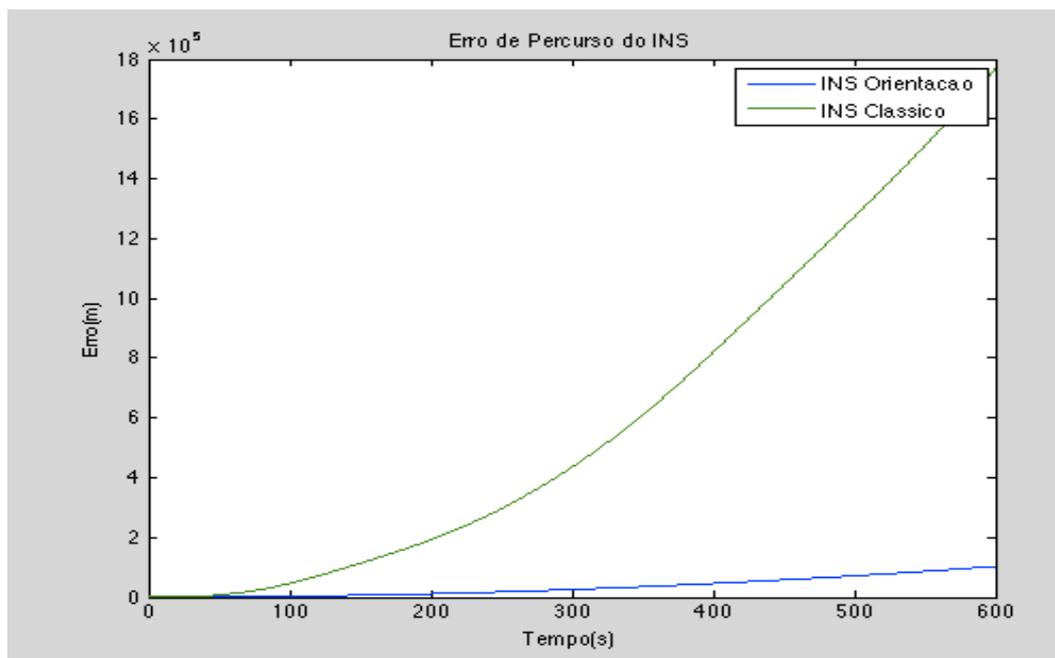


Figura 7 – Erro do Percurso Calculado pelo INS na Simulação.

Observa-se que o erro de posição na navegação inercial cresce ilimitadamente com o quadrado do tempo, o que condiz com a teoria já que o mesmo é resultado da integral dupla dos erros de aceleração. O erro de percurso da navegação inercial com orientação é menor que o da clássica, pois no cálculo da orientação da mesma o erro é limitado através da utilização de bússolas. Enquanto na clássica este cresce ilimitadamente com o tempo através da integral da velocidade angular medida.



Figura 8 –Mapa Geo-referenciado do Percurso Calculado pela Fusão GPS/INS Clássica e com Orientação.

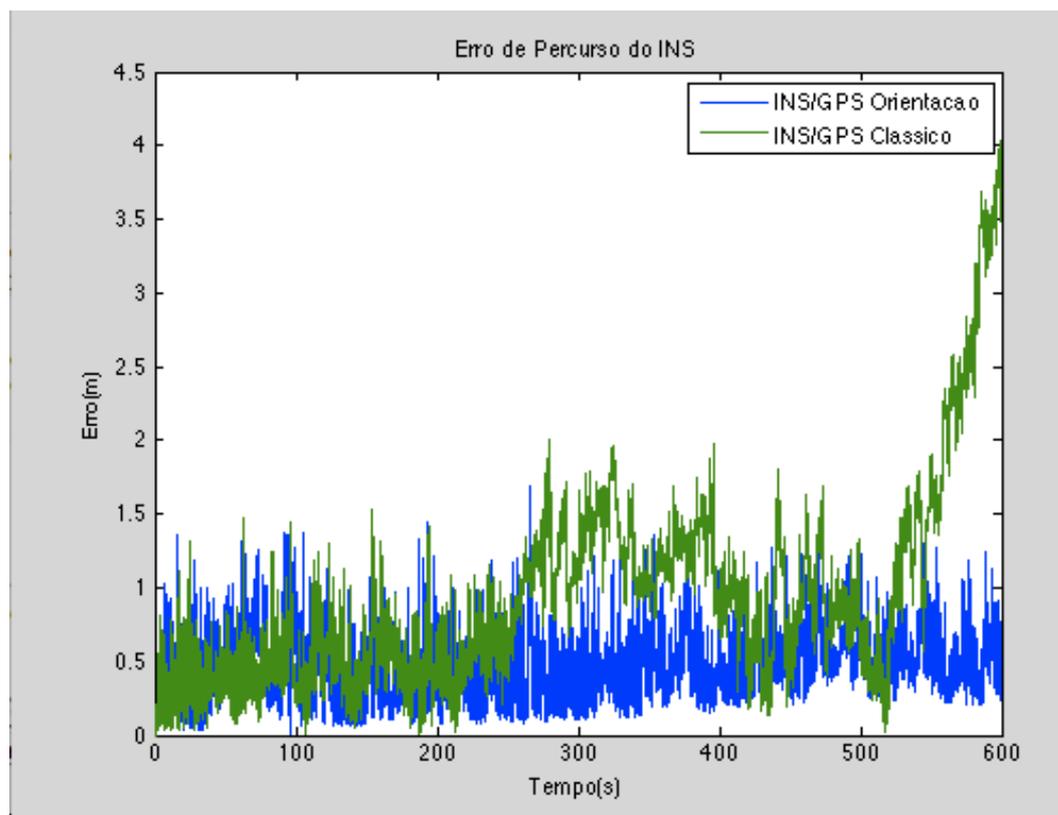


Figura 9 – Erro do Percurso Calculado pelo GPS/INS na Simulação.

Através dos gráficos e dos mapas, conclui-se que o erro da trajetória dada pela fusão do GPS/INS é menor que o dado pelo GPS e pelo INS, o que é esperado pela teoria, porquanto a mesma é a filtragem da fusão dos erros de ambos os sensores. O erro da navegação GPS/INS é limitado, pois a filtragem utiliza o erro do GPS, que é limitado.

Observa-se, também, que a fusão do GPS/INS com Orientação fornece uma melhor estimativa para percurso real do que a fusão GPS/INS clássica; fato conseqüente de o mesmo possuir mais informações sobre o estado através das medidas da bússola, resultando, assim, em uma melhor estimativa do erro.

O gráfico após os 500s mostra que a navegação INS/GPS clássica não converge, o que resulta em um maior erro; isto se deve a um mau ajuste de parâmetros e à não convergência na orientação do Yaw.

### 6.7.3. Velocidade Linear

O erro da velocidade linear total medida pelo GPS e calculado pelo INS e INS/GPS é dado pelas Fig. 67 e 68.

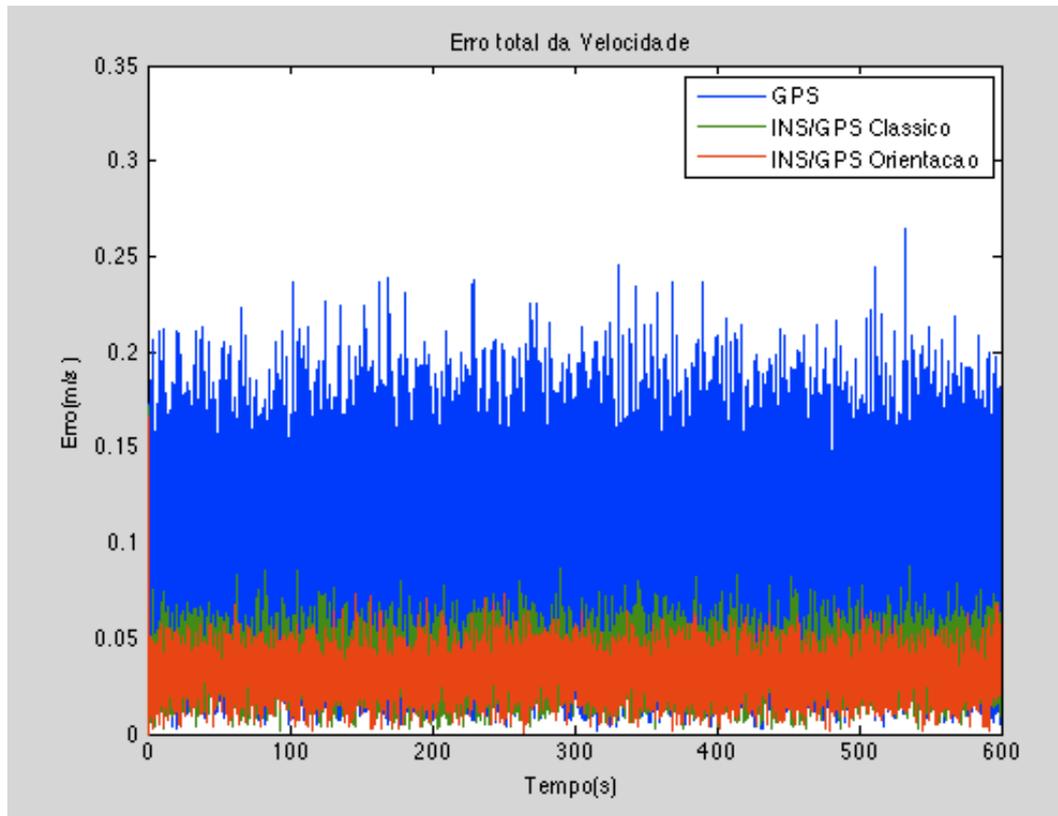


Figura 10 –Gráfico do Erro da Velocidade Linear Total do INS/GPS e do GPS.

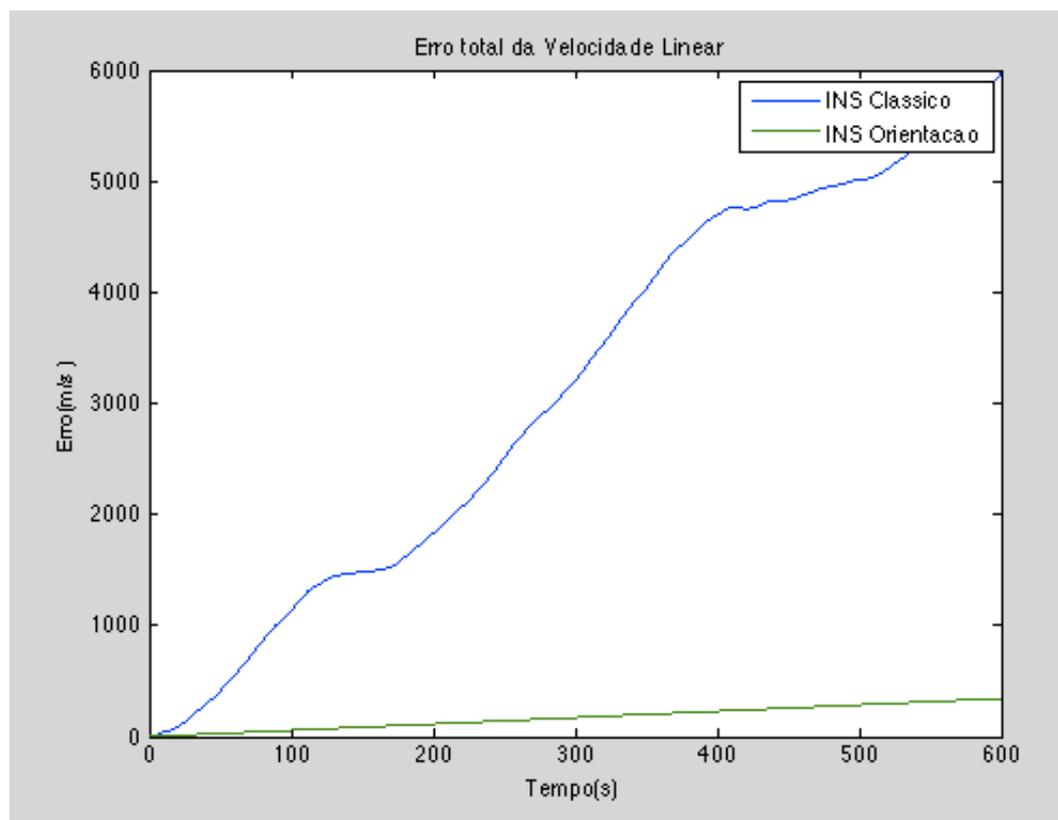


Figura 11 –Gráfico do Erro da Velocidade Linear Total INS.

Observa-se que a velocidade dada pela fusão do GPS/INS possui um erro menor que a dada pelo GPS e pelo INS, o que é esperado pela teoria, pois a mesma é a filtragem da fusão dos erros de ambos os sensores. O erro da navegação GPS/INS e do GPS é limitado, já que a filtragem utiliza o erro do GPS, que é limitado por definição. O erro do INS cresce ilimitadamente com o tempo, o que pode ser observado na Fig. 68; este fato ocorre em função da integral dos erros do acelerômetro e do giroscópio no cálculo da velocidade.

A navegação clássica possui um erro maior de velocidade do que a com orientação, o que é resultado do limite imposto ao erro de orientação pela utilização de bússolas no cálculo do mesmo.

#### 6.7.4. Orientação

O erro de orientação do veículo nos 3 eixos de rotação “roll”, “pitch” e “yaw” são mostrados nas Figs. 69 a 74.

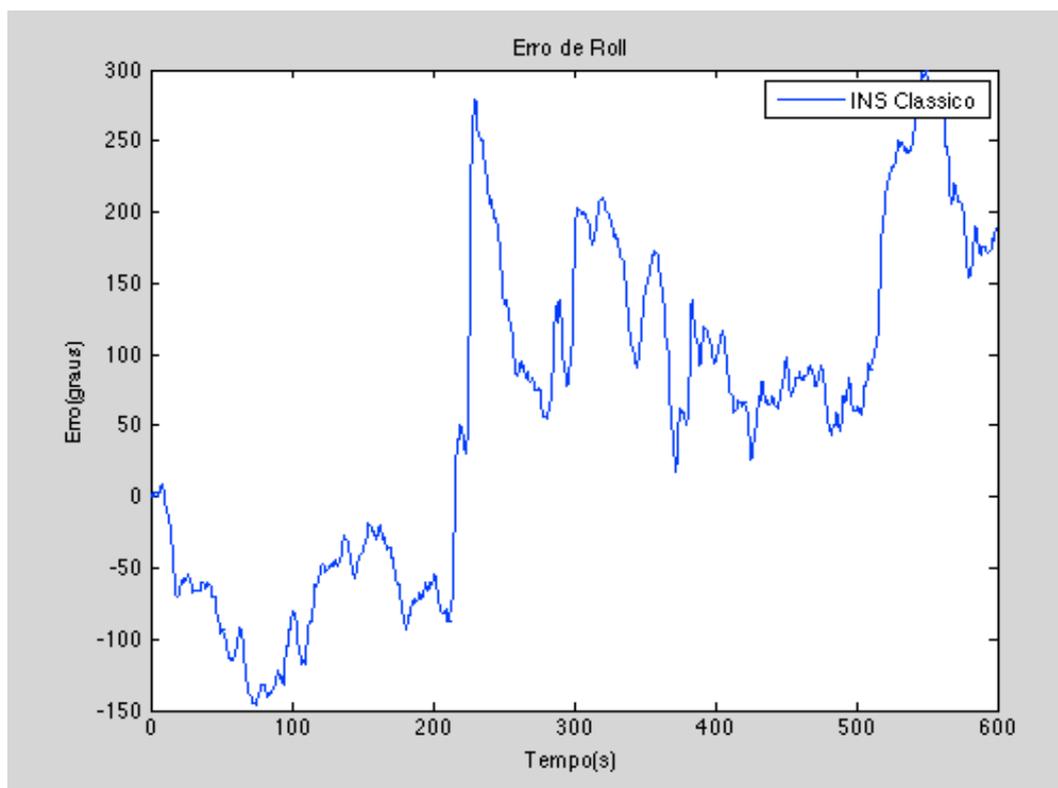


Figura 12 –Erro de Roll do INS Clássico na Simulação.

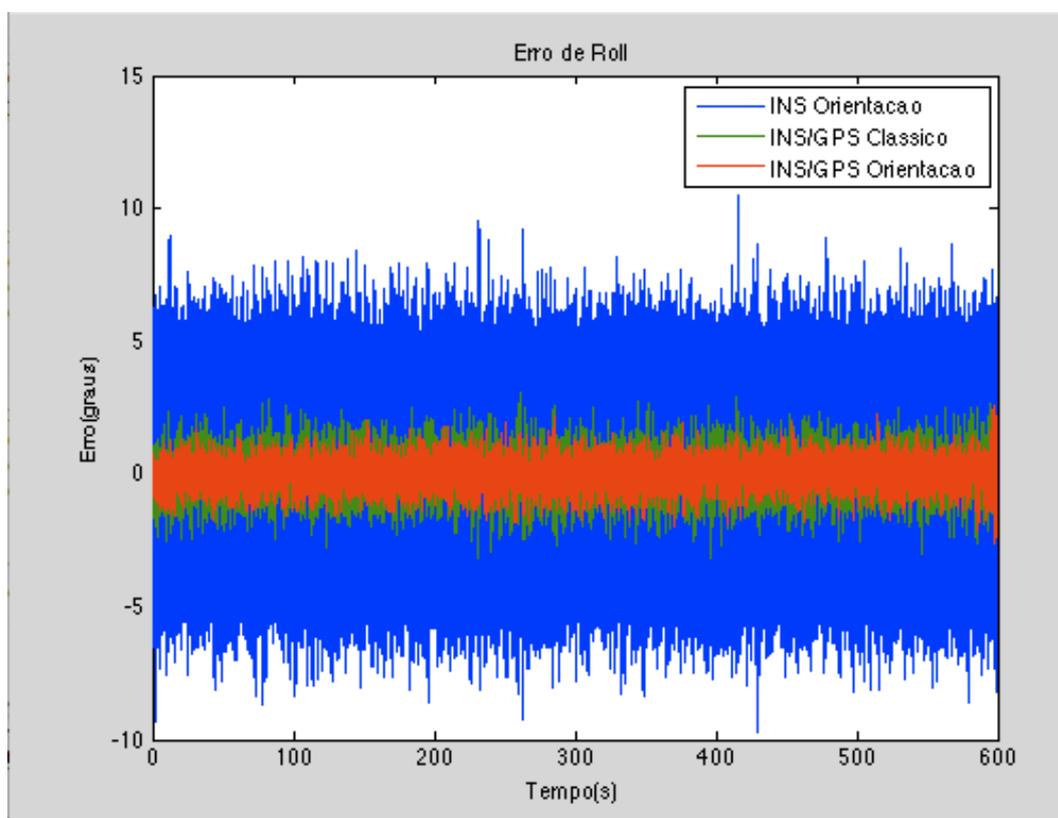


Figura 13 –Erro de Roll do INS com Orientação e do GPS/INS na Simulação.

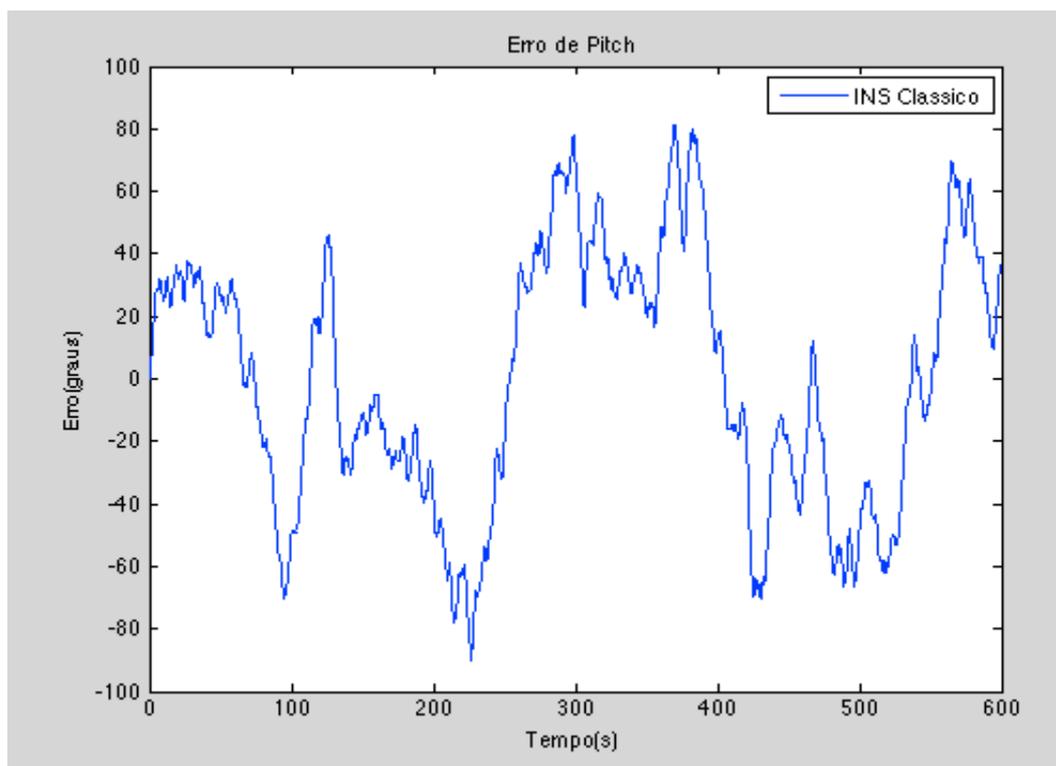


Figura 14 –Erro de Pitch do INS Clássico na Simulação.

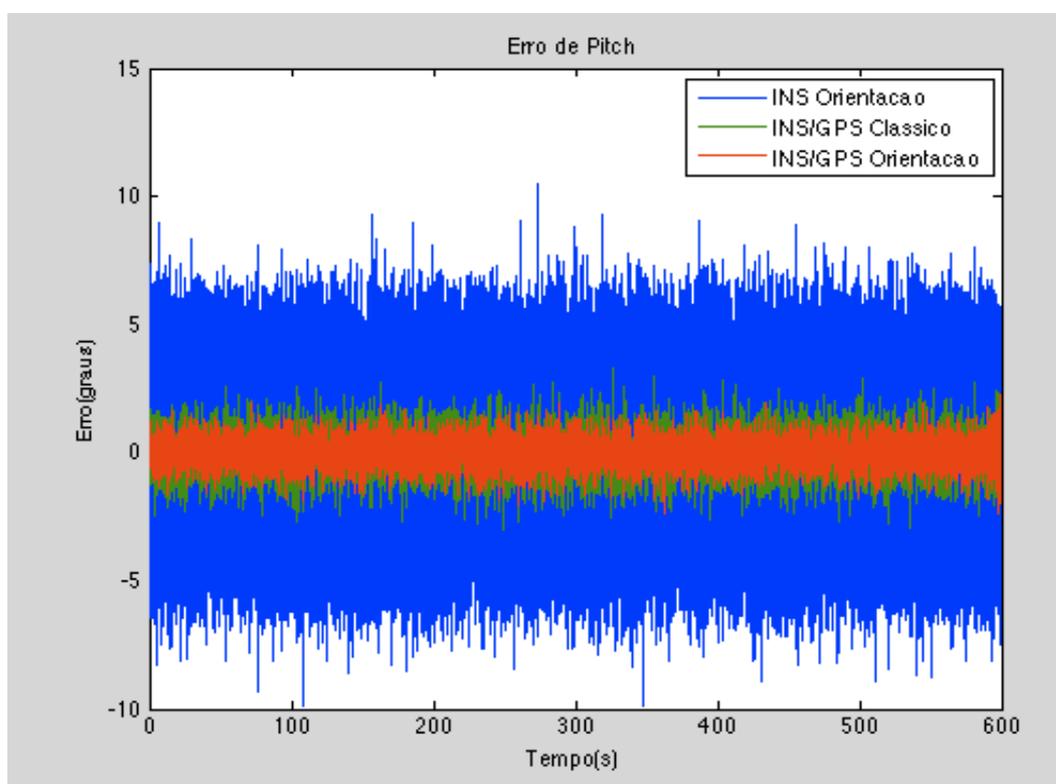


Figura 15 –Erro de Pitch do INS com Orientação e do GPS/INS na Simulação.

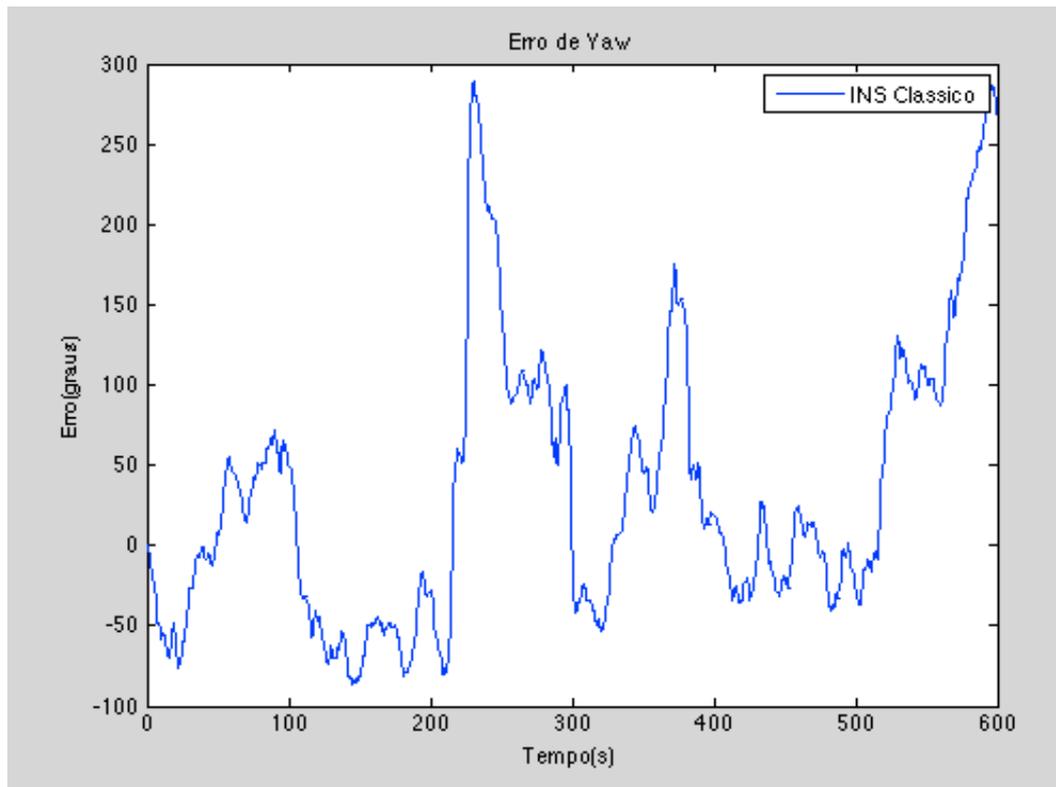


Figura 16 –Erro de Yaw do INS Clássico na Simulação.

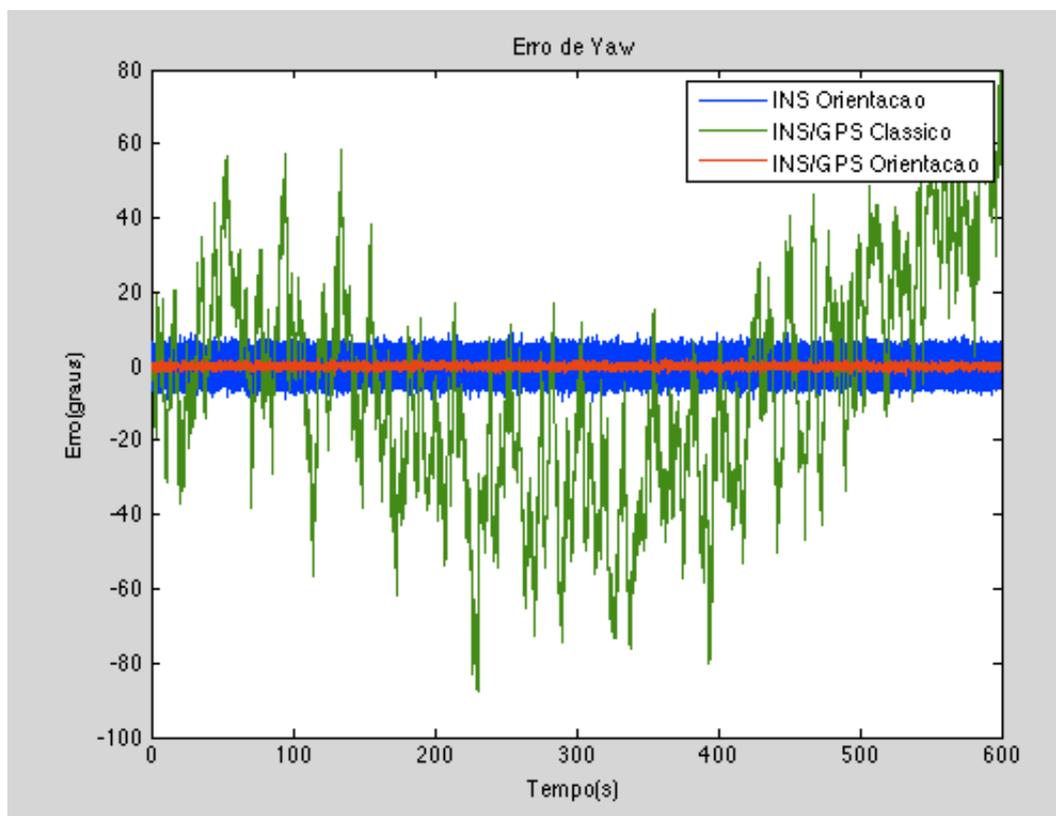


Figura 17 –Erro de Yaw do INS com Orientação e do GPS/INS na Simulação.

O erro nos 3 eixos de orientação dado pela navegação inercial clássica cresce ilimitadamente, o que era esperado, já que esta é calculada através da integral da medida da velocidade angular. A navegação inercial com orientação possui o seu erro limitado nos 3 eixos, o que era esperado pela teoria.

O filtro clássico e com orientação convergem no “Pitch” e “Roll”, já que estes, devido a restrições geométricas da simulação, são nulos, sendo que o filtro com orientação fornece um melhor resultado que o clássico, por possuir mais informações sobre estes estados. Entretanto, devido ao erro grande na velocidade angular e à não observabilidade direta da orientação, o “Yaw” não converge no filtro clássico, obtendo um resultado melhor apenas do que a navegação inercial clássica.

### 6.7.5. Aceleração Linear

A Fig. 72 apresenta o erro da aceleração linear total no sistema de coordenadas do corpo.

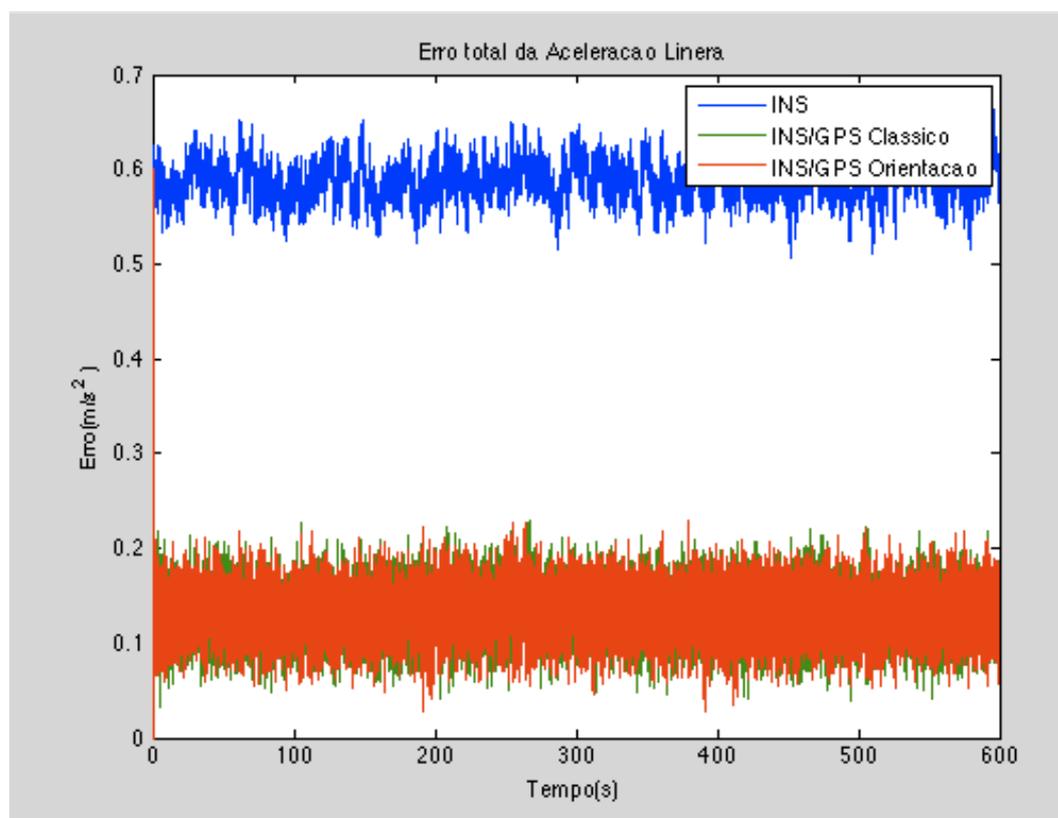


Figura 18 –Erro Total da Aceleração Linear na Simulação.

O erro da aceleração na navegação inercial é o erro do sensor em si, logo não existe diferença entre a navegação inercial clássica e com orientação. A navegação INS/GPS com orientação fornece uma melhor estimativa do bias dos acelerômetros que a clássica, pois a mesma possui um menor erro de orientação. O erro da navegação inercial possui um bias devido ao fator de escala atuando constantemente sobre a força gravitacional medida pelo sensor inercial.

#### 6.7.6. Velocidade Angular

A Fig. 76 apresenta o erro total da velocidade angular no sistema de coordenadas do corpo.

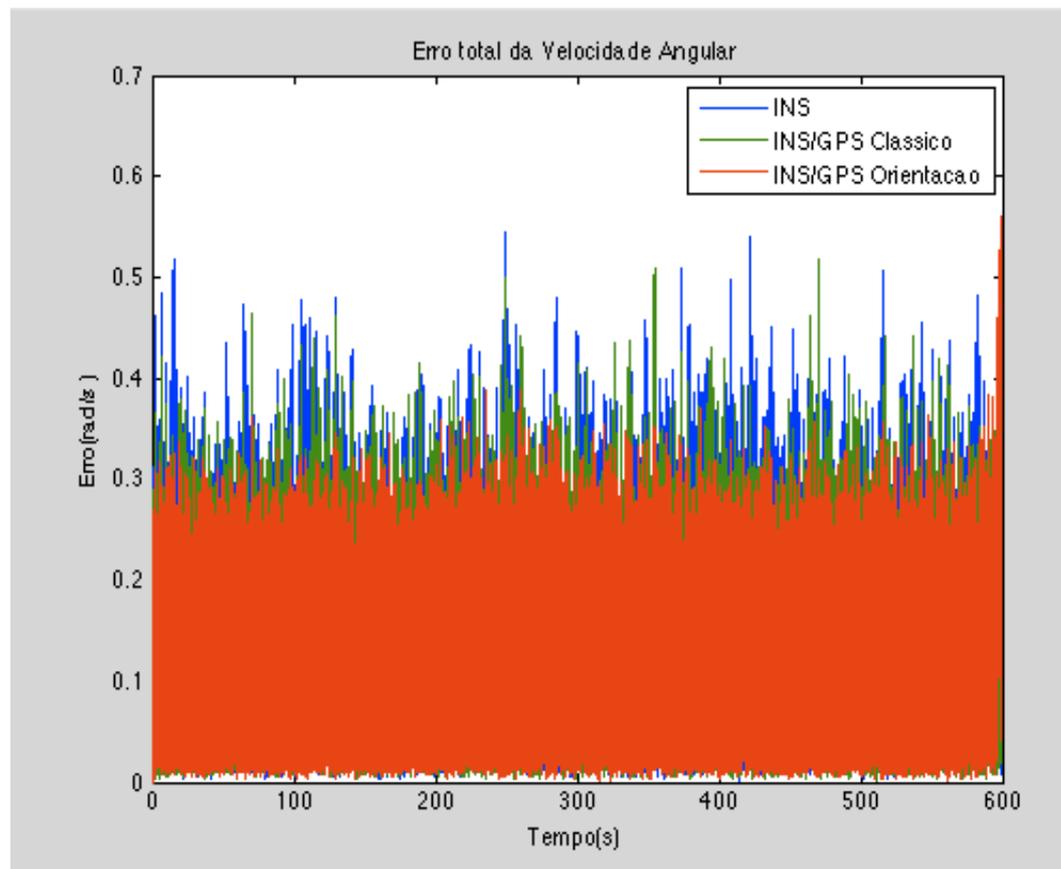


Figura 19 –Erro da Velocidade Angular na Simulação.

Não existe diferença entre o erro de velocidade angular do INS clássico e aquele com orientação. O erro na navegação INS/GPS com orientação é menor que a clássica, pois a mesma possui um menor erro de orientação e ambos possuem o erro menor que o INS, devido à filtragem.

### 6.8. Resultados da Simulação de Falha do Sinal de GPS

Foi simulada uma falha no sinal do GPS do 30s ao 40s em uma simulação de 50s. Durante a falha do sinal de GPS, o filtro de Kalman é apenas atualizado com as observações de orientações. Os equacionamentos da fusão e da navegação inercial correspondem ao com orientação. No instante da falha, a navegação inercial é considerada como estando na mesma posição e com a mesma velocidade que a navegação com filtro, o que permite comparar a performance do filtro sem o sinal do GPS com a navegação inercial. As Figs. 77 a 82 representam os erros da navegação.

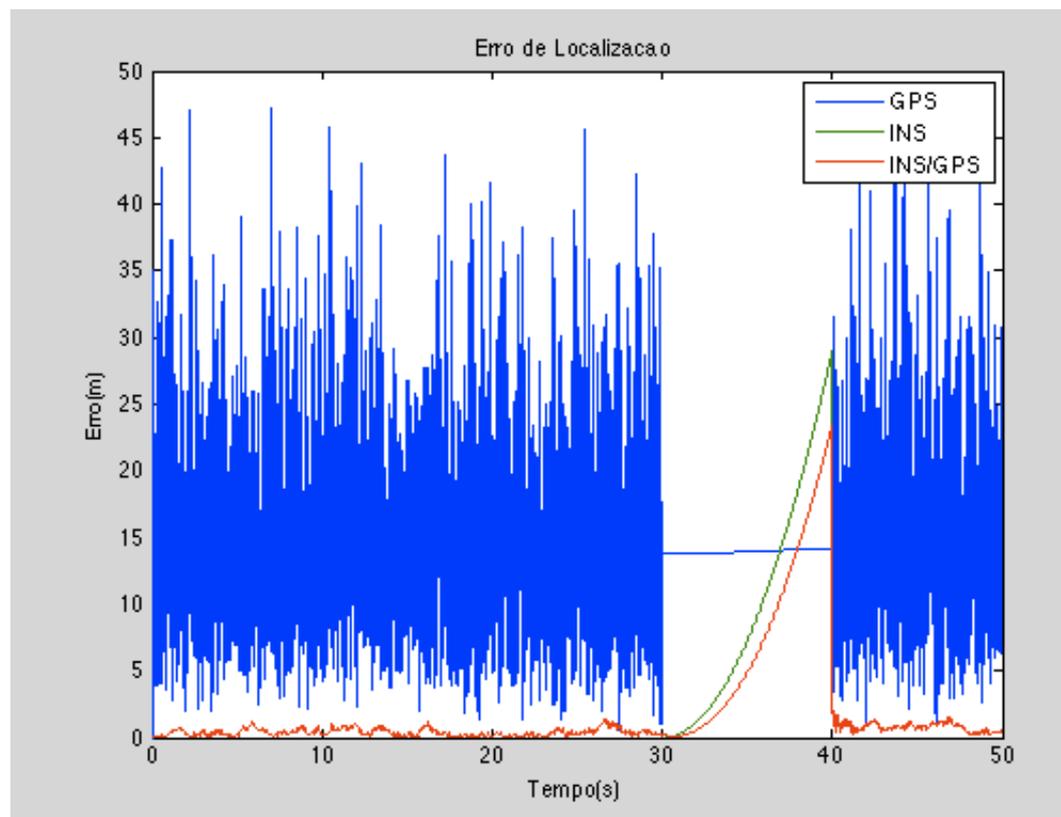


Figura 20 –Erro do Percurso na Simulação.

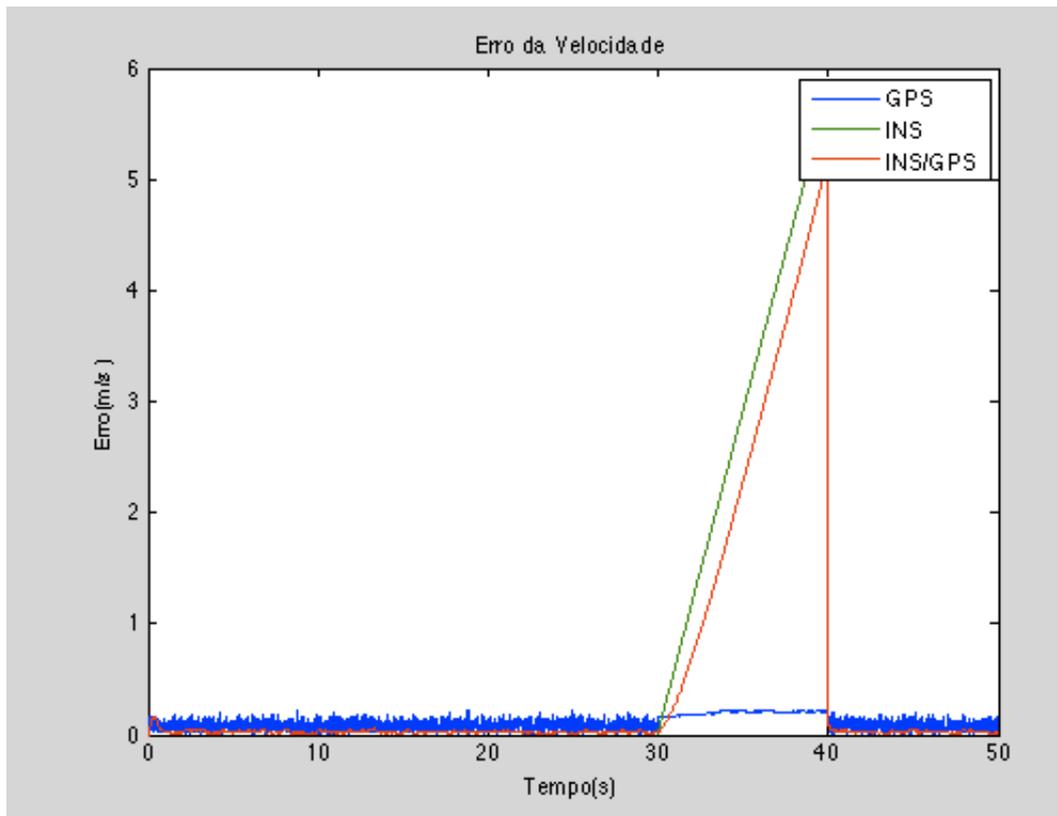


Figura 21 –Erro da Velocidade Linear Total na Simulação.

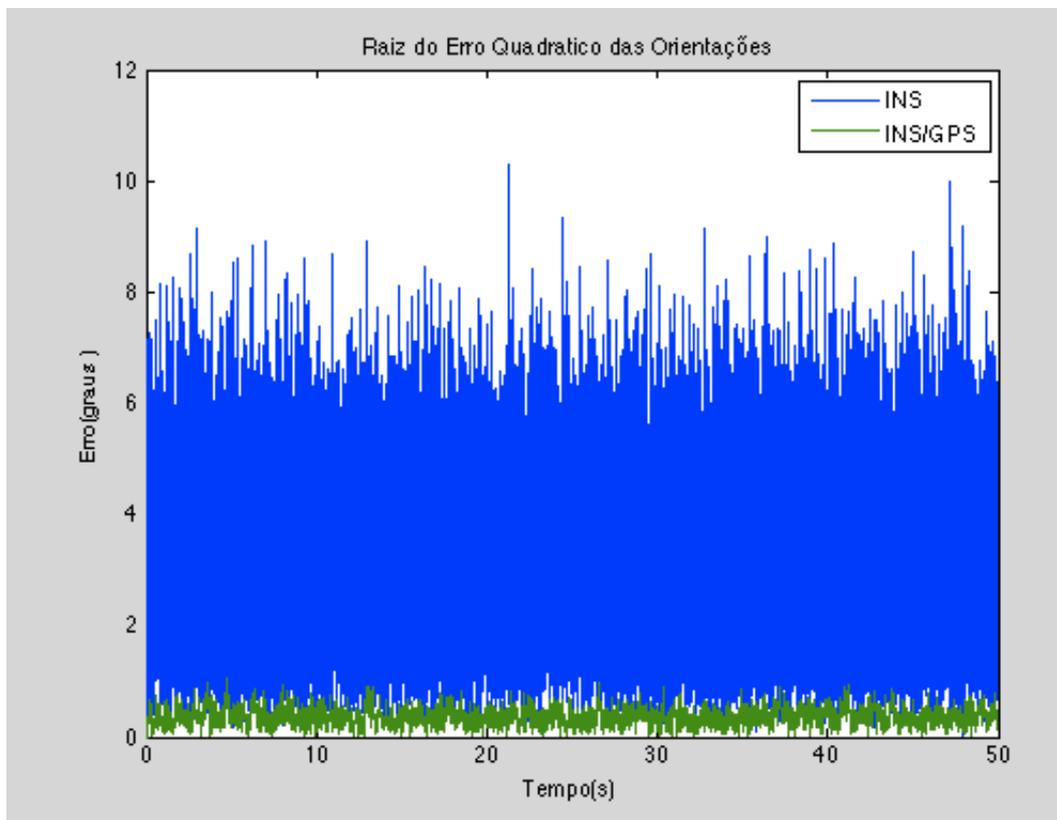


Figura 22 –Raiz do Erro Quadrático da Orientação na Simulação.

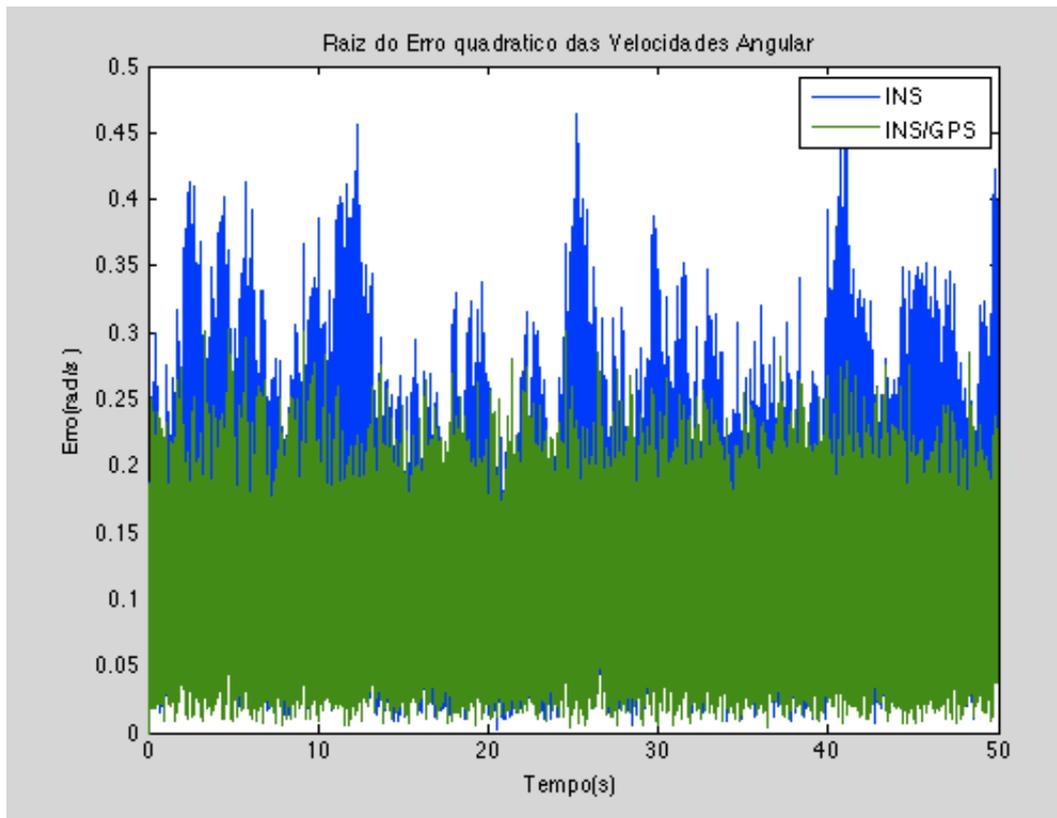


Figura 23 –Raiz do Erro Quadrático da Velocidade Angular na Simulação.

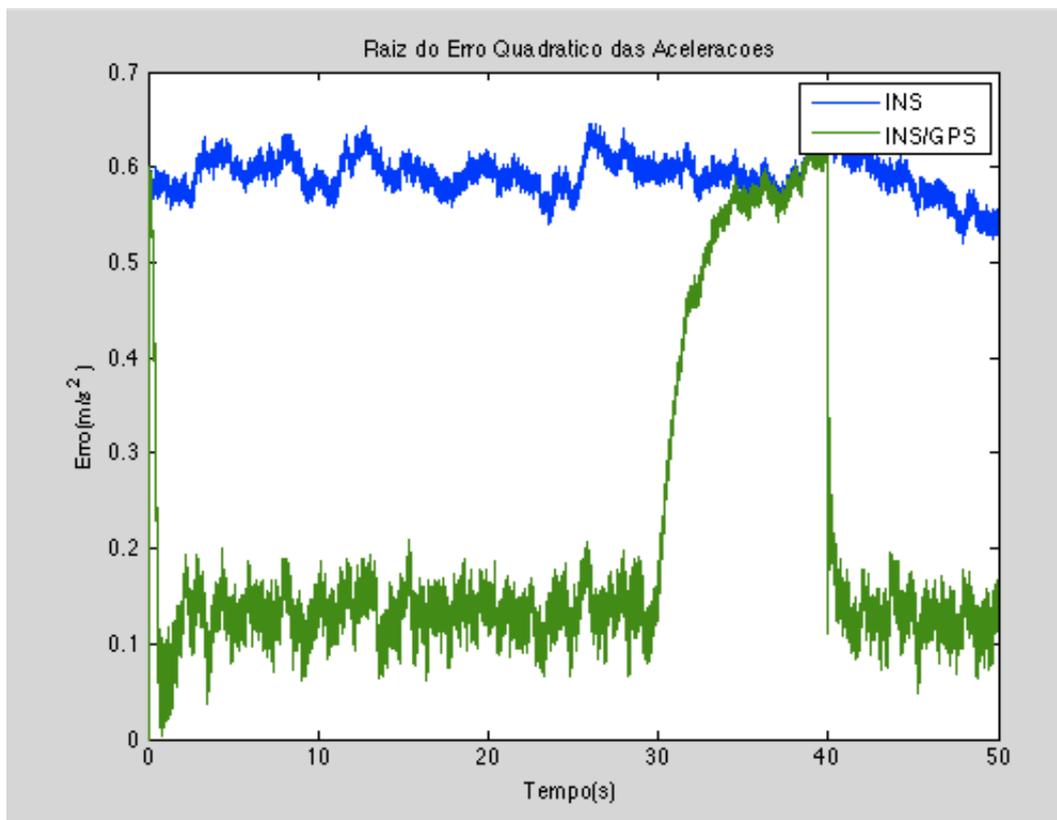


Figura 24 –Raiz do Erro Quadrático da Aceleração Linear na Simulação.

Durante a falha do sinal de GPS, o erro da aceleração na navegação INS/GPS cresce com o tempo, aproximando-se ao erro da navegação inercial. O filtro de Kalman, descrito nesta dissertação, determina apenas a parcela do bias que se move do erro do acelerômetro, o qual têm uma relação temporal  $(-1/\tau)$ . Como as observações de orientação possuem uma fraca relação com os estados do bias que se move do acelerômetro, o fator de correção dado pelo filtro se reduz com o tempo.

O erro da velocidade angular na navegação INS/GPS se mantém durante a falha do sinal de GPS, pois o mesmo possui uma forte relação com o erro de orientação que está sendo diretamente observado.

Dado que o erro da aceleração linear e a velocidade angular da navegação GPS/INS são menores do que a INS, os valores calculados da posição e da velocidade apresentam, também, um erro menor. Em função de a observabilidade de posição e velocidade ser fraca com relação à observação da orientação, o filtro não é capaz de estabilizar os erros de ambos, o que resulta que cresçam ilimitadamente com o quadrado do tempo e o tempo respectivamente.

Após comprovada a eficácia do filtro através de simulações será feita a análise experimental da fusão do GPS/INS.

## 7 Experimentos

Foram realizados dois experimentos distintos com o sensor GPS da marca Garmin e o sensor inercial da marca Xsens, Fig. 83 e 84 respectivamente: Na floresta amazônica, onde os sensores foram instalados no protótipo do Robô Ambiental Híbrido (Fig. 82) descrito no Capítulo 1 e desenvolvido pelo Centro de Pesquisas da Petrobras. Em um ambiente visualmente reconhecível no Rio de Janeiro, onde os sensores foram instalado em um carro comum. Os *datasheets* dos sensores se encontram no cd em Anexo.



Figura 1 – Robô Ambiental Híbrido



Figura 2 – Sensor Inercial (Xsens)



Figura 3– Sensor GPS (Garmin)

## 7.1. Experimento na Floresta Amazônica

O robô possui um computador embarcado (PC-104) rodando o sistema operacional Linux. Visando integrar os sensores e tornar o robô operacional, foram desenvolvidos códigos na linguagem C++ para esta plataforma. O robô é radio-controlado, sendo a base de operação desenvolvida na linguagem Java, vide Fig. 85 e 86 para imagens da interface desenvolvida.

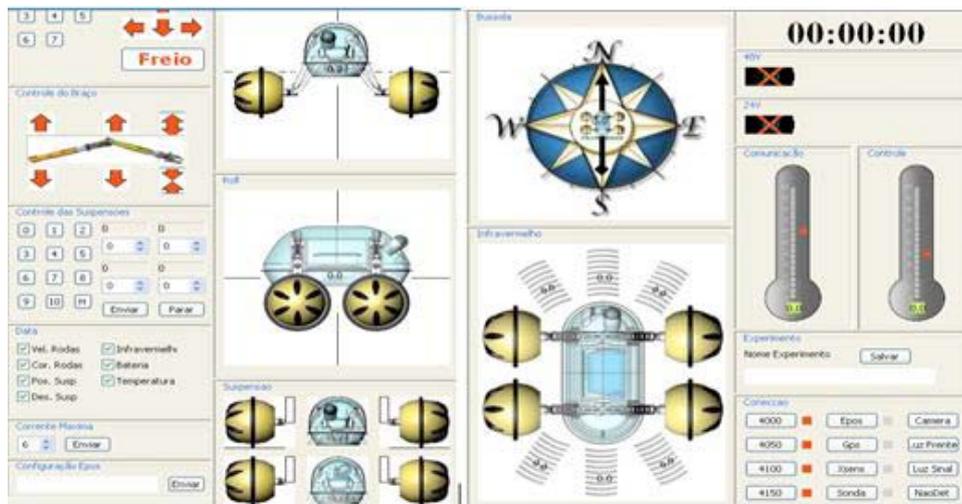


Figura 4 – Painel de Controle 1



Figura 5 – Painel de Controle 2

O experimento foi realizado na Floresta Amazônica, em uma área localizada a alguns quilômetros de Manaus no rio Solimões, Fig. 87. O robô percorreu a área se distanciando da base de operações, até haver falha de comunicação. As medições feitas pelo sensor GPS e inercial foram armazenadas em arquivos de texto.



Figura 6– Área de Testes na Floresta Amazônica

## **7.2. Ambiente Visualmente Reconhecível**

Os sensores foram instalados no teto de um carro comum e ligados a um laptop com o sistema operacional Linux. O carro foi então dirigido em torno de uma lagoa no Rio de Janeiro. As medições feitas pelo sensor GPS e inercial foram armazenadas em arquivos de texto.

### 7.3. Resultado Experimental

Os resultados de navegação INS, GPS e INS/GPS foram alcançados pós-processando no Matlab os arquivos-textos das medições armazenadas durante os experimentos. O diagrama da Fig. 88 representa esse processamento, onde o bloco Navegação Inercial representa o equacionamento da navegação inercial desenvolvida no Capítulo 4. A Navegação Inercial com Correção é o mesmo equacionamento, mas corrigido pelos estados calculados pelo filtro. As posições calculadas pelos 3 métodos são grafadas posteriormente utilizando o site [www.gpsvisualizer.com/](http://www.gpsvisualizer.com/).

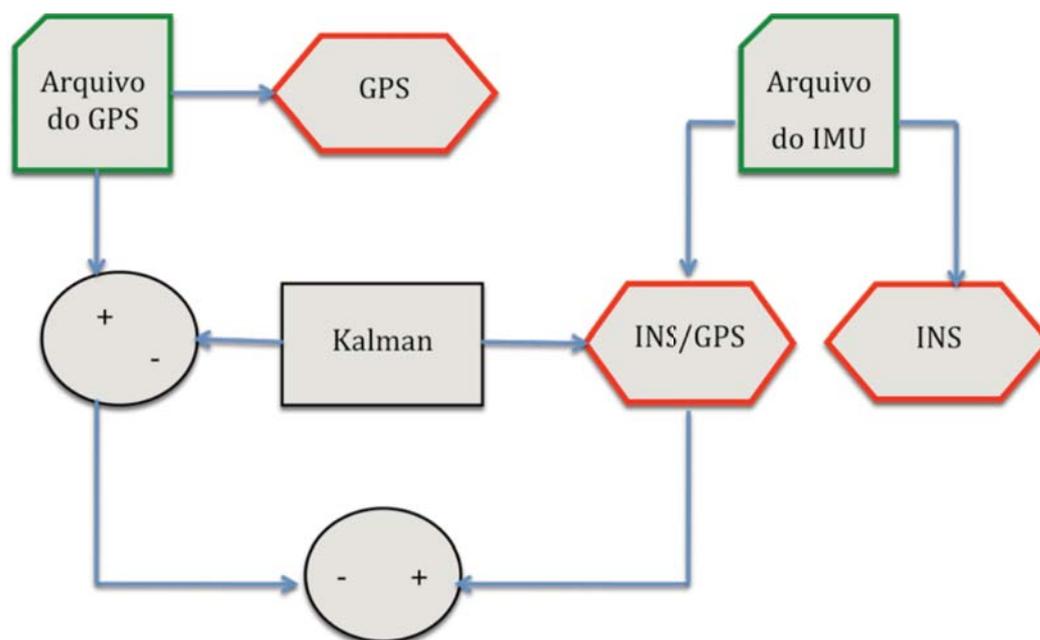


Figura 7– Diagrama de Blocos do Experimento

O Filtro de Kalman utilizado nos experimentos foi o com orientação, pois foi verificado nas simulações que o mesmo apresenta uma performance superior quando comparado ao clássico. Os parâmetros do ruído do processo e da medida são apresentados nas tabelas 9 e 10, respectivamente.

**Tabela 1 – Diagonal da Matriz de Ruído do Processo Experimental (V)**

|        |                  |           |          |                  |             |
|--------|------------------|-----------|----------|------------------|-------------|
| V(1,1) | $\delta\theta_x$ | $10^{-6}$ | V(9,9)   | $\delta\phi_z$   | $10^{-4}$   |
| V(2,2) | $\delta\theta_y$ | $10^{-6}$ | V(10,10) | $\delta A_x$     | $10^{-3}$   |
| V(3,3) | $\delta h$       | $10^{-6}$ | V(11,11) | $\delta A_y$     | $10^{-3}$   |
| V(4,4) | $\delta V_x$     | $10^{-2}$ | V(12,12) | $\delta A_z$     | $10^{-3}$   |
| V(5,5) | $\delta V_y$     | $10^{-2}$ | V(13,13) | $\delta\omega_x$ | $5*10^{-3}$ |
| V(6,6) | $\delta V_z$     | $10^{-2}$ | V(14,14) | $\delta\omega_y$ | $5*10^{-3}$ |
| V(7,7) | $\delta\phi_x$   | $10^{-4}$ | V(15,15) | $\delta\omega_z$ | $5*10^{-3}$ |
| V(8,8) | $\delta\phi_y$   | $10^{-4}$ |          |                  |             |

**Tabela 2 – Diagonal da Matriz de Ruído da Medida Experimental (W)**

|        |                  |               |        |                  |              |
|--------|------------------|---------------|--------|------------------|--------------|
| W(1,1) | $\delta\theta_x$ | $1.6*10^{-6}$ | W(6,6) | $\delta V_z$     | 0.05         |
| W(2,2) | $\delta\theta_y$ | $1.6*10^{-6}$ | W(7,7) | $\delta\theta_x$ | $35*10^{-3}$ |
| W(3,3) | $\delta h$       | 3             | W(8,8) | $\delta\theta_y$ | $35*10^{-3}$ |
| W(4,4) | $\delta V_x$     | 0.05          | W(9,9) | $\delta\theta_z$ | $35*10^{-3}$ |
| W(5,5) | $\delta V_y$     | 0.05          |        |                  |              |

**7.4.****Resultados dos Experimento na Amazônia**

As posições calculadas pelos métodos INS, GPS e INS com filtro de Kalman são grafadas nos mapas geo-referenciados, Figs. 89 a 92.



Figura 8 – Mapa Geo-Referenciado das posições do Filtro de Kalman, do INS e do GPS nos testes na Amazônia.



Figura 9 – Zoom do Mapa Geo-Referenciado das posições do Filtro de Kalman, do INS e do GPS nos testes na Amazônia



Figura 10 – Corte 1 da Ampliação do Mapa Geo-Referenciado das posições do Filtro de Kalman, do INS e do GPS nos testes na Amazônia



Figura 11 – Corte 2 da Ampliação do Mapa Geo-Referenciado das posições do Filtro de Kalman, do INS e do GPS nos testes na Amazônia

A trajetória real do robô durante os testes na Amazônia não foi traçada, pois esta não é conhecida. Durante os testes o sensor de GPS estimou que em média as medidas de latitude e longitude, feitas pelo mesmo, possuem um erro de aproximadamente 20 metros. As Figs. 89 a 92 possuem sua escala representada no

canto inferior esquerdo. Devido à posição dada pelo filtro de Kalman ser próxima à do GPS, menor que 20 metros, pode-se afirmar que a mesma, assim como a do GPS, encontra-se próxima à posição real, enquanto a calculada pela navegação puramente inercial encontra-se a centenas de quilômetros de distância. Resultado esperado pela teoria, já que o erro da navegação inercial cresce ilimitadamente devido à integração dupla no cálculo da posição.

Verificando pelo *software* Google Earth, o local de testes possui uma altitude aproximadamente constante de 10 metros, logo os erros da altitude calculada pelo filtro de Kalman e pela navegação inercial podem ser grafados, Figs. 93 e 94.

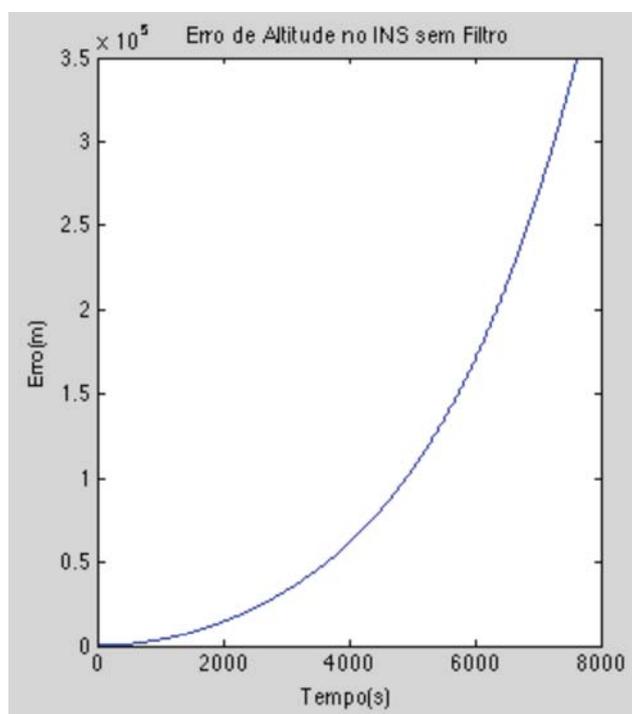


Figura 12 – Erro de Altitude do INS nos testes da Amazônia

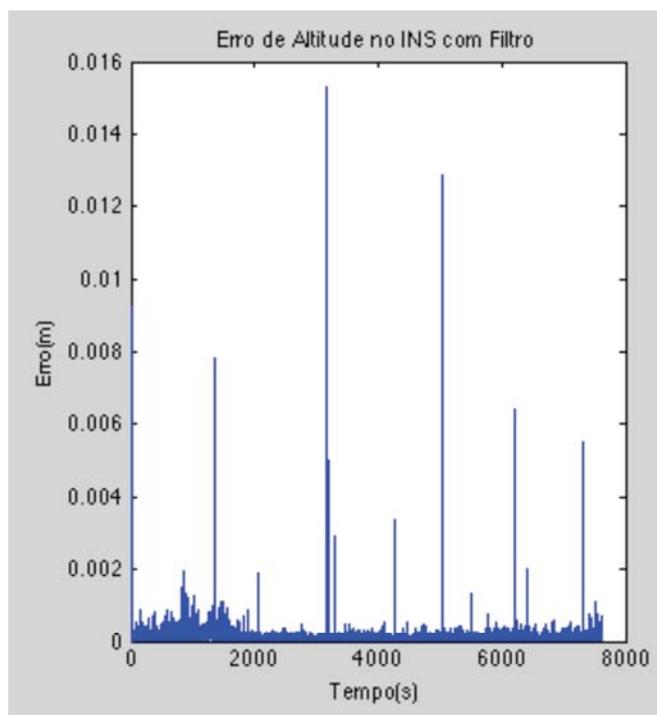


Figura 13 – Erro de Altitude do Filtro de Kalman nos testes da Amazônia

O erro de altitude do filtro de Kalman fica limitado e próximo de 0, resultado da filtragem dos erros do INS e do GPS. Já o erro de altitude na navegação puramente inercial cresce com o quadrado do tempo devido à integral dupla no cálculo da posição e à realimentação positiva do sistema.

## 7.5.

### **Resultado Experimental no Ambiente Visualmente Reconhecível**

O resultado da navegação em torno da lagoa calculada pelos métodos INS, GPS e INS/GPS são grafadas nos mapas geo-referenciados, Figs. 95 a 96.

## 7.6.



Figura 14 – Navegação do GPS e INS/GPS em torno da lagoa.



Figura 15 – Navegação do INS em torno da lagoa.

Observa-se pelos mapas que o erro da navegação puramente inercial cresce ilimitadamente, enquanto o erro da navegação GPS/INS e GPS são limitados se mantendo próximos do percurso real. Visando visualizar melhor o erro da navegação GPS e GPS/INS, o mapa da mesma será aproximado e o percurso real vai ser traçado manualmente através do reconhecimento visual da área onde o experimento foi realizado, vide Fig. 97.

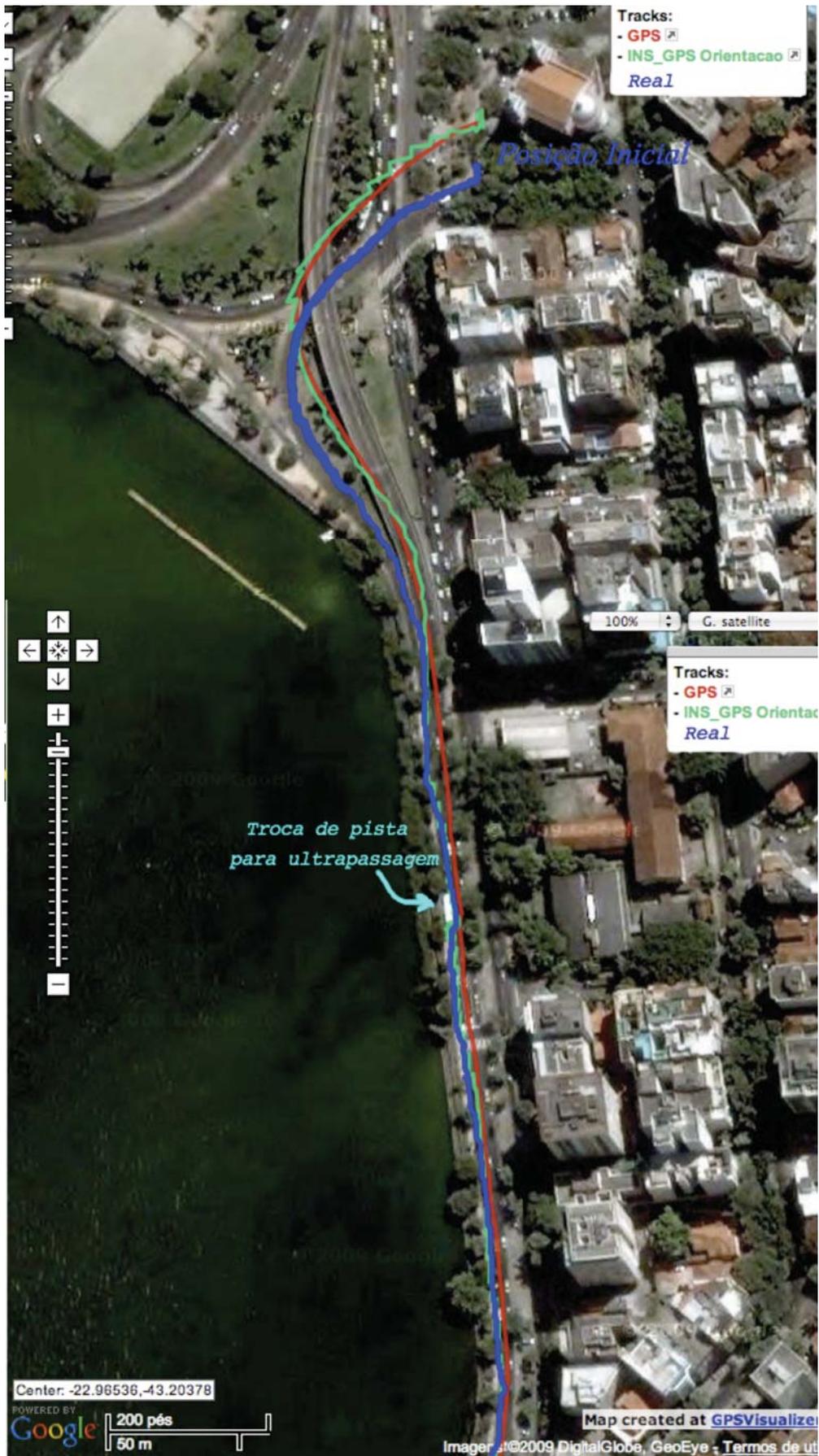


Figura 16 – Navegação do INS, INS/GPS e Real em torno da lagoa.

Observa-se na figura que a posição inicial dada pelo GPS possui um erro, logo a navegação INS/GPS que depende desta posição inicial também fica errônea. O erro do GPS se encontra a menos de 10m da posição, como esperado pela teoria. O erro do INS/GPS diminui com o tempo tendendo ao percurso real. A Fig. 98 mostra os mesmos dados do experimento processados com o filtro de Kalman clássico. Observa-se que o mesmo apresenta um pior resultado que o filtro de Kalman com orientação, o está de acordo com o resultado alcançado nas simulações.

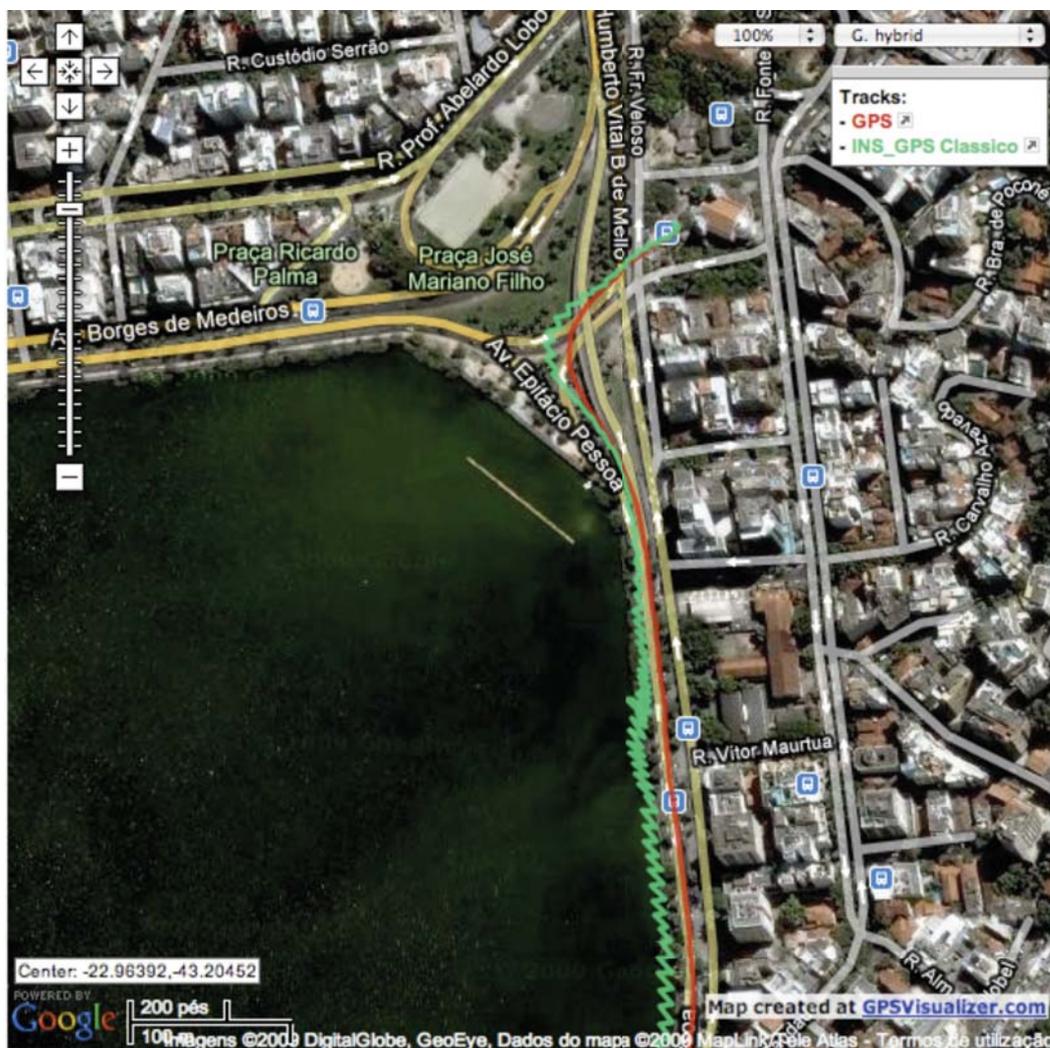


Figura 17 –INS/GPS Clássico em torno da lagoa.

## 7.7.

**Simulação de Falha no sinal do GPS no Experimento**

Utilizando os dados gravados no experimento visualmente reconhecível foi simulado uma falha de 30 segundos no sinal do GPS, do instante  $t=100s$  a  $130s$ . Durante a falha apenas a orientação é observada e atualizada no filtro.



Figura 18 –Mapa da Falha do Sinal do GPS no Experimento na Lagoa.

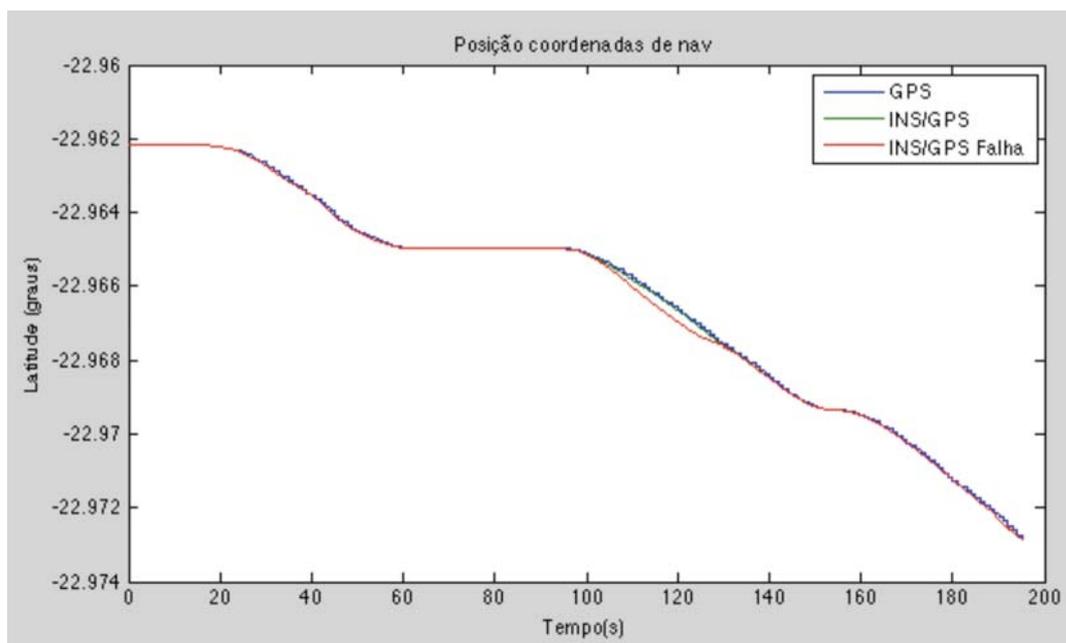


Figura 19 –Latitude no Experimento na Lagoa.

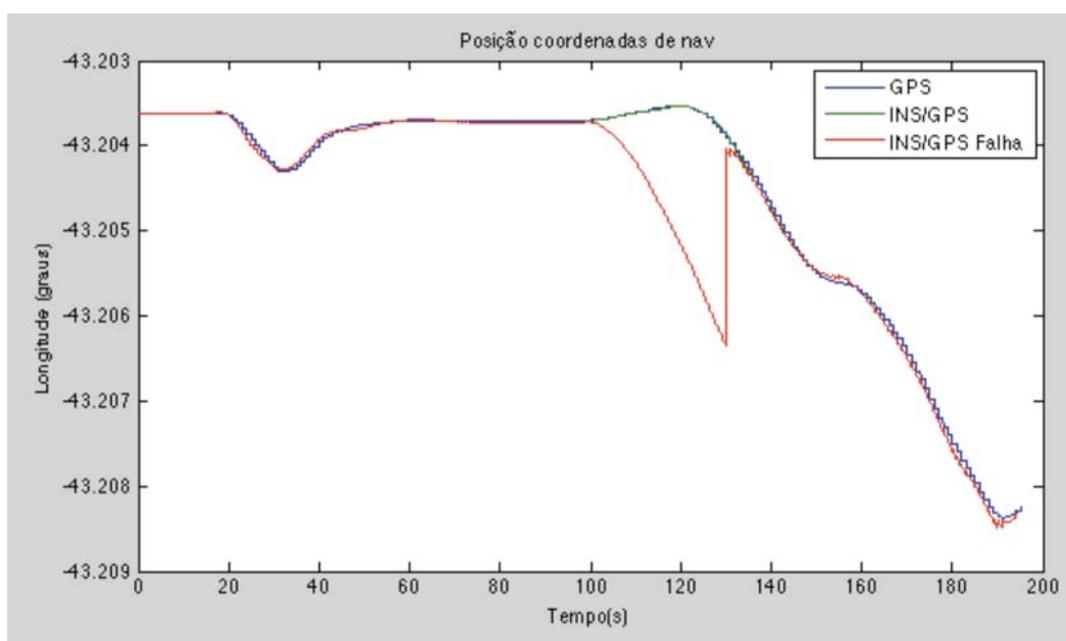
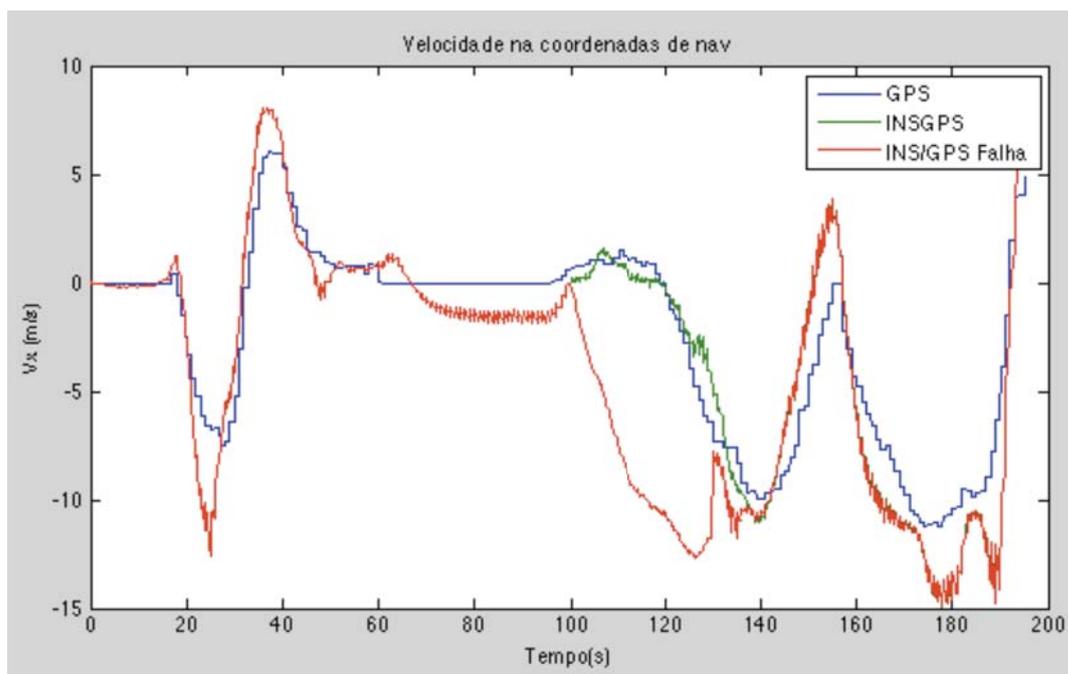
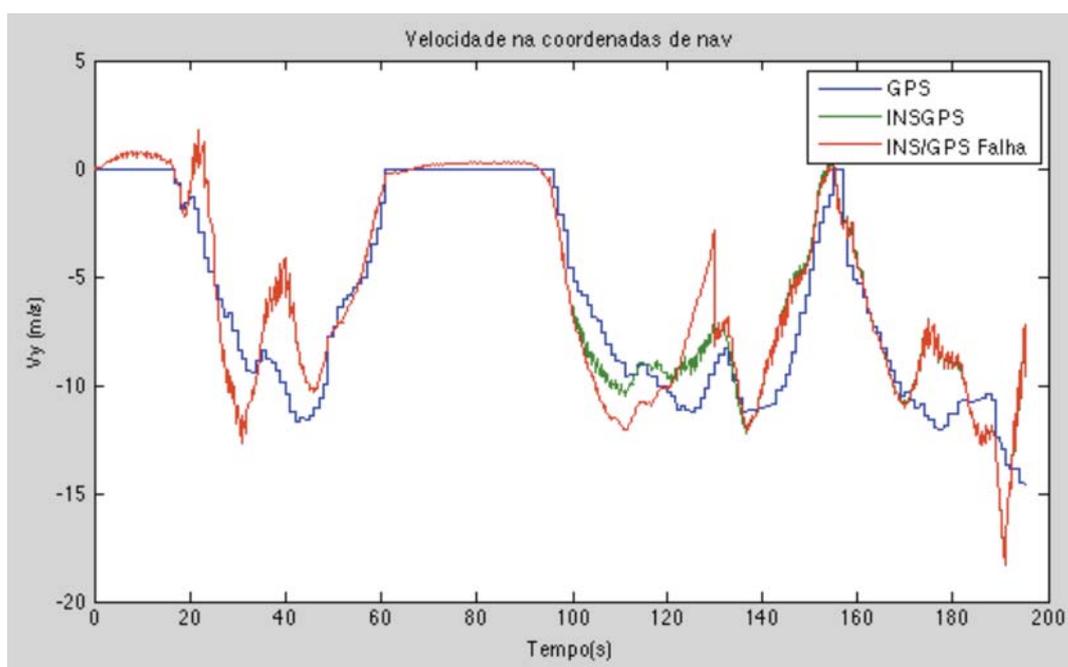


Figura 20 –Longitude no Experimento na Lagoa.

Figura 21 –  $V_x$  no Experimento na Lagoa.Figura 22 –  $V_y$  no Experimento na Lagoa.

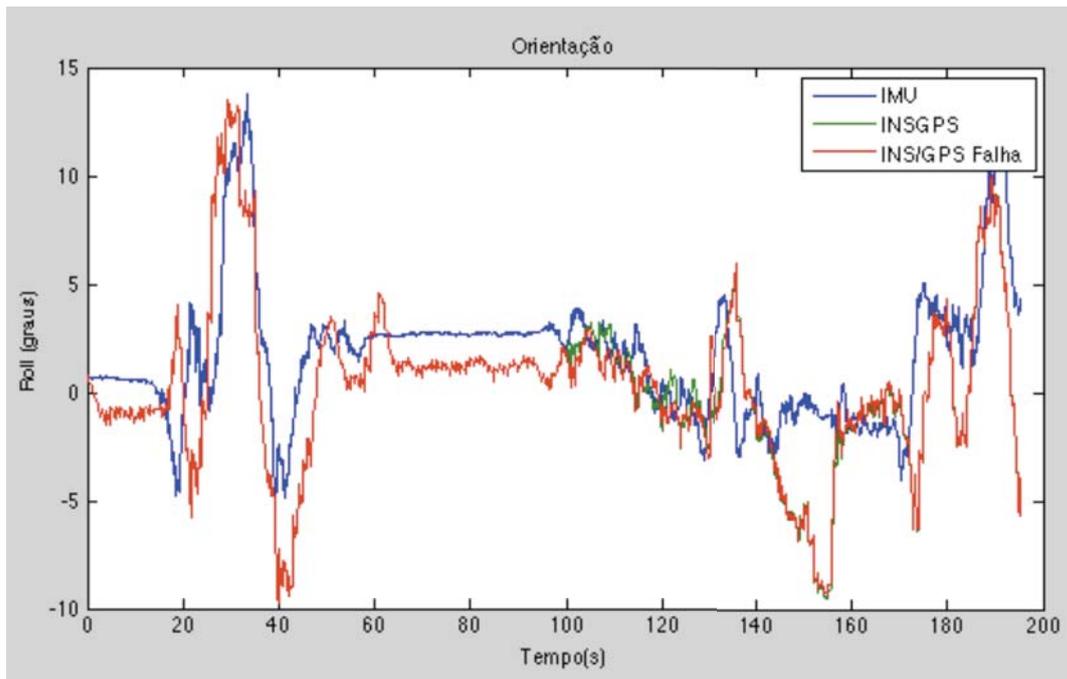


Figura 23 –Roll no Experimento na Lagoa.

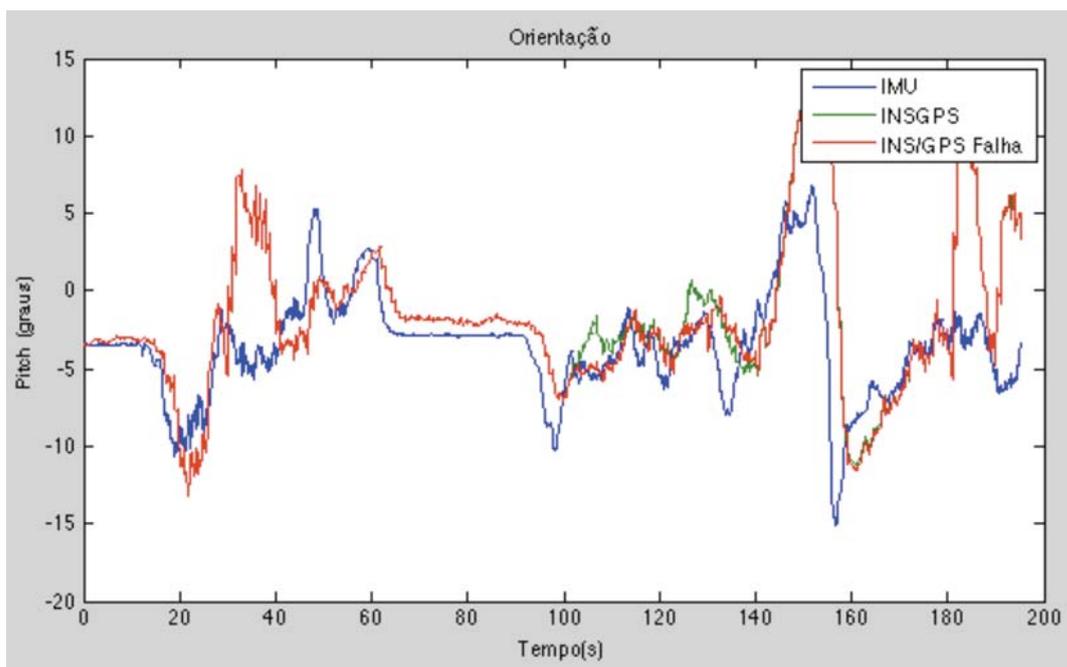


Figura 24 –Pitch no Experimento na Lagoa.

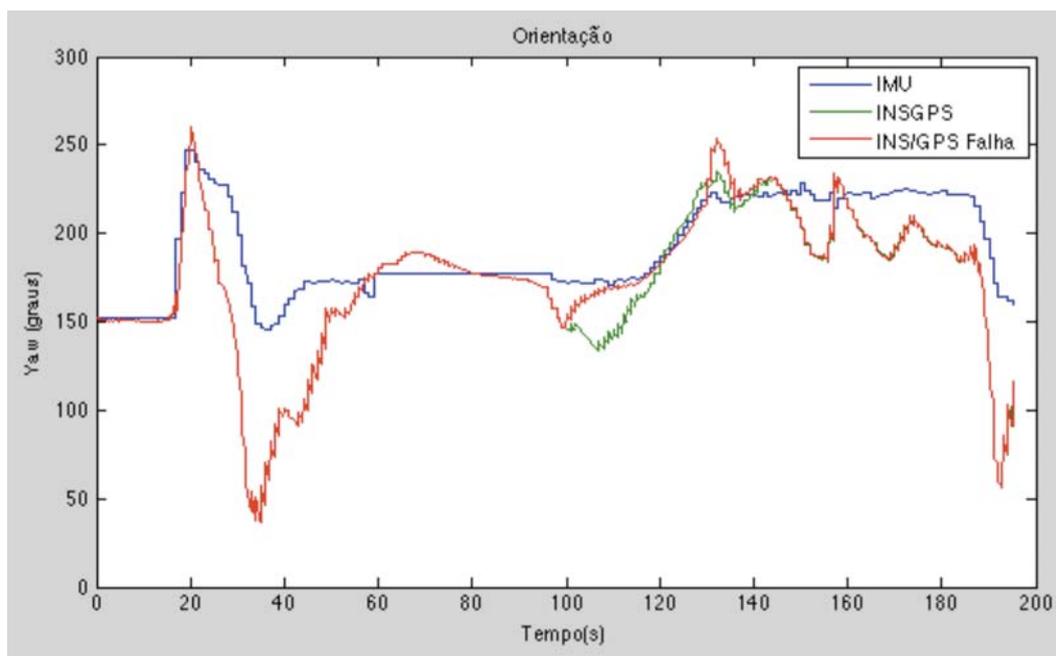


Figura 25 –Yaw no Experimento na Lagoa.

Durante a falha do sinal de GPS o filtro não observa as velocidades e posições, logo o erro dos acelerômetros acumula nas soluções das mesmas. O erro na orientação da navegação GPS/INS se mantém limitado, pois a mesma ainda é observável.

## 7.8. Resultados de Outras Literaturas

(WANG et. al., 2006) utiliza o mesmo sensor inercial desta dissertação em seu trabalho, com o qual ele realiza experimentos em duas implementações distintas do filtro de Kalman: a (AKF) com modelagem semelhante a desta dissertação que considera a orientação e a (AI+AKF), onde o filtro é auxiliado por técnicas de inteligência artificial. Um dos resultados experimentais pode ser observado na Fig. 107.

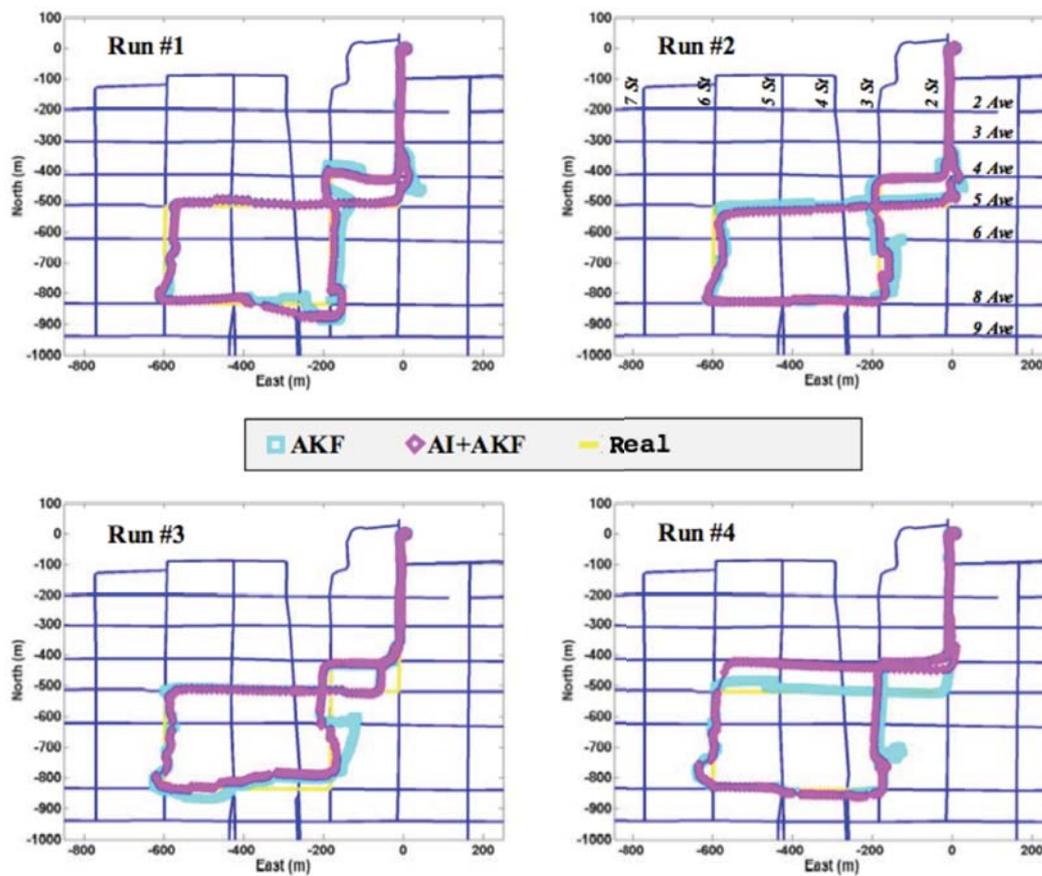


Figura 26 – Resultado experimental de (WANG et. al., 2006)

(UMAR; TASHFEEN; AIME; e NOURELDIN et. al., 2009) apresentam em seu trabalho o resultado experimental da navegação GPS/INS durante uma falha do sinal de GPS, vide Fig. 108. Os experimentos foram realizados com dois tipos distintos de unidades inerciais, uma de alta qualidade, IMU tático e outra de média, a de micro mecânica MEMS.



Figura 27 – Resultado experimental de (UMAR; TASHFEEN; AIME; e NOURELDIN et. al., 2009)

## 8 Conclusões

O principal resultado deste trabalho foi o desenvolvimento detalhado do equacionamento necessário para a aplicação do filtro de Kalman na fusão do GPS com o INS e sua validação através de simulações e experimentos. Mesmo que o filtro seja modelado de forma diferente, muito do equacionamento desenvolvido nesta dissertação se mantém. Foram propostas duas implementações distintas de filtros a clássica e a com orientação. Através de simulações e experimentos foi demonstrado que para sensores inércias de baixa qualidade, a utilização da informação de orientação medida por bússolas no processo de filtragem, resulta em uma melhor precisão na navegação. O resultado da simulação e experimental mostra também que a fusão de ambos os sensores através do filtro de Kalman resulta em um posicionamento mais preciso do que quando utilizando cada sensor isoladamente. Resultado coerente com os outros trabalhos existentes sobre o tema. A performance do filtro não pode ser comparada diretamente a outros trabalhos presentes na literatura já que a mesma varia devido a diversos fatores, como o sensor utilizado e o meio ambiente. Observa-se nos resultados que o erro durante a falha do GPS cresce mais rapidamente nesta dissertação do que em outros trabalhos presentes na literatura, este fato está diretamente relacionado a qualidade do sensor inercial utilizado e se a modelagem do filtro é direcionada para melhorar o resultado da navegação durante estas falhas.

O estudo dos diversos sensores utilizados para localização e de seus respectivos erros, feito no capítulo 2, mostra o porquê da escolha da fusão do GPS e do INS como forma de sensoriamento para localização em ambientes externos. O sensor inercial, por não depender de fatores externos, apresenta a solução mais robusta em um dado instante ao problema de navegação. A posição, velocidade e orientação do veículo podem ser sempre calculadas integrando as medidas do sensor inercial dado um conjunto de condições iniciais. Entretanto, o erro desta solução cresce ilimitadamente com o tempo, já que os erros dos acelerômetros e giroscópios são integrados progressivamente. O GPS fornece a velocidade e posição do veículo com relação a

coordenadas globais, apresentando uma solução ao problema de navegação que não depende de condições iniciais. O erro desta solução é sempre limitado, entretanto a solução não está sempre disponível por depender da visibilidade do receptor a no mínimo quatro satélites. Logo a fusão do GPS com o sensor inercial gera uma solução ao problema de navegação onde não há necessidade de condições iniciais dadas por um agente externo, o erro está limitado e a solução está sempre disponível.

O GPS mede a posição em termos de latitude, longitude e altitude com relação ao modelo da terra WSG-84, este modelo é elíptico e não inercial. Logo para se realizar a fusão dos sensores, a posição dada pelo sensor inercial precisa ser representada também sob o modelo WSG-84, equacionado no capítulo 4. Tendo ambos os sensores sob o mesmo modelo e utilizando os fundamentos e as equações do filtro de Kalman, apresentados no capítulo 3, modela-se o problema proposto em termos de espaço de estado. Este é definido como sendo os erros na navegação inercial, logo para a modelagem é necessário a compreensão das fontes de erros, capítulo 2, e de sua propagação durante a navegação, capítulo 4.

Os ruídos do filtro foram modelados como constantes, entretanto a variância do INS varia com a dinâmica do sistema, logo uma modelagem que leve em consideração essas variações tornaria o filtro mais preciso. A eficiência do filtro é dada em parte pelo ajuste dos ruídos, este poderia ser feito usando técnicas de inteligência artificial, como *expectation maximization*, o que levaria os ruídos mais próximo do ponto ótimo no caso de ruídos constantes e forneceria inteligência e adaptação para o caso em que o mesmo varie. O filtro proposto não explora o problema de inicialização, onde o sistema precisa ficar estático para encontrar as condições iniciais de posição e orientação, considerar o mesmo levaria a uma melhora da filtragem. A dinâmica do sistema pode ser também explorada para particionar o filtro, tornando o mais eficiente. Outros sensores podem ser acrescentados na fusão, como um barômetro, velocímetro e uma bússola, aumentando assim a informação que o filtro possui sobre os estados. O filtro pode ser redesenhado para a fusão acoplada do GPS com o INS, a qual fornece um melhor resultado, pois possibilita o funcionamento mesmo quando menos de quatro satélites estiverem visíveis.

## Bibliografia

ANDERSON, B. O.; MOORE, J. B. Optimal Filtering. Prentice-Hall, INC, 1979.

BARNET, D. E. Resolver Vs Encoder. Disponível em: [http://www.optoresolver.com/help/tutorials/resolver\\_v\\_encoder.htm](http://www.optoresolver.com/help/tutorials/resolver_v_encoder.htm), Acesso em: 12 de jun. 2008

BLEWITT, G. Basics of the GPS Technique: Observation Equations. Department of Geomatics, University of Newcastle, 1997.

BOSE, S. C. GPS/INS MULTISENSOR KALMAN FILTER. Technalytics, 1982.

Brock University Map library. Disponível em: [http://www.brocku.ca/maplibrary/gps/gps\\_fun.htm](http://www.brocku.ca/maplibrary/gps/gps_fun.htm). Acesso em: 20 de abr. 2009.

DUDEK, G.; e JENKIN, M. Inertial Sensors, Gps, and Odometry. Springer Handbook of Robotics, 2008.

EVERETT, H. R. Sensors for Mobile Robots Theory and Applications. A K Peters, 1995.

FISHER, R. B.; KONOLIGE, K. Range Sensores. Springer Handbook of Robotics, 2008.

FLENNIKEN, W.; WALL, J. BEVLY, D. Characterization of Various IMU Error Sources and Effect on Navigation Performance. Auburn University, 2004.

FOESSEL, A.; CHEDA, S.; e APOSTOLOPOULOS, D. Short-Range Millimeter-Wave Radar Perception in a Polar Environment. Robotics Institute, Carnegie Mellon University, 1999.

GEORGE, M.; e SUKKARIEH, S. Tightly Coupled INS/GPS with Bias Estimation for UAV Applications. Centre for Autonomous Systems University of Sydney, 2005.

GREWAL, M. S.; WEILL, L. R.; e ANDREW, A. P. Global Positioning System, Inertial Navigation, and Integration. 2 ed. Wiley-Interscience, 2007.

HOSET, H.; LYNCH, K. M; e Outros. Principles of Robot Motion. The MIT Press, 2005.

KONG, X. Inertial Navigation System Algorithms for Low Cost IMU. Australian Centre for Field Robotics, 2000.

MAYBECK, P. S. Stochastic Models, estimation, and control. Academic Press, 1979.

Department of Defense World Geodetic System 1984, National Imagery and Mapping Agency. Its Definition and Relationships with Local Geodetic Systems. NIMA TR8350.2 Third Edition, 3 Janeiro 2000.

NEHMZONW, ULRICH. Mobile Robotics. 2 ed. Springer, 2003.

RAMAMOORTHY, RAVE. Disponível em: <http://www.cs.berkeley.edu/~ravir/>. Acessado em: 29 de jan. 2009.

SAM, S. S.; LEWIS, F. L. Autonomous Mobile Robots. Control Engineering Series, 2006.

SCHEDING, S.; BROOKER, G.; HENNESSY, R.; BISHOP, M.; e MACLEAN A. Terrain Imaging and Perception using Millimetre Wave Radar. Proc. 2002. Auckland: Australasian Conference on Robotics and Automation, 27-29 November 2002.

SCHRIEVER AFB. Global Positioning System Operations Center. Disponível em: <http://gps.afspc.af.mil/index.html>. Acessado em: 17 de jul. 2008.

SIEGWART, R.; e NOURBAKSHSH, I. R. Introduction to Autonomos Mobile Robots. The MIT Press, 2004.

THRUN, S.; BURGARD, W.; e FOX, D. Probabilistic Robotics. The MIT Press, 2005.

TZAFESTAS, SPYROS G. Advances in Intelligent Autonomous Systems. Kluwer Academic Publishers, 1999.

UMAR, I.; TASHFEEN, K., AIME, O.; e NOURELDIN, A. Experimental Results on an INtegrates GPS and Multisensor System for Land Vehicle Positioning. International Journal of Navigation and Observation, 22 Fevereiro 2009.

WAGNER, J. F.; e WIENEKE, T. Integrating satellite and inertial navigation-conventional and new fusion approaches. Control Engineering Practice 2003 vol. 11. Science Direct, 2003.

WANG, J. Intelligent MEMS INS/GPS Integration For Land Vehicle Navigation. University of Calgary, 2006.

WELCH, G.; e BISHOP, G. An Introduction to the Kalman Filter. Department of Computer Science University of North Carolina, 2006.

ZHENG, YUAN F. RECENT TRENDS IN MOBILE ROBOTS. World Scientific, 1993.

# Anexo A

## Xsens

| Output   |  | Orientation performance                 |                 |                  |  |
|--|--|---|-----------------|------------------|--|
| 3D orientation (Quaternions/Matrix/Euler angles) |  | Dynamic Range:                          |                 | all angles in 3D |  |
| 3D acceleration                                  |  | Angular Resolution <sup>1</sup> :       |                 | 0,05 deg         |  |
| 3D rate-of-turn                                  |  | Static Accuracy (Roll/Pitch):           |                 | <0.5 deg         |  |
| 3D earth-magnetic field (normalized)             |  | Static Accuracy <sup>2</sup> (Heading): |                 | <1 deg           |  |
| Temperature                                      |  | Dynamic Accuracy <sup>3</sup> :         |                 | 2 deg RMS        |  |
| Sensor performance                               |  |   |                 |                  |  |
|  | rate of turn   | acceleration                            | magnetic field  | temperature      |  |
| Dimensions                                       | 3 axes   | 3 axes                                  | 3 axes          | -                |  |
| Full Scale (standard)                            | ± 300 deg/s  | ± 17 m/s <sup>2</sup>                   | ± 750 mGauss    | -55...+125 °C    |  |
| Linearity  | 0.1% of FS   | 0.2% of FS                              | 0.2% of FS      | <1% of FS        |  |
| Bias stability <sup>4</sup> (1σ)                 | 5 deg/s  | 0.02 m/s <sup>2</sup>                   | 0.5 mGauss      | 0.5 °C accuracy  |  |
| Scale Factor stability <sup>4</sup> (1σ)         | -  | 0.05%                                   | 0.5%            | -                |  |
| Noise density                                    | 0.1 deg/s/√Hz  | 0.001 m/s <sup>2</sup> /√Hz             | 0.5 mGauss (1σ) | -                |  |
| Alignment error                                  | 0.1 deg  | 0.1 deg                                 | 0.1 deg         | -                |  |
| Bandwidth (standard)                             | 40 Hz  | 30 Hz                                   | 10 Hz           | -                |  |
| Options  |  |   |                 |                  |  |
| Full Scale                                       | ± 150 deg/s<br>± 900 deg/s<br>± 1200 deg/s                   | ± 100 m/s <sup>2</sup>                  |                 |                  |  |
| Other options on request                         |  |   |                 |                  |  |
| Interfacing                                      |  |   |                 |                  |  |
| Max update rate:                                 | 512 Hz (calibrated sensor data)<br>100 Hz (orientation data) |   |                 |                  |  |
| Digital interface:                               | RS-232, RS-422 and USB (external converter)                  |   |                 |                  |  |
| Analog interface (optional):                     | 0 - 3.3V (Roll, Pitch, Heading)                              |   |                 |                  |  |
| Operating voltage:                               | 4.5 - 15V  |   |                 |                  |  |
| Power consumption:                               | 360 mW (orientation output)                                  |   |                 |                  |  |
| Housing  |  |   |                 |                  |  |
| Dimensions:                                      | 58x58x22 mm (WxLxH)  |   |                 |                  |  |
| Weight:  | 50 g   |   |                 |                  |  |
| Ambient temperature operating range:             | 0 - 55 deg Celsius   |   |                 |                  |  |



Figura 109 – “Datasheet” Xsens

## Anexo B

### Gamin

#### 1.5 TECHNICAL SPECIFICATIONS

Specifications are subject to change without notice.

##### 1.5.1 Physical Characteristics

###### 1.5.1.1 Size

61 mm in diameter and 19.5 mm in height

###### 1.5.1.2 Weight

- GPS 18 unit only (no cable): 1.9 oz (53.9 g)
- GPS 18 USB: 3.5 oz (100.4 g)
- GPS 18 PC: 6.5 oz (184.6 g)
- GPS 18 LVC (3 meter cable): 3.9 oz (110.6 g)
- GPS 18 LVC-5m (5 meter cable): 5.7 oz (161.6 g)
- GPS 18-5Hz (5 meter cable): 5.7 oz (161.6 g)

###### 1.5.1.3 Color

Black

###### 1.5.1.4 Case Material

Polycarbonate thermoplastic that is waterproof to IEC 60529 IPX7 level (immersion in 1 meter of water for 30 minutes)

###### 1.5.1.5 Cable Length

- GPS 18 USB: 2 meter
- GPS 18 PC: 2 meter
- GPS 18 LVC: 3 meter (Garmin Part Number 010-00321-05)
- GPS 18 LVC-5m: 5 meter (Garmin Part Number 010-00321-06)
- GPS 18-5Hz: 5 meter

Figura 110 – “Datasheet” GPS Parte 1

## 1.5.2 Electrical Characteristics

### 1.5.2.1 Input Voltage

- GPS 18 USB: 4.4–5.5 V
- GPS 18 PC: 8–30 V (Automotive supply from cigarette lighter jack)
- GPS 18 LVC: 4.0–5.5 V
- GPS 18-5Hz: 4.0–5.5 V

### 1.5.2.2 Input Current

- GPS 18 USB: 55 mA @ 5.0 V
- GPS 18 PC: 50 mA @ 13.8 V
- GPS 18 LVC: 60 mA @ 5.0 V
- GPS 18-5Hz: 65 mA @ 5.0 V

### 1.5.2.3 CMOS Serial Output Levels

- GPS 18 PC: 0 V to 5 V (Asynchronous Serial, TIA-232-F (RS-232) Compatible Polarity)
- GPS 18 LVC and GPS 18-5Hz: 0 V to  $V_{in}$ , between 4 and 5.5 V (Asynchronous Serial, TIA-232-F (RS-232) Compatible Polarity)

## 1.5.4 GPS Performance

### 1.5.4.1 Receiver

WAAS enabled; 12 parallel channel GPS receiver continuously tracks and uses up to 12 satellites (up to 11 with Measurement Pulse Output active) to compute and update your position.

### 1.5.4.2 Acquisition Times

- Reacquisition: Less than 2 seconds
- Warm: Approx. 15 seconds (all data known)
- Cold: Approx. 45 seconds (initial position, time, and almanac known; ephemeris unknown)
- AutoLocate™: 5 minutes (almanac known; initial position and time unknown)
- SkySearch: 5 minutes (no data known)

### 1.5.4.3 Update Rate

- GPS 18 USB, PC, and LVC: 1 record per second
- GPS 18-5Hz: 5 records per second

### 1.5.4.4 Accuracy

- GPS Standard Positioning Service (SPS)  
Position: < 15 meters, 95% typical  
Velocity: 0.1 knot RMS steady state
- WAAS  
Position: < 3 meters, 95% typical  
Velocity: 0.1 knot RMS steady state
- Measurement Pulse Output Time:  $\pm 1$  microsecond at rising edge of the pulse
- Dynamics: 999 knots velocity (only limited at altitude greater than 60,000 feet), 6g dynamics

Figura 111 – “Datasheet” GPS Parte 2