



Rocem Pol Jiménez López

**Desenvolvimento de Atuadores Tridimensionais
Baseados em Músculos Artificiais Dielétricos de Uma ou
Múltiplas Camadas**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da PUC-Rio.

Orientador: Marco Antonio Meggiolaro

Rio de Janeiro

Abril de 2009



Rocem Pol Jiménez López

**Desenvolvimento de Atuadores Tridimensionais
Baseados em Músculos Artificiais Dielétricos de uma ou
Múltiplas Camadas**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Marco Antonio Meggiolaro

Orientador

Departamento de Engenharia Mecânica – PUC-Rio

Prof. Mauro Speranza Neto

Departamento de Engenharia Mecânica – PUC-Rio

Prof. Luciano Luporini Menegaldo

Instituto Militar de Engenharia

Prof. José Eugenio Leal

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico - PUC-Rio

Rio de Janeiro, 27 de abril de 2009

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Rocem Pol Jiménez López

Graduou-se em Engenharia Mecatrônica
Universidad Nacional de Ingeniería Lima -
Perú em 2006.

Ficha Catalográfica

Jiménez López, Rocem Pol

Desenvolvimento de atuadores tridimensionais baseados em músculos artificiais dielétricos de uma ou múltiplas camadas / Rocem Pol Jiménez López ; orientador: Marco Antonio Meggiolaro. – 2009.

121 f. : il. (color.) ; 30 cm

Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009.

Inclui bibliografia

1. Engenharia mecânica – Teses. 2. Músculo artificial. 3. Atuadores binários. 4. Comportamento viscoelástico. 5. Visão estéreo. I. Meggiolaro, Marco Antonio. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Mecânica. III. Título.

CDD: 621

A minha mãe María, meu pai Diómodos, minha irmã Magali, meu irmão Leboni,
minha avó Dionisia, meu cunhado Julio, minha sobrinha Luana e meu sobrinho
Royser.

Agradecimentos

Ao Professor Marco Antonio Meggiolaro pela orientação e paciência durante o desenvolvimento do curso de mestrado.

Ao CAPES, FAPERJ e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

Ao Departamento de Engenharia Mecânica da PUC-Rio, pelo ensino e colaboração comigo.

A todas aquelas pessoas que contribuíram no desenvolvimento da dissertação.

Resumo

López, Rocem Pol Jiménez; Meggiolaro, Marco Antonio. **Desenvolvimento de Atuadores Tridimensionais baseados em Músculos Artificiais Dielétricos de Uma ou Múltiplas Camadas**. Rio de Janeiro, 2009. 121p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Músculos artificiais são versáteis para o projeto de atuadores pois, assim como os músculos naturais, podem ter pequenas dimensões ou serem agrupados para alcançar maiores dimensões. A capacidade do músculo de permitir a construção de atuadores sem partes móveis permite uma grande economia de energia, evitando atritos por deslizamento, menor desgaste, e baixos ruídos. Músculos artificiais são usados para desenvolver atuadores contínuos ou binários, utilizando diversos tipos de configurações para aproveitar ao máximo as vantagens que oferecem estes materiais. Músculos artificiais eletrostrictivos, acionados por altas tensões, já estão sendo utilizados em aplicações comerciais. Circuitos eletrônicos estão sendo projetados para trabalhar com altas tensões elétricas e interagir com estes tipos de músculos. Diversos tipos de material estão sendo avaliados para a implementação destes músculos. Este trabalho visa desenvolver um atuador de configuração cilíndrica de acionamento elétrico, por efeito capacitivo. O atuador é acionado por 3 músculos artificiais em configuração paralela, construídos a partir do elastômero acrílico VHB4905, o qual possui características visco-elásticas e baixo custo de produção. São analisados distintos modelos constitutivos dos músculos, baseados em molas e amortecedores em série e em paralelo. São desenvolvidos métodos de calibragem para calcular os parâmetros dos modelos matemáticos dos músculos a partir de dados obtidos em laboratório. Um método de medição baseado em processamento de imagens e teoria de visão estéreo, desenvolvido especificamente para este trabalho, permite que a posição da extremidade do atuador seja medida de forma não-invasiva, sem interferir em seu movimento, e sem a necessidade de colocar sensores ou instrumentos de medição. Os resultados mostram que os modelos matemáticos são eficientes para descrever o comportamento do atuador.

Palavras-chave

Músculo Artificial, Atuadores binários, Comportamento Viscoelástico, Visão Estéreo.

Abstract

López, Rocem Pol Jiménez; Meggiolaro, Marco Antonio (Advisor). **Development of Three-Dimensional Actuators Based on Dielectric Artificial Muscles of One or Multiple Layers.** Rio de Janeiro, 2009. 121p. MSc Dissertation – Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Artificial muscles are versatile for the actuator projects, because, as well as the natural muscles, they can have small dimensions or they are grouped to obtain big dimensions. Muscle capacity to allow construction of actuators without movable parts allows great economy of energy, avoiding attritions for sliding, lessening waste, and reducing noise. Artificial muscles are used to develop continuous or binary actuators, using different types of configurations to take advantage to the benefit that offer these materials. Electrostrictive artificial muscles, worked by high tensions, are already being used in commercial applications. Electronic circuits are being projected to work with high electric tensions and to interact with these types of muscles. Many types of materials are being evaluated for the implementation of these muscles. This work looks for to develop a cylindrical configuration actuator of electric activation, for capacitive effect. The actuator is activated by 3 artificial muscles in parallel configuration, built starting from the acrylic elastomer VHB4905, which possesses viscous-elastic characteristics and low production cost. Different models of the muscles are analyzed, based on springs and shock absorbers in series and parallel. Calibrate methods are developed to calculate parameters of the mathematical models of the muscles starting from data obtained at laboratory. Measurement method based on processing of images and theory of stereo vision, specifically developed for this work, allows no-invasive measurement of the actuator's extremity, without interfering in actuator's movement, and without the need to put sensor or measurement instruments. The results show that mathematical models are efficient to describe the behavior of the actuator.

Keywords

Artificial muscles, Binary actuators, viscous-elastic behavior, Stereo Vision.

Sumário

1 INTRODUÇÃO	20
1.1. Motivação	21
1.2. Objetivos do Trabalho	22
1.3. Trabalhos anteriores	23
1.4. Descrição do Trabalho	25
2 MODELAGEM DO ATUADOR	26
2.1. Concepção do Atuador	26
2.2. Modelagem Matemática do Atuador	31
2.3. Modelagem Matemática do Músculo Artificial	34
2.4. Modelagem Matemática da Mola Central	39
2.5. Equações Dinâmicas do atuador	41
3 SOLUÇÃO NUMÉRICA	43
3.1. Matriz Jacobiana do Sistema de Equações	43
3.2. Solução Segundo o Newton-Raphson	47
3.3. Solução Segundo o Newton-Raphson para Kelvin-Voigt + A	48
4 MEDIÇÃO DA POSIÇÃO USANDO VISÃO ESTÉREO	50
4.1. Obtenção do Par Estéreo	51
4.2. Obtenção Automática dos Pontos Correspondentes	57
4.3. Cálculo das Matrizes de Projeção das Câmeras	61
4.4. Cálculo dos Pontos em Três Dimensões	63
4.5. Cálculo da Posição e Orientação da Base Superior	66
5 SIMULACAO, EXPERIMENTOS E CALIBRAÇÃO DO ATUADOR	69
5.1. Simulação do Atuador	69
5.2. Sistema Experimental	70
5.3. Resultados da medição estéreo	75

5.4. Calibração do Atuador	82
5.5. Resultados da calibração	87
5.6. Validação	88
6 CONCLUSÕES	90
Referências bibliográficas	92
Apêndice A - Construção do Atuador	95
Apêndice B - Calculo dos Parâmetros do Atuador para K- V	104
Apêndice C - Relações entre Rotação e a Velocidade Angular	112
Apêndice D - Relações entre os Ângulos e Velocidade	114
Apêndice E - Derivadas com vetores	116
Apêndice F - Ajuste por mínimos quadrados de um plano	117
Apêndice G - Ajuste de duas retas perpendiculares	120

Lista de figuras

Figura 1: Elastômero dielétrico VHB4905.	20
Figura 2: Evolução dos robôs (fonte: NIAC, EUA).	21
Figura 3: Atuador binário (fonte: NIAC, EUA).	22
Figura 4: Aplicação dos músculos artificiais em pequenos robôs.	22
Figura 5: (a) BRAID III. (b) BRAID IV	23
Figura 6: Atuador modelado por Bystronski.	23
Figura 7: Modelo matemático do atuador.	24
Figura 8: Teste de moldura fixa com VHB 4910 sem tensão.	24
Figura 9: Modulo elevador de tensão.	25
Figura 10: (a) Objetivo. (b) Mola central.	26
Figura 11: (a) Forma geral do atuador. (b) Vista de corte.	27
Figura 12: (a) Atuador triangular. (b) Atuador elíptico.	27
Figura 13: (a) Esquema do atuador. (b) Projeto do atuador.	28
Figura 14: Atuador cortado por dois planos.	28
Figura 15: (a) Base inferior. (b) Base inferior, fios e músculo.	29
Figura 16: (a) Anéis fixadores inferiores. (b) Base e anéis.	29
Figura 17: (a) Camadas concêntricas. (b) Projeto do Atuador pronto.	30
Figura 18 (a) Movimento translacional. (b) A Base translada e gira.	31
Figura 19: (a) Esquema do músculo. (b) Sub-divisão do músculo.	32
Figura 20: (a) Molas e amortecedores. (b) Posição de um elemento.	32
Figura 21: (a) Translação. (b) Rot. em X. (c) Rot. em Y. (d) Rot. em Z.	33
Figura 22: (a) Posições dos elementos. (b) Mola-amortecedor.	34
Figura 23: Modelo de Kelvin-Voigt.	35
Figura 24: Modelo Zener.	36
Figura 25: Modelo Kelvin-Voigt + Amortecedor.	36
Figura 26: Modelo de Burgers.	37
Figura 27: (a) Mola. (b) Mola depois de ser transladada e girada.	39
Figura 28: Diagrama vetores e força.	40
Figura 29: (a) Forças do atuador. (b) Diagrama de corpo livre.	41

Figura 30: (a) Objeto da medição. (b) Câmeras para medir.	51
Figura 31: (a) Interseção de duas retas. (b) Grupo de pontos.	52
Figura 32: (a) Erros na reconstrução 3D. (b) Erros menores.	52
Figura 33: (a) Mesma distância representada por números diferentes de pixels. (b) Mesma distância de pontos <i>quadro a quadro</i> representada por números diferentes de pixels.	53
Figura 34: (a) Três pontos para definir a posição e orientação do objeto. (b) Muitos pontos para obter informação com melhor precisão.	54
Figura 35: Objeto côncavo tipo bloco em duas vistas.	54
Figura 36: (a) Posição das câmeras para suas respectivas quinas. (b) Posição das câmeras nos experimentos.	55
Figura 37: (a) Vista segundo direção $-i - j + k$. (b) Vista segundo direção $-i - \sqrt{2}j + k$.	56
Figura 38: (a) Imagem capturada pela primeira câmera (“câmera da direita”). (b) Imagem capturada pela segunda câmera (“câmera da esquerda”).	56
Figura 39: (a) Objeto com dois sistemas de coordenadas para a calibração de cada câmera. (b) Imagem da quina direita capturada pela câmera da direita com sistema de coordenadas na sua quina superior esquerda.	57
Figura 40: (a) Pontos na Imagem que ajudam na busca de pontos. (b) Imagem do objeto isolado.	58
Figura 41: (a) Magnitude do gradiente da imagem. (b) Direção do gradiente da imagem.	58
Figura 42: Três grupos calculados segundo k-means.	59
Figura 43: Seis grupos de retas.	59
Figura 44: (a) Mostra os seis grupos de retas juntos e os quatro pontos de referência recalculados. (b) Os pontos de referência recalculados com maior precisão.	60
Figura 45: (a) Quadro atual mostrando a vizinhança onde se pegará uma pequena imagem para a correlação cruzada. (b) Quadro novo com a vizinhança onde é feita a busca	

do novo ponto.	60
Figura 46: (a) Pontos de referência no quadro atual. (b) Pontos de referência no quadro novo e de onde eles vieram.	61
Figura 47: Par estéreo com a correspondência de dois pares de pontos	61
Figura 48: Pontos correspondentes do objeto e da imagem dele.	62
Figura 49: (a) Objeto colocado na base superior para calibrar as câmeras. (b) Posição arbitrária do objeto depois de que a base superior foi liberada.	63
Figura 50: Construção do Ponto em três dimensões.	64
Figura 51: Par estéreo, a reconstrução em três dimensões e a correspondência de um dos pontos.	66
Figura 52: (a) Sistema de coordenadas no mundo real na base inferior e o sistema de coordenadas da base superior. (b) Vetores unitários associados aos eixos da base superior.	66
Figura 53 (a) O vetor unitário é a interseção de dois planos ajustados segundo seus respectivos pontos. (b) Projeção dos pontos a um plano normal ao vetor unitário.	67
Figura 54: (a) Ajuste de duas retas com a condição de serem perpendiculares. (b) Centro de sistema de coordenadas a seis elementos de distância da média de dois pontos.	68
Figura 55: Simulação do atuador de duas camadas.	69
Figura 56: Par de quadros capturados pelo par de webcams.	70
Figura 57: Imagem real na parte esquerda e Imagem da simulação na parte direita.	70
Figura 58: Partes do elevador de tensão elétrica.	71
Figura 59: Atuador.	71
Figura 60: Par estéreo e o emissor de luz	72
Figura 61: Câmera <i>webcam</i> para obter o vídeo do atuador.	72
Figura 62: Componentes do experimento excluindo os computadores.	73
Figura 63: (a) Propriedades da carga. (b) Se coloca a massa e o objeto de medição ao atuador de uma camada.	73
Figura 64: (a) Captura das imagens do par estéreo.	

(b) Captura de imagem do atuador.	74
Figura 65: Atuador quebrado ao final dos experimentos.	74
Figura 66: Partes importantes para análises dos resultados.	75
Figura 67: Giros e posições no experimento um.	76
Figura 68: Giros e posições no experimento dois.	77
Figura 69: Giros e posições no experimento três.	77
Figura 70: Giros e posições no experimento quatro.	78
Figura 71: Giros e posições no experimento cinco.	78
Figura 72: Giros e posições no experimento seis.	78
Figura 73: Giros e posições no experimento sete.	79
Figura 74: Giros e posições no experimento oito.	79
Figura 75: Giros e posições no experimento nove.	80
Figura 76: Giros e posições no experimento dez.	80
Figura 77: Giros e posições no experimento onze.	81
Figura 78: (a) Oz nos experimentos um, quatro, sete e dez.	
(b) γ nos dez primeiros experimentos.	81
Figura 79: Posições e rotações são medidas a longo do tempo	83
Figura 80: Sub-índice j para as partes sem tensão elétrica, k para as partes com tensão elétrica e i para todo o conjunto.	83
Figura 81: Modelo matemático KV.	84
Figura 82: Parâmetros calculados nos dez experimentos.	87
Figura 83: Ajuste para o modelo KV.	88
Figura 84: Resultados do experimento oito para a validação.	88
Figura 85: Resultados do experimento onze para a validação.	89
Figura 86: Medidas da base inferior em escala 1:1 com duas vistas em detalhe em escala 4:1 e duas seções para cada detalhe também em escala 4:1.	96
Figura 87: Medidas da base superior em escala 1:1 com uma vista em detalhe em escala 4:1 e uma seção para o detalhe também em escala 4:1.	97
Figura 88: Medidas do anel fixador pequeno inferior.	98
Figura 89: Medidas do anel fixador pequeno superior em escala 1:1	98
Figura 90: Medidas do anel fixador maior inferior.	99

Figura 91: medidas do fixador maior superior em escala 1:1.	100
Figura 92: As seis peças de garolite.	100
Figura 93: Anéis Fixadores separados com ajuda de parafusos.	101
Figura 94: (a) Fixadores e músculos. (b) Fios condutores.	101
Figura 95: (a) Superfície. (b) Músculo colado aos fixadores.	101
Figura 96: (a) Músculo esticado. (b) Músculo com capacitores.	102
Figura 97: (a) Camadas coladas. (b) Atuador construído.	102
Figura 98: Atuador de uma camada ao final dos experimentos.	103
Figura 99: Sub-índices.	104
Figura 100: Modelo matemático KV.	105

Lista de tabelas

Tabela 1: Tipos de modelos para cada elemento.	35
Tabela 2: Modelos matemáticos para cada elemento do músculo.	38
Tabela 3: Resumo das vantagens do objeto.	55
Tabela 4: Resumo de experimentos:	82

Lista de símbolos

α : Giro no eixo X .

β : Giro no eixo Y .

γ : Giro no eixo Z .

θ : Ângulo entre o eixo X e a posição final da partição número i .

$\Delta\theta$: Ângulo formado entre duas partições consecutivas.

A : Matriz de rotação da base superior.

A_α : Matriz de rotação gerada pelo giro α .

A_β : Matriz de rotação gerada pelo giro β .

A_γ : Matriz de rotação gerada pelo giro γ .

\hat{a} : Vetor unitário na direção Z .

\hat{a}_z : Componente do vetor \hat{a} no eixo Z .

\hat{a}_z : Ângulo formado pelo vetor \hat{a} e o eixo Z .

B_i : Vetor que indica a direção da partição número i do músculo.

\hat{b}_i : vetor unitário de B_i .

$\|B_i\|$: Modulo de B_i .

c_{A1_i} : Primeira constante de amortecimento do modelo KV+A na partição i .

c_{A2_i} : Segunda constante de amortecimento do modelo KV+A na partição i .

c_{B1_i} : Primeira constante de amortecimento do modelo Burgers na partição i .

c_{B2_i} : Segunda constante de amortecimento do modelo Burgers na partição i .

CBK_F : Variável auxiliar para o calculo.

CBK_T : Variável auxiliar para o calculo.

CDK_F : Variável auxiliar para o calculo.

CDK_T : Variável auxiliar para o calculo

CEI_T : Variável auxiliar para o calculo.

Cg : Centro de massa da carga.

c_{KV_i} : Constante de amortecimento do modelo KV para à partição número i .

c_{KV_i} : Constante de amortecimento do modelo Zener na partição número i .

CT_F :Variável auxiliar para o calculo.

CT_T :Variável auxiliar para o calculo.

CVI_F :Variável auxiliar para o calculo.

CVI_T :Variável auxiliar para o calculo.

CVK_F :Variável auxiliar para o calculo..

CVK_T :Variável auxiliar para o calculo.

cz_i : Constante de amortecimento do modelo Zener na partição número i .

d : Posição do Gg referente ao sistema de coordenadas da base superior.

dA : Derivada parcial de A referente a quaisquer das seis variáveis.

D_i : Vetor que inicia em Gg e termina em Pf_i .

dB_i : Derivada parcial de B_i referente a quaisquer das seis variáveis.

$d\|B_i\|$: Derivada parcial de $\|B_i\|$ referente a quaisquer das seis variáveis.

$d\hat{b}_i$: Derivada parcial de \hat{b}_i referente a quaisquer das seis variáveis.

dF : Derivada parcial de F referente a quaisquer das seis variáveis.

df_i : Derivada parcial de f_i referente a quaisquer das seis variáveis.

$d\varepsilon_i$: Derivada parcial de ε_i referente a quaisquer das seis variáveis.

$d\dot{\varepsilon}_i$: Derivada parcial de $\dot{\varepsilon}_i$ referente a quaisquer das seis variáveis.

$d\ddot{\varepsilon}_i$: Derivada parcial de $\ddot{\varepsilon}_i$ referente a quaisquer das seis variáveis.

$dFmol$: Derivada parcial de $Fmol$ referente a quaisquer das seis variáveis.

dh_i : Derivada parcial de h_i referente a quaisquer das seis variáveis.

$d\dot{h}_i$: Derivada parcial de \dot{h}_i referente a quaisquer das seis variáveis.

$d\ddot{h}_i$: Derivada parcial de \ddot{h}_i referente a quaisquer das seis variáveis.

dPf_i : Derivada parcial de Pf_i referente a quaisquer das seis variáveis.

dO : Derivada parcial de O referente a quaisquer das seis variáveis.

dTi : Derivada parcial de Ti referente a quaisquer das seis variáveis.

$dTmol$: Derivada parcial de $Tmol$ referente a quaisquer das seis variáveis.

$d\omega_i$: Derivada parcial de ω_i referente a quaisquer das seis variáveis.

$d\dot{\omega}_i$: Derivada parcial de $\dot{\omega}_i$ referente a quaisquer das seis variáveis.

ε_i : Deformação da partição número i .

F : Sistema de equações de forcas e torques.

f_i : Força vetorial na partição número i .

Fg : Força de gravidade.

$Fmol$: Força que a mola exerce à base superior.

H : Vetor que contem os três vetores de giro α , β e γ .

h_i : Força escalar na partição número i .

I :Matriz de inércia da carga.

\hat{i} : Vetor unitária no eixo X .

\hat{j} : Vetor unitária no eixo Y .

JF : Matriz Jacobiana de F .

K : Constante de rigidez da mola central.

\hat{k} : Vetor unitário no eixo Y .

k_{A_i} : Constante de rigidez do modelo KV+A para a partição número i .

k_{B1_i} : Primeira constante de rigidez do modelo Burgers na partição número i .

k_{B2_i} : Segunda constante de rigidez do modelo Burgers na partição número i .

k_i : Constante de rigidez equivalente no equilibrio estático.

k_{KV_i} : Constante de rigidez do modelo KV para a partição número i .

\hat{k}_o : Vetor unitário na direção Z_o .

k_{Z1_i} : Primeira constante de rigidez do modelo Zener na partição número i .

k_{Z2_i} : Segunda constante de rigidez do modelo Zener na partição número i .

L : Comprimento natural da mola central.

l_i : Longitude natural da partição número i .

m : Massa da carga.

MKV_{sv} :Variável auxiliar para o calculo.

MKV_{cv} :Variável auxiliar para o calculo.

N_{K_1} : Variável auxiliar para o calculo.

N_{K_2} : Variável auxiliar para o calculo.

N_{K_3} : Variável auxiliar para o calculo.

O : Centro da base superior.

O_x : Primeira componente de O .

O_y : segunda componente de O .

O_z : quarta componente de O .

$\|O\|$: Modulo de O .

\hat{o} : Vetor unitário de O .

\hat{o}_n : Vetor unitário normal ao plano definido pelo eixo Zo e o vetor \hat{o} .

\hat{o}_t : Vetor unitário que pertence ao plano definido pelo eixo Zo e o vetor \hat{o} .

ρ_{c_o} : Constante de amortecimento por unidade de comprimento.

Pf_i : Ponto final da partição número i do músculo.

ρk_o : Constante de rigidez por unidade de comprimento.

Po_i : Ponto inicial da partição número i do músculo.

$Rbase$: Raio das bases.

RF : Variável auxiliar para o calculo.

RKV_{sv} : Variável auxiliar para o calculo.

RKV_{cv} : Variável auxiliar para o calculo.

RRF : Variável auxiliar para o calculo.

RRT : Variável auxiliar para o calculo.

RT : Variável auxiliar para o calculo.

$Tmol$: Torque, referente ao centro de massa da carga, que exerce $Fmol$ à carga.

Ti : Torque, referente ao centro de massa da carga, que exerce f_i à carga.

Δt : Diferencial de tempo.

μ_i : Numero de coluna numa imagem.

v_i : Numero de fila numa imagem.

ω : Velocidade angular.

$[\omega]$: ω ordenado em uma matriz para o produto vetorial.

W : Matriz que relaciona ω e \dot{H} .

1 INTRODUÇÃO

A pesquisa sobre atuadores com novas características é importante para diversas aplicações onde os atuadores convencionais não mostram bom desempenho. As características destes materiais são, por exemplo: baixa densidade mássica (logo pouca inércia), hiper-elasticidade, capacidade de trabalhar em pequenas dimensões, capacidade de carga muitas vezes maior que seu próprio peso, além de serem materiais não-metálicos e acionados eletricamente. Novos tipos de atuadores estão em desenvolvimento baseados nestes princípios, mas para isso é preciso investigar seu funcionamento antes de projetá-los. O elastômero dielétrico que se mostra na Figura 1, um adesivo acrílico denominado VHB4905, é um dos tipos de materiais utilizados em músculos artificiais.

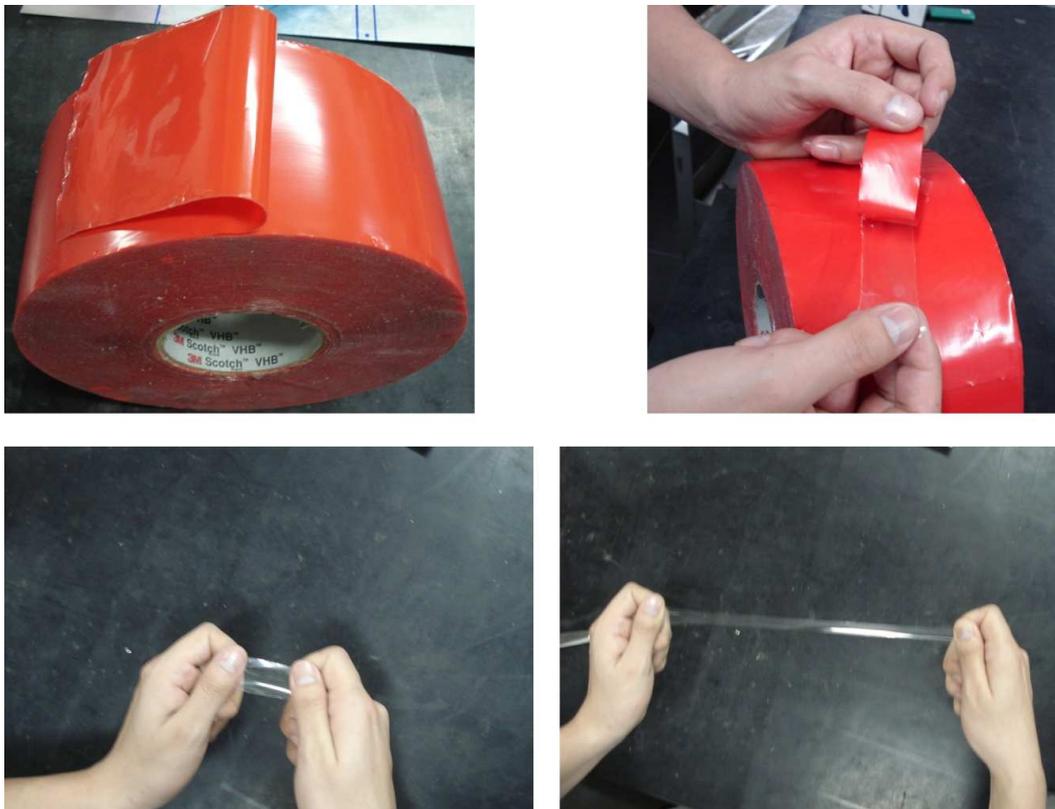


Figura 1: Elastômero dielétrico VHB4905.

1.1. Motivação

Atuadores de baixa densidade ajudam a desenvolver novos mecanismos e novas formas de controle. A Figura 2 mostra uma predição da evolução dos princípios de acionamento de robôs móveis, feita em 2000. Uma tendência no desenvolvimento de mecanismos é na minimização do número de partes móveis, evitando os problemas causados pelo atrito e desgaste de juntas, fazendo uso de juntas flexíveis acionadas por músculos. Novos robôs usarão novas tecnologias, e por isso é preciso estudar atuadores como os músculos artificiais.

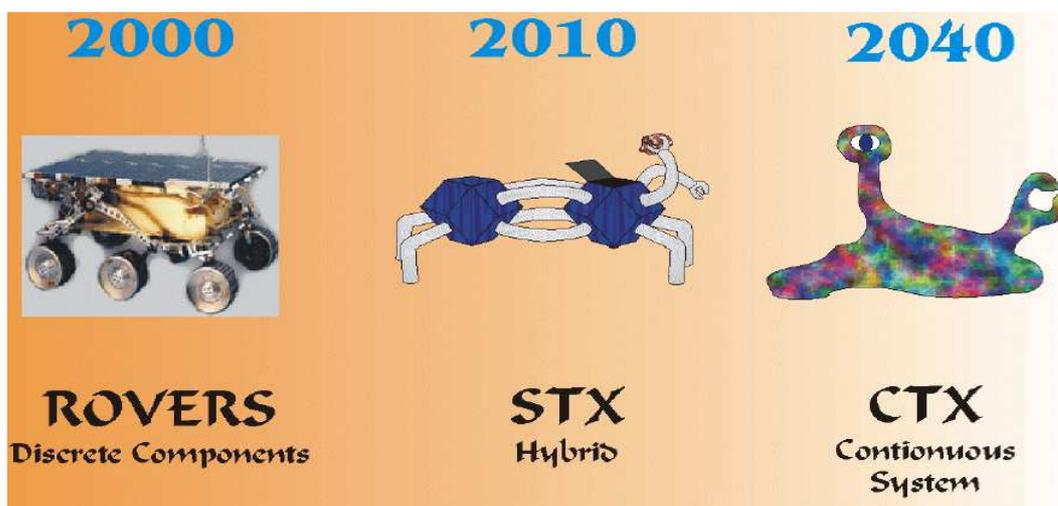


Figura 2: Evolução dos robôs (fonte: NIAC, EUA).

É necessário pesquisar o funcionamento destes polímeros em diferentes configurações, como por exemplo, ao serem utilizadas múltiplas camadas musculares para multiplicar a força exercida, e como interagem as diversas camadas.

Diversas aplicações onde o peso próprio do sistema é crítico precisam de robôs com características que os músculos artificiais oferecem. A Figura 3 mostra um veículo robótico com um manipulador baseado em atuadores binários muito leves, cujas configurações de trabalho podem ser controladas com músculos artificiais.

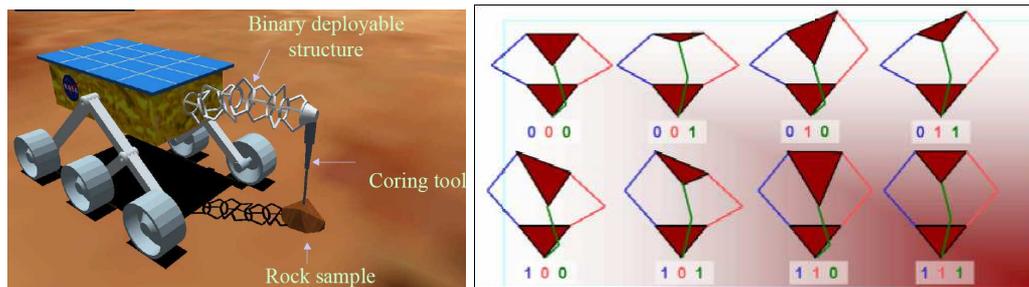


Figura 3: Atuador binário (fonte: NIAC, EUA).

O fato de o polímero poder ser fabricado em dimensões muito pequenas permite projetar pequenos sistemas robóticos. A Figura 4 mostra uma configuração cilíndrica para montar os músculos artificiais [1].

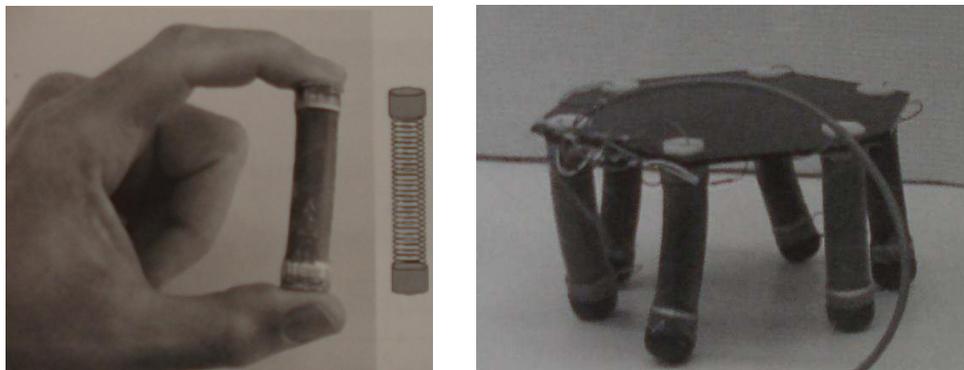


Figura 4: Aplicação dos músculos artificiais em pequenos robôs.

1.2. Objetivos do Trabalho

Os objetivos deste trabalho são:

- Desenvolver configurações espaciais de polímeros dielétricos para avaliar as vantagens e desvantagens que oferecem e a precisão de posicionamento.
- Desenvolver atuadores com configurações de múltiplas camadas, com o objetivo de obter atuadores que tenham a capacidade de proporcionar grandes forças em velocidades similares às dos sistemas de uma camada.
- Estudar o comportamento dinâmico dos sistemas descritos nos itens acima, importantes para controlar o seu acionamento.

1.3. Trabalhos anteriores

Diversas configurações de atuadores binários baseados no músculo artificial VHB4905 foram desenvolvidos por Wingert [2] no *Massachusetts Institute of Technology* (MIT). A Figura 5a mostra o atuador de uma camada BRAID III, feito com três atuadores de armação flexível, e a Figura 5b mostra o BRAID IV, feito com três grupos de músculos em configuração em forma de diamante (losangular). Note que em todos estes atuadores apenas uma camada de músculo é utilizada em cada agrupamento.

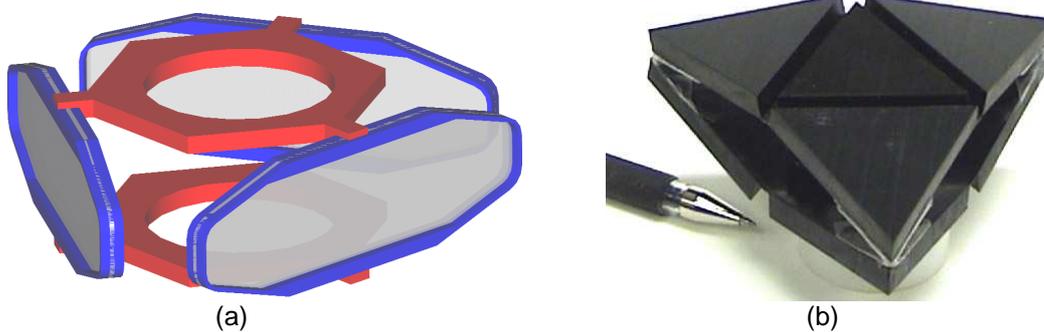


Figura 5: (a) BRAID III. (b) BRAID IV

As propriedades visco-elásticas dos músculos artificiais poliméricos são modeláveis através de simples sistemas mola-amortecedor. O modelo matemático de um atuador baseado no músculo VHB4905 foi desenvolvido em [3] na *Pontifícia Universidade do Rio de Janeiro* (PUC-Rio), onde efeitos de massa, rigidez e amortecimento foram considerados para reproduzir a movimentação x-y de um disco por músculos artificiais formados pelo polímero VHB4905 e uma graxa condutora, vide Figura 6.

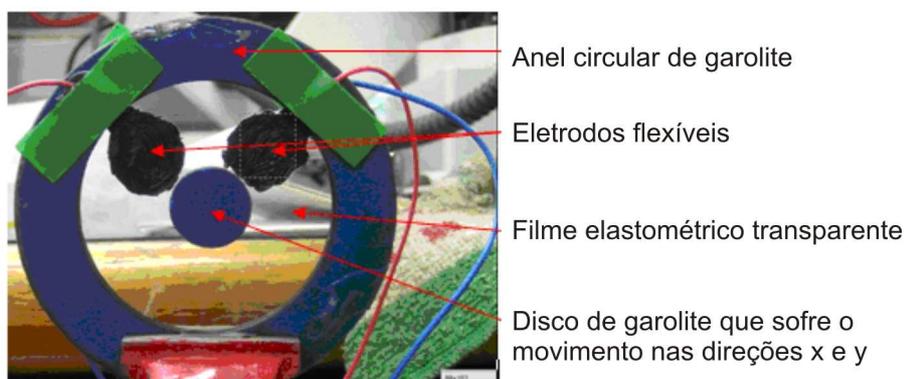


Figura 6: Atuador modelado por Bystronski.

No modelo massa-mola-amortecedor equivalente proposto por Bystronski (2005), a massa concentra não apenas aquela do disco interno, mas também a massa equivalente do conjunto polímero-graxa, vide Figura 7a. A Figura 7b corresponde ao perfil de velocidades do músculo para o cálculo de sua massa equivalente.

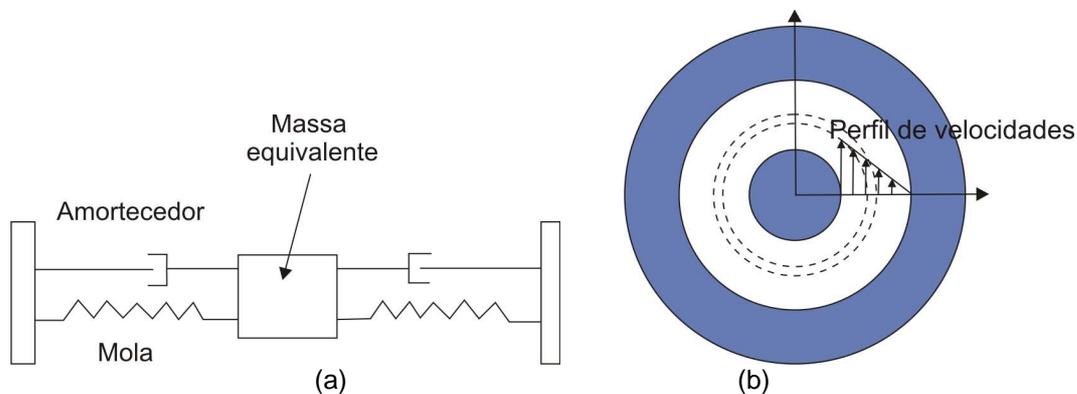


Figura 7: (a) Modelo matemático do atuador. (b) Perfil de velocidade no conjunto polímero-graxa condutora.

Os músculos implementados no trabalho acima são de efeito capacitivo, sendo acionados eletricamente. Tipicamente são requeridos milhares de volts para seu acionamento. Circuitos de amplificação de tensão de até 1000 vezes foram desenvolvidos na PUC-Rio para essa finalidade [4, 5], atingindo 10kV. As figuras 8a e 8b mostram experimentos de um músculo coberto por uma camada de graxa condutora sem tensão e com tensão de 10kV, respectivamente. A Figura 9 mostra o módulo elevador de tensão.



Figura 8: (a) Teste de moldura fixa com VHB 4910 sem tensão aplicada. (b) Teste de moldura fixa com VHB 4910 com tensão aplicada.

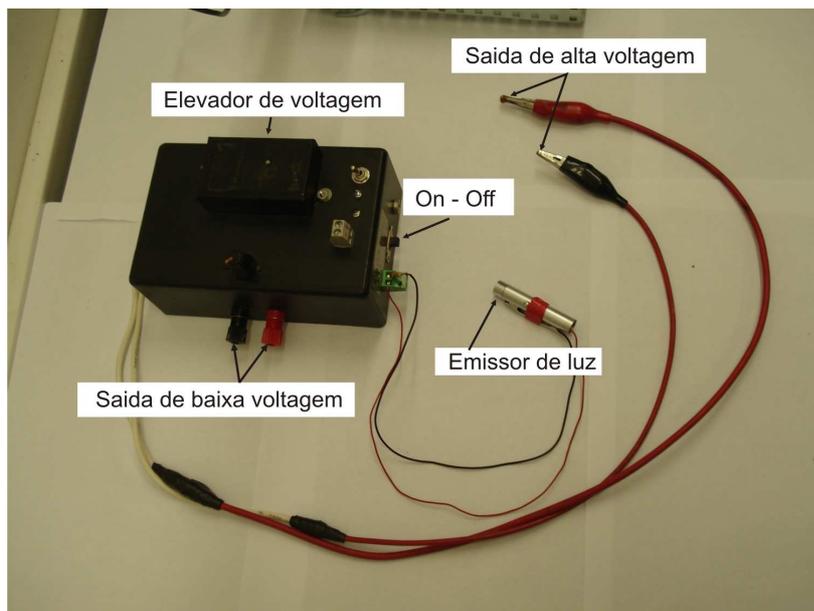


Figura 9: Modulo elevador de tensão.

1.4. Descrição do Trabalho

Este trabalho está organizado em 6 Capítulos. No Capítulo 2 descreve-se o projeto do atuador, seu desenho, construção e descreve o modelo matemático do atuador para diferentes modelos do músculo artificial. O Capítulo 3 trata sobre a solução numérica dos modelos matemáticos do atuador. O Capítulo 4 descreve o método de medição da posição e orientação do atuador utilizando visão estéreo. No Capítulo 5 faz uma descrição de como são feitas as simulações, descreve os experimentos, mostra os resultados obtidos e se detalham as técnicas de calibração do atuador. E finalmente o Capítulo 6 apresenta a discussão dos resultados, conclusões do trabalho e propostas de trabalhos futuros.

2 MODELAGEM DO ATUADOR

2.1. Concepção do Atuador

O atuador consiste de duas bases rígidas, uma superior e outra inferior, separadas por camadas de um músculo polimérico nelas aderido. O músculo é composto de um elastômero acrílico VHB4905, coberto em suas regiões ativas por uma graxa condutora. O funcionamento do músculo é descrito em [2].

Uma mola é utilizada para separar as bases e manter o músculo pré-tensionado. Fios elétricos são utilizados para conduzir corrente para diversas regiões do músculo. Uma graxa condutora, aplicada sobre as paredes do músculo, permite que diferentes regiões sejam atuadas com altas tensões elétricas. A Figura 10a mostra como a base superior é transladada devido à expansão dos músculos provocado pelos capacitores e tensionado pela mola. Para se ter uma melhor idéia de como o capacitor está formado, imaginariamente se separam o ânodo, cátodo e o músculo artificial que fica entre eles (Figura 10b).

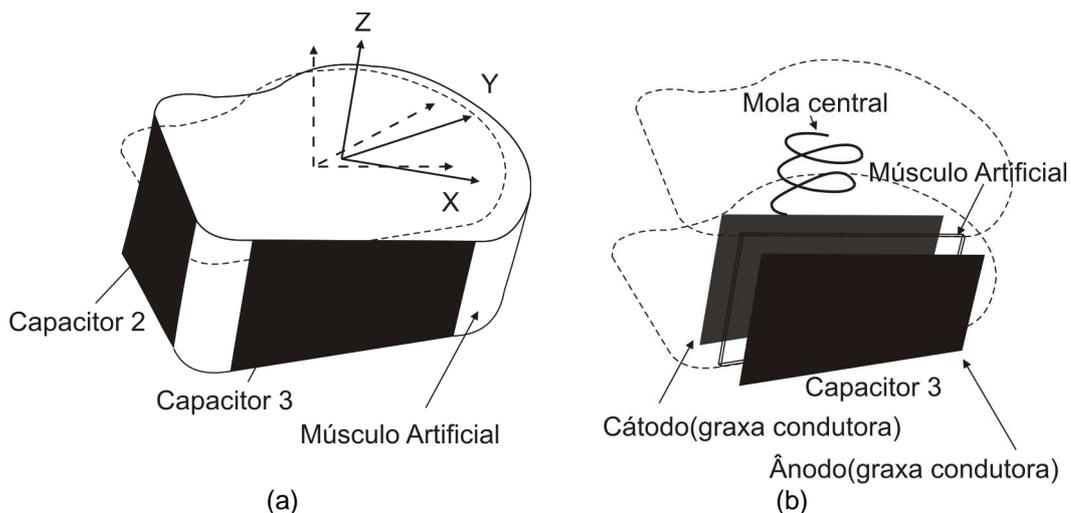


Figura 10: (a) Objetivo do atuador é mover uma das bases com referência à outra. (b) Mola central que mantém pré-tensionado ao músculo e capacitor mostrado em detalhe com suas partes imaginariamente separadas.

Uma forma geral de um atuador pode ser vista na Figura 11a, que apresenta às bases e ao músculo. A Figura 11b mostra suas camadas.

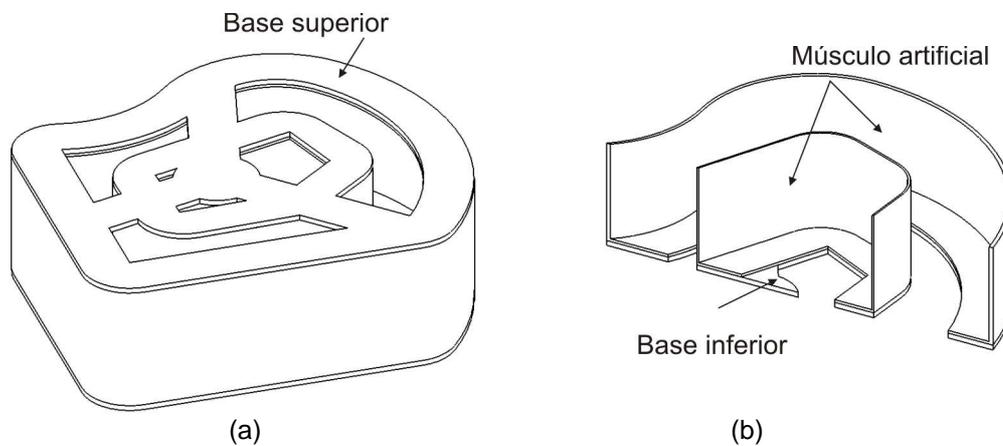


Figura 11: (a) Forma geral do atuador. (b) Vista com dois planos de corte que mostram as multicamadas.

As bases e camadas de músculo podem possuir diversas formas. A modelagem matemática apresentada mais adiante será válida para uma forma prismática genérica, similar à da Figura 11a. As formas podem ser distintas segundo os requerimentos do projetista, por exemplo, a forma triangular da Figura 12a poderia simplificar as equações pelo fato de ter três lados planos, e a forma elíptica na Figura 12b poderia prover maior força a movimentos correspondentes ao menor eixo da elipse.

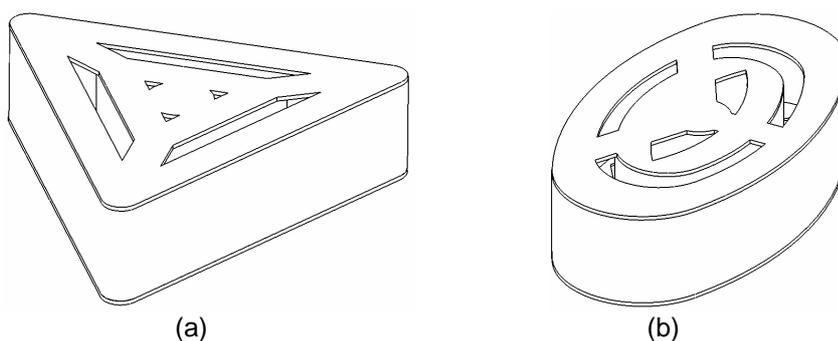


Figura 12: (a) Atuador de forma triangular. (b) Atuador de forma elíptica.

De agora em diante no texto, para explicar os detalhes do projeto se usará um modelo circular, por ser o mais simples. A Figura 13a mostra o esquema do atuador circular e a Figura 13b mostra o projeto com todos seus elementos, incluindo a mola unindo os centros das bases. Note que há seis regiões cobertas

com graxa condutora (em preto), três delas no anel externo e três no interno. Ao aplicar uma tensão elétrica em cada região, o músculo sob a graxa tende a se expandir, gerando movimentos relativos entre as bases.

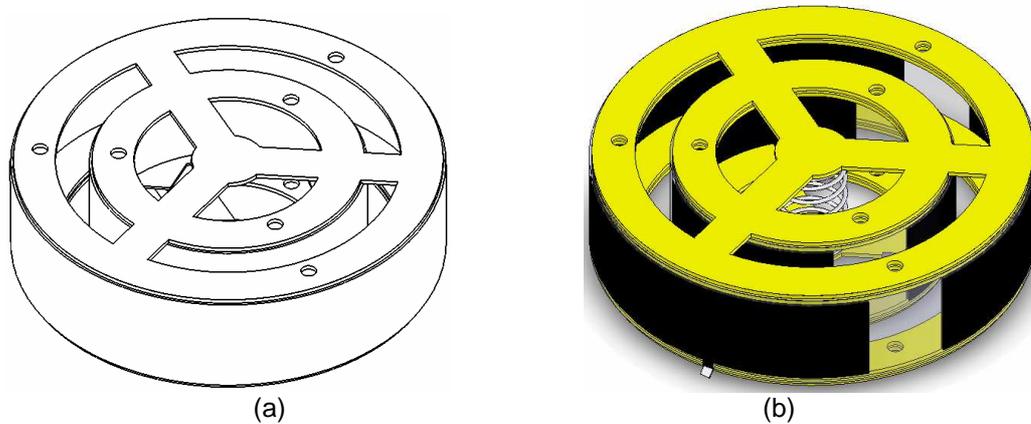


Figura 13: (a) Esquema do atuador circular. (b) Projeto do atuador com seus elementos.

Os elementos do atuador são mostrados em uma vista em corte na Figura 14. Nela pode-se notar o músculo artificial transparente, a graxa aderida em suas paredes, os fixadores que o prende, a mola que pré-tensiona os músculos, a base inferior presa a ele, e fios que conduzem a corrente elétrica. A base superior cumpre a mesma função estrutural da base inferior, a diferença é que na parte superior não é indispensável fios elétricos.

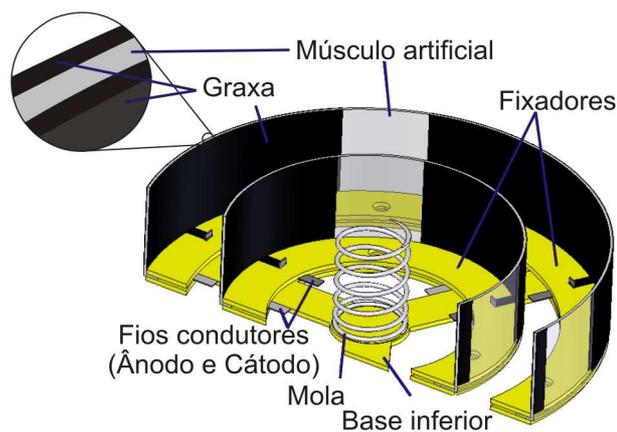


Figura 14: Atuador cortado por dois planos mostrando seus elementos.

Note que a base inferior, apresentada em detalhe na Figura 15a, possui dois anéis concêntricos. Cada anel servirá para colar e/ou prender uma camada de músculo artificial, como se vê na Figura 15b. As ranhuras radiais são para guiar

fios condutores de corrente elétrica às paredes exteriores do músculo artificial. Estes fios condutores ficam localizados entre a base e o músculo artificial, e comunicam a parede exterior à parte interna. Com os fios na parte interna do atuador, é possível montar vários atuadores em série com liberdade de movimento. Anéis fixadores, não representados na Figura 15, serão utilizados para melhor fixar os músculos à base. Furos nas bases servem de guia para colocar os anéis fixadores e a base superior, além de prender com mais força o músculo artificial utilizando parafusos. O canal circular no meio da base serve para que a mola fique também centrada no atuador.

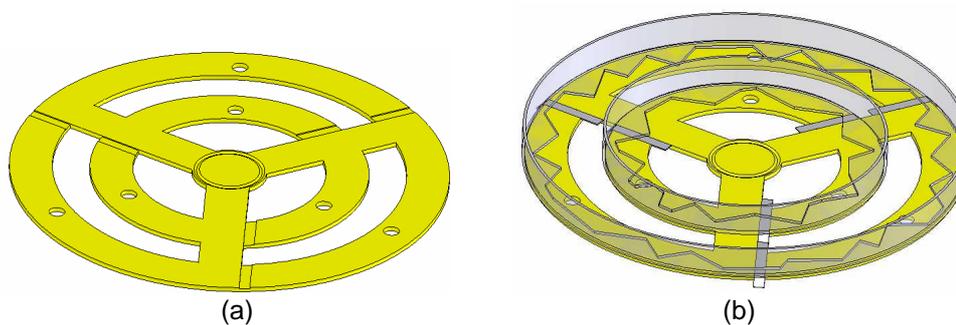


Figura 15: (a) Base inferior do atuador. (b) Base inferior, fios e músculo artificial cortado por um plano horizontal.

A Figura 16a mostra anéis fixadores a serem presos às bases. Eles possuem ranhuras e canais retangulares para guiar fios e levar corrente elétrica às paredes internas das camadas de músculo artificial. Os furos circulares servem como guias para posicionar os anéis fixadores centrados com a base inferior, mas também poderiam ser usadas para prender os músculos com maior força utilizando parafusos, como mencionado anteriormente.

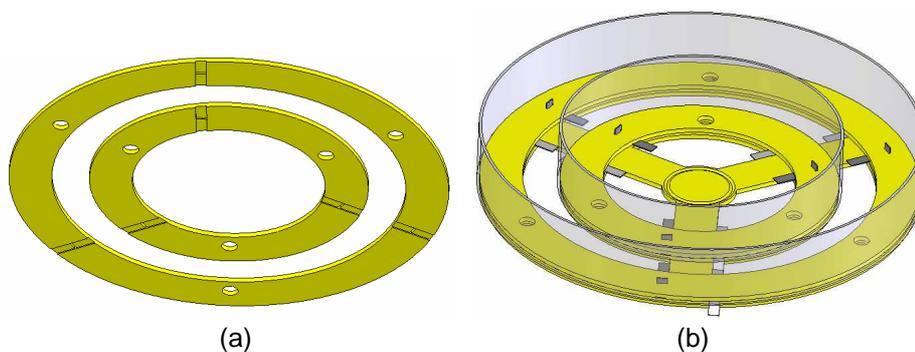


Figura 16: (a) Anéis fixadores inferiores. (b) Base e anéis fixadores que prendem ao músculo.

Uma graxa condutora é aplicada a ambas as faces dos músculos artificiais, nas paredes exterior e interior. Desse modo, as seis regiões do atuador proposto totalizam 12 áreas/faces onde a graxa precisa ser aplicada. A graxa pode ser untada usando um pincel ou esponja. Para conectar as regiões ativas aos fios, os quais estão fixados na base inferior, também se usa a graxa. A Figura 17a mostra seis regiões ativas (representadas em preto) formadas pelos músculos. Cada região é equivalente a um capacitor, onde as camadas de graxa equivalem às partes positiva e negativa, com separação menor que 0.5mm, e o polímero equivalendo ao dielétrico. A parte superior do atuador é muito similar à inferior, a diferença é que na parte superior não há ranhuras, pois não são necessários fios, como mostrado na Figura 17b.

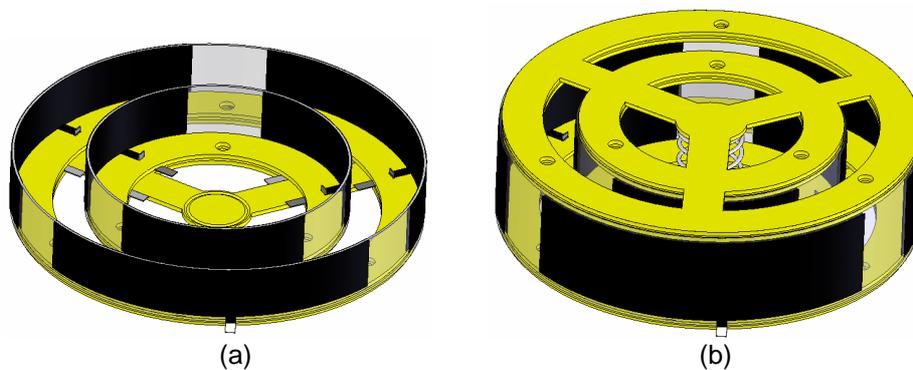


Figura 17: (a) Camadas concêntricas cobertas com graxa condutora que formam três capacitores em cada camada. (b) Projeto do Atuador pronto.

O uso de dois anéis tem a finalidade de aumentar a força e torque gerados pelo atuador. Desse modo, as regiões correspondentes entre os anéis interno e externo são conectadas eletricamente em paralelo, resultando em um sistema de três graus de liberdade. Neste atuador, se as tensões elétricas nas três regiões de ambos anéis forem iguais, como mostrados na Figura 18a, e não houver forças externas, o movimento do atuador é apenas translacional, sem rotações. Se pelo menos uma tensão elétrica for diferente, então a base superior, além de transladar, também irá se inclinar em relação à inferior, vide Figura 18b.

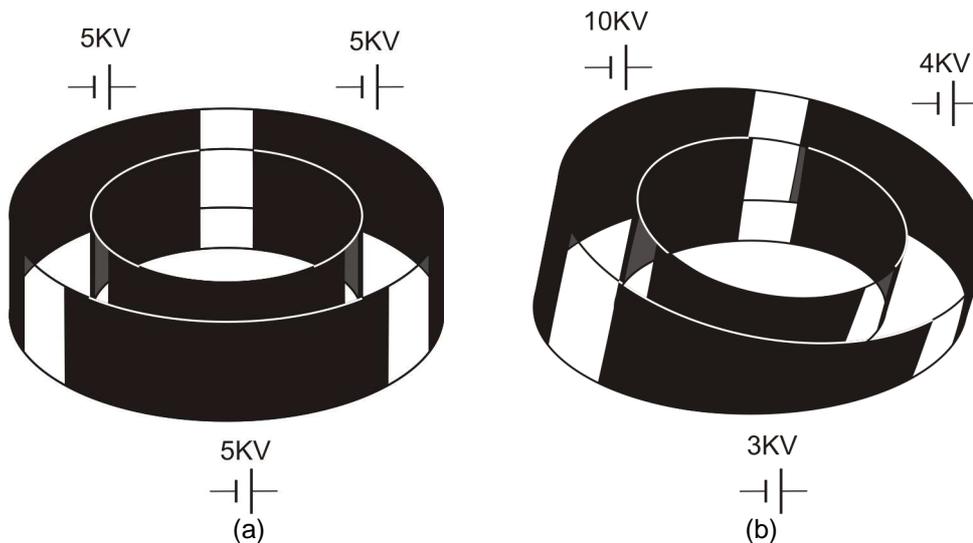


Figura 18 (a) Com tensões elétricas iguais e sem forças externas, o movimento é puramente translacional. (b) Com pelo menos uma tensão elétrica diferente, a base superior translada e gira.

Como este atuador combina três grupos de capacitores, uma versão para atuação binária, onde não há controle sobre a magnitude da tensão elétrica, possuiria $2^3 = 8$ estados discretos. Em uma configuração contínua, onde as tensões elétricas podem ser variadas continuamente, o sistema possui infinitas configurações.

Note que a escolha de apenas três regiões ativas para o atuador é conveniente para minimizar a complexidade do sistema elétrico. Três é o número mínimo de regiões que permite a rotação do sistema em duas direções perpendiculares além de translação na direção axial.

Os detalhes da construção do atuador encontram-se no Apêndice A.

2.2. Modelagem Matemática do Atuador

Uma vez concebido o atuador, é feita sua modelagem matemática. Primeiramente, é utilizada uma só camada de músculo artificial para depois estender a análise para um atuador de duas camadas (incorporando o anel interno).

O atuador de uma camada é constituído por duas bases planas de mesmo formato que são unidas pelo músculo artificial e uma mola, como ilustrado na Figura 19a. O músculo é modelado como um sistema visco-elástico onde não há atrito. Para pequenas rotações, o deslocamento do músculo encontra-se essencialmente na direção perpendicular à base inferior (direção vertical na Figura

19a). Para obter um modelo matemático do atuador, divide-se o músculo em pequenos elementos, como se vê na Figura 19b. Como o deslocamento é essencialmente vertical, as partições são aproximadas por pequenos retângulos sobre os músculos. A Figura 19b mostra o músculo constituído pela união de pequenos elementos. Daqui em diante, o termo elemento se refere a cada partição do músculo.

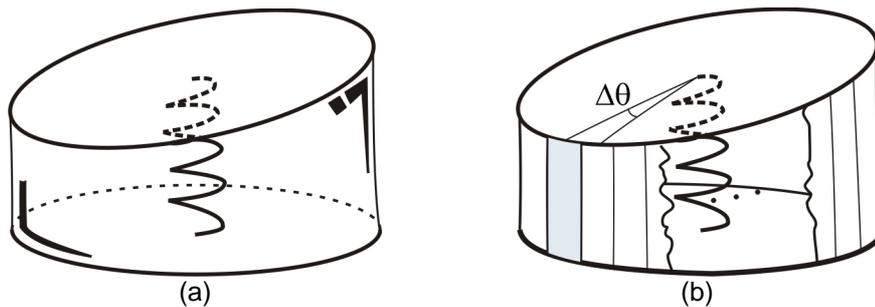


Figura 19: (a) Esquema do músculo de uma camada. (b) Sub-divisão do músculo para a modelagem matemática.

Cada elemento é modelado como um conjunto de molas e amortecedores, para assim caracterizar o comportamento do músculo. O modelo mais simples de cada elemento é o de mola-amortecedor, mas este é apenas um dos muitos modelos que se pode assumir. A Figura 20a mostra elementos entre as bases do atuador.

Agora, analisam-se as posições das bases, da mola, e de cada elemento. A posição da base superior é dada pela sua translação e rotação em relação à base inferior. Pontos correspondentes são gerados como, por exemplo, Pf_i da base superior e o ponto correspondente Po_i da base inferior, mostrados na Figura 20b. Além disso, Po_i e Pf_i são os extremos do elemento representado.

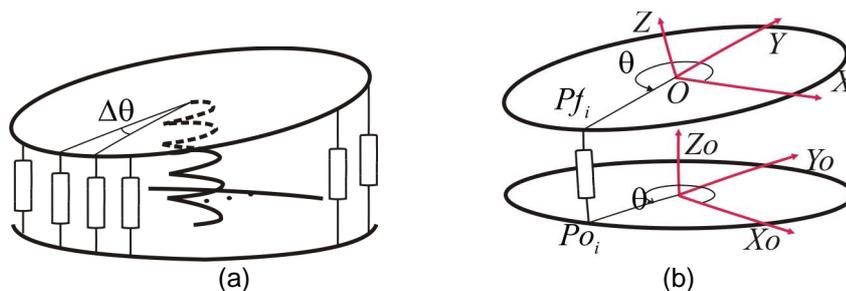


Figura 20: (a) Cada elemento é representado por um conjunto de molas e amortecedores. (b) Posição e parâmetros de um elemento.

Assume-se que o sistema de coordenadas da base inferior é fixo, e a posição do centro do sistema da base superior é dada por $O = (O_x, O_y, O_z)^T$. Como se vê na Figura 21a

Sendo α , β e γ os ângulos de rotação consecutivos nos eixos x , y , z para ir do sistema da base inferior para o sistema da base superior (Figura 21b, 21c e 21d).

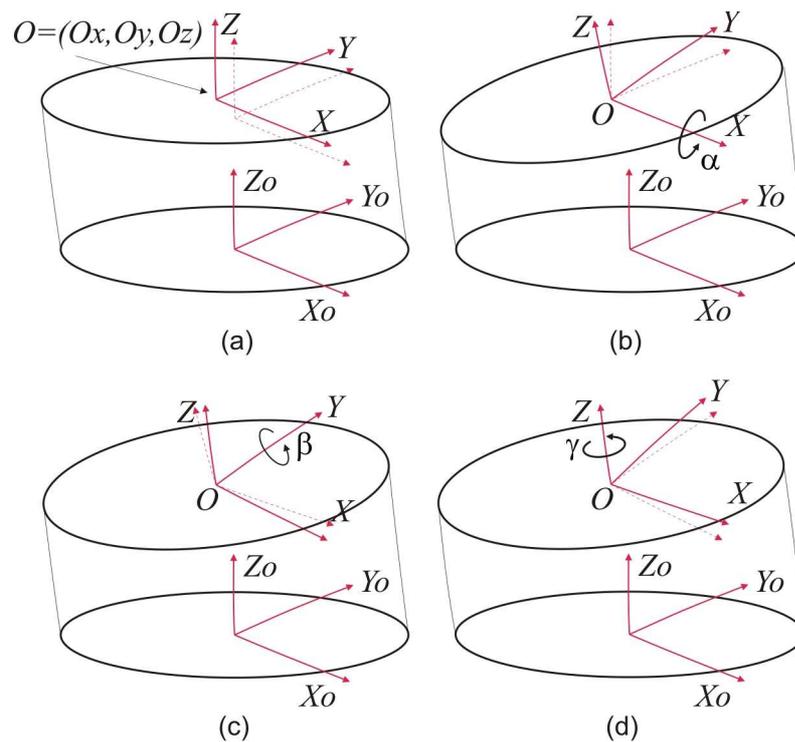


Figura 21: (a) Translação da base superior. (b) Rotação em X. (c) Rotação em Y. (d) Rotação em Z.

Então a matriz de rotação para α é:

$$A_{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Para β :

$$A_{\beta} = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Para γ :

$$A_\gamma = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Então, a matriz de rotação que leva as orientações da base inferior à base superior é:

$$A = A_\alpha \cdot A_\beta \cdot A_\gamma \quad (2.4)$$

Como Pf_i , referente à base superior, corresponde ao ponto Po_i na base inferior, cada ponto Pf_i pode ser representado no sistema da base inferior como:

$$Pf_i = A \cdot Po_i + O \quad (2.5)$$

A distância entre os extremos do elemento mola-amortecedor é então

$B_i = Pf_i - Po_i$, com comprimento $\|B_i\|$ e vetor unitário $\hat{b}_i = \frac{B_i}{\|B_i\|}$.

2.3. Modelagem Matemática do Músculo Artificial

Como mencionado anteriormente, o músculo é dividido em pequenos elementos em sua modelagem. As divisões do músculo geram segmentos nas duas bases do atuador. A Figura 22a mostra como cada elemento considera que a força atua no meio de cada segmento. O modelo mais simples para cada elemento é o de mola-amortecedor como se pode ver na Figura 22b, mas existem outros modelos que representam melhor o comportamento dos músculos artificiais tipicamente utilizados. Por isso, analisam-se vários tipos de modelos. A Tabela 1 mostra quatro tipos de modelos matemáticos para cada elemento do músculo [6].

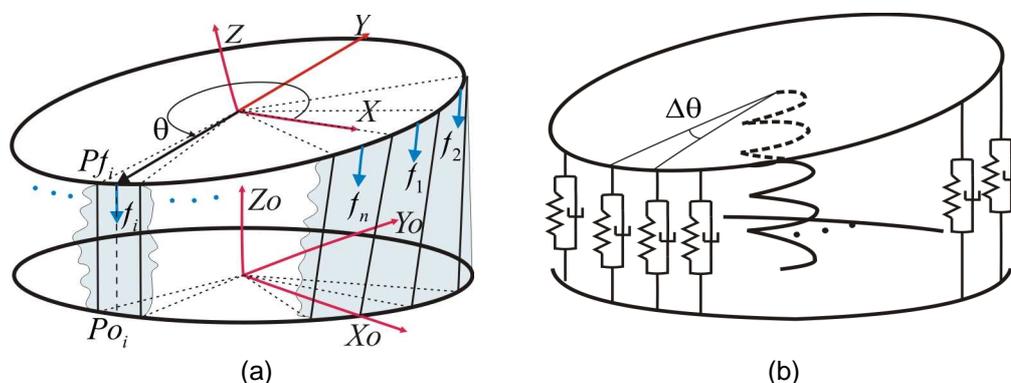
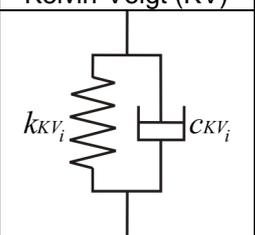
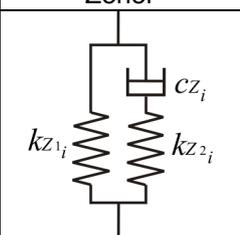
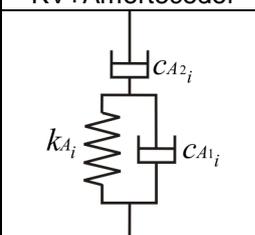
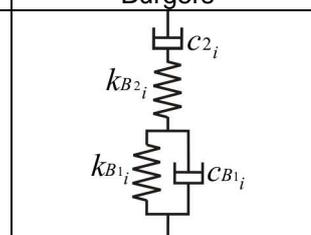


Figura 22: (a) Posições dos elementos e suas forças. (b) Um dos modelos mais simples. mola-amortecedor

Tabela 1: Tipos de modelos para cada elemento.

Kelvin-Voigt (KV)	Zener	KV+Amortecedor	Burgers
			

Cada modelo do músculo faz com que a dinâmica do atuador seja um pouco distinta, pois a força f_i que exerce cada elemento depende do tipo de modelo. Esta força, cujo módulo é denominado h_i , corresponde àquela exercida no elemento i .

Cada elemento tem um comprimento natural l_i quando relaxado, antes de sofrer um deslocamento ε_i . Estes parâmetros se relacionam da seguinte maneira:

$$\varepsilon_i = \|B_i\| - l_i \quad (2.6)$$

Note que neste trabalho a deformação da mola é definida pelo seu deslocamento ε_i . Este deslocamento/deformação não é a deformação do músculo, que seria obtida por ε_i/l_i para a deformação de engenharia, e $\ln(1 + \varepsilon_i/l_i)$ para a deformação real.

Agora, analisam-se as equações de cada modelo, onde as principais variáveis são a força h_i , o deslocamento $\varepsilon_i = \|B_i\| - l_i$ e as variações destes. A Figura 23 mostra as variáveis para o modelo mola-amortecedor ou Kelvin-Voigt, onde a mola fornece características elásticas e o amortecedor tenta reproduzir os efeitos viscosos.

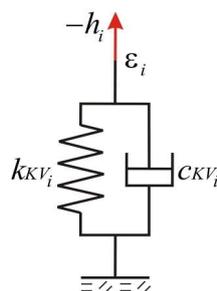


Figura 23: Modelo de Kelvin-Voigt.

Neste modelo, a fórmula relacionando a força h_i com o deslocamento (deformação da mola) ε_i , segundo as constantes de rigidez e amortecimento, é:

$$-k_{KV_i} \cdot \varepsilon_i - c_{KV_i} \cdot \dot{\varepsilon}_i = h_i \quad (2.7)$$

onde k_{KV_i} e c_{KV_i} são as constantes de rigidez e amortecimento respectivamente.

No modelo Zener, mostrado na Figura 24, é adicionado uma mola em série com o amortecedor para que o amortecimento não seja tão abrupto. A equação que relaciona os parâmetros neste caso é:

$$k_{Z2_i} \cdot k_{Z1_i} \cdot \varepsilon_i + c_{Z_i} \cdot (k_{Z1_i} + k_{Z2_i}) \cdot \dot{\varepsilon}_i = -k_{Z2_i} \cdot h_i - c_{Z_i} \cdot \dot{h}_i \quad (2.8)$$

onde k_{Z1_i} e k_{Z2_i} são constantes de rigidez, e c_{Z_i} é a constante de amortecimento

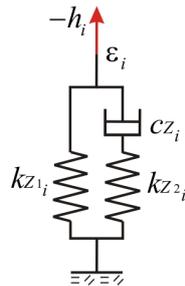


Figura 24: Modelo Zener.

No modelo “Kelvin-Voigt + Amortecedor”, mostrado na Figura 25, não existe uma configuração de equilíbrio estático, devido ao amortecedor de constante c_{A2_i} , que faz com que o elemento do músculo continue se movimentando. Para valores muito altos deste termo de amortecimento, pode-se dizer que o sistema possui um equilíbrio “quase-estático”, uma vez que a velocidade em regime permanente do sistema é muito baixa. A equação que relaciona os parâmetros desse modelo é:

$$k_{A_i} \cdot c_{A2_i} \cdot \dot{\varepsilon}_i + c_{A1_i} \cdot c_{A2_i} \cdot \ddot{\varepsilon}_i = -k_{A_i} \cdot h_i - (c_{A1_i} + c_{A2_i}) \cdot \dot{h}_i \quad (2.9)$$

onde k_{A_i} é a constante de rigidez, c_{A1_i} e c_{A2_i} são as constantes de amortecimento.

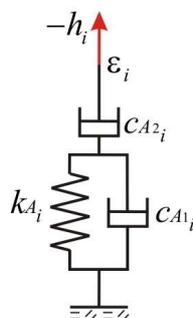


Figura 25: Modelo Kelvin-Voigt + Amortecedor.

Finalmente, o modelo de Burgers, mostrado na Figura 26, adiciona uma mola em série ao modelo “Kelvin-Voigt + Amortecedor” para dar mais flexibilidade ao sistema e melhorar a precisão na hora de estimar os parâmetros, por introduzir mais uma constante ajustável. A equação que relaciona os parâmetros é:

$$k_{B1_i} \cdot k_{B2_i} \cdot C_{B2_i} \cdot \dot{\epsilon}_i + k_{B2_i} \cdot C_{B1_i} \cdot C_{B2_i} \cdot \ddot{\epsilon}_i = -k_{B1_i} \cdot k_{B2_i} \cdot h_i - (k_{B1_i} \cdot C_{B2_i} + k_{B2_i} \cdot C_{B1_i} + k_{B2_i} \cdot C_{B2_i}) \cdot \dot{h}_i - C_{B1_i} \cdot C_{B2_i} \cdot \ddot{h}_i \quad (2.10)$$

onde k_{B1_i} e k_{B2_i} são as constantes de rigidez. C_{B1_i} e C_{B2_i} são as constantes de amortecimento.

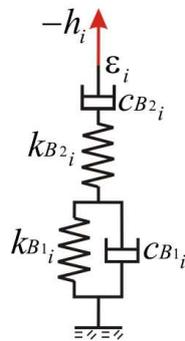
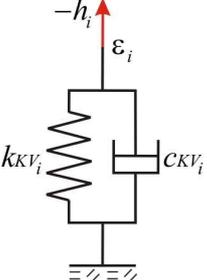
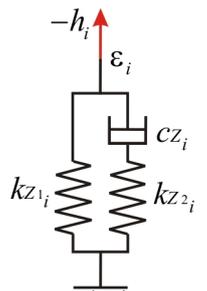
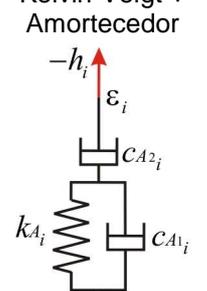
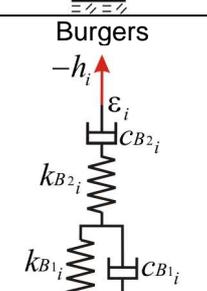


Figura 26: Modelo de Burgers.

A Tabela 2 resume os modelos considerados.

Tabela 2: Modelos matemáticos para cada elemento do músculo.

Modelo	Equação
<p>Kelvin – Voigt</p> 	$-k_{KV_i} \cdot \epsilon_i - c_{KV_i} \cdot \dot{\epsilon}_i = h_i$
<p>Zener</p> 	$k_{Z2_i} \cdot k_{Z1_i} \cdot \epsilon_i + c_{Z_i} \cdot (k_{Z1_i} + k_{Z2_i}) \cdot \dot{\epsilon}_i = -k_{Z2_i} \cdot h_i - c_{Z_i} \cdot \dot{h}_i$
<p>Kelvin-Voigt + Amortecedor</p> 	$k_{A_i} \cdot c_{A2_i} \cdot \dot{\epsilon}_i + c_{A1_i} \cdot c_{A2_i} \cdot \ddot{\epsilon}_i = -k_{A_i} \cdot h_i - (c_{A1_i} + c_{A2_i}) \cdot \dot{h}_i$
<p>Burgers</p> 	$k_{B1_i} \cdot k_{B2_i} \cdot c_{B2_i} \cdot \dot{\epsilon}_i + k_{B2_i} \cdot c_{B1_i} \cdot c_{B2_i} \cdot \ddot{\epsilon}_i =$ $-k_{B1_i} \cdot k_{B2_i} \cdot h_i - (k_{B1_i} \cdot c_{B2_i} + k_{B2_i} \cdot c_{B1_i} + k_{B2_i} \cdot c_{B2_i}) \cdot \dot{h}_i - c_{B1_i} \cdot c_{B2_i} \cdot \ddot{h}_i$

Note que as forças f_i e suas intensidades h_i estão relacionadas por:

$$f_i = h_i \cdot \hat{b}_i \quad (2.11)$$

2.4. Modelagem Matemática da Mola Central

A mola central é aquela que une as bases inferior e superior na parte central de cada, ver Figura 27a. A força F_{mol} é aquela que a mola exerce nas bases, consequência da translação e rotação entre elas, como se vê na Figura 27b. A posição mostrada na Figura 27b é exagerada; na verdade, a base superior translada e gira muito pouco. A mola não se encontra engastada nas bases, ela está apenas apoiada em cada superfície. Desse modo, como o diâmetro da mola é pequeno em relação ao diâmetro das bases, é possível assumir que o contato da mola com cada base é pontual, em pontos próximos às origens dos sistemas de coordenadas. Esse contato pontual permite desprezar momentos fletores e torçores concentrados no contato entre a mola e as bases. Assim, a única reação da mola é devida a uma força alinhada ao segmento que une ambos os pontos de contato, causada pelas rigidezes à compressão e flexão da mola, o que simplifica enormemente a análise dinâmica.

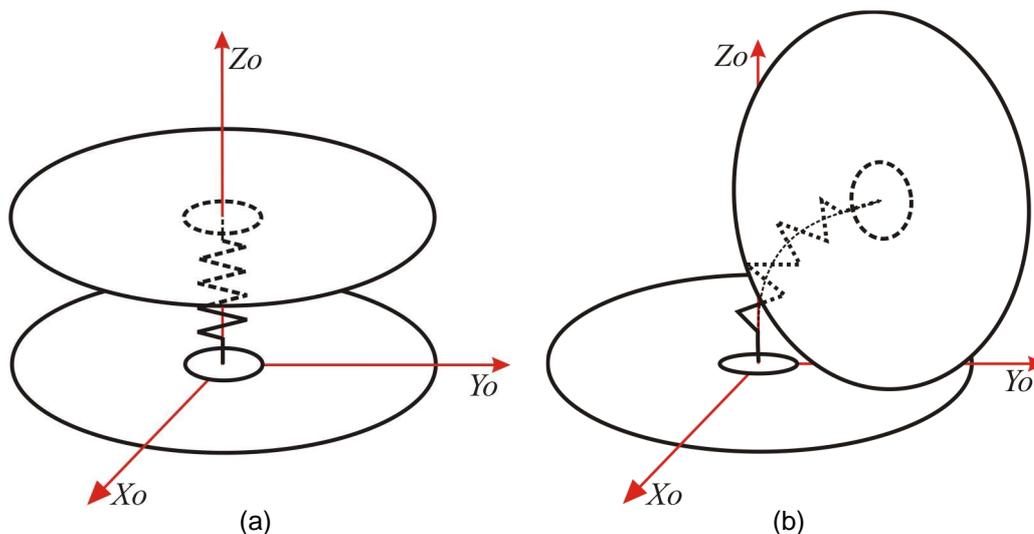


Figura 27: (a) Posição da mola central quando está relaxada. (b) Posição da mola depois que a base superior foi transladada e girada.

Assume-se que a mola possui comprimento natural L , quando não deformada. A Figura 28 mostra alguns vetores que são importantes para cálculos.

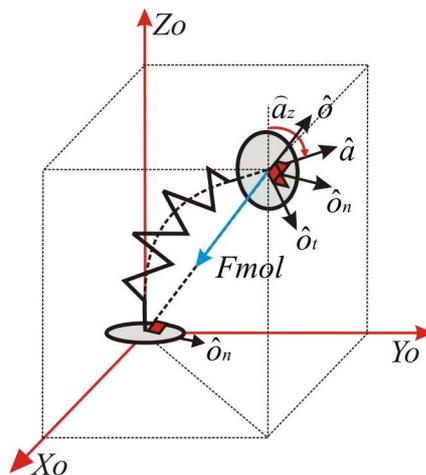


Figura 28: Diagrama vetores e força.

Define-se $\hat{o} = \frac{O}{\|O\|}$ como o vetor unitário orientado na direção do centro da

base superior, \hat{k}_o o vetor unitário orientado na direção Z_o , \hat{a} o vetor unitário orientado na direção perpendicular ao plano da base superior (\hat{a} é a terceira coluna da matriz de rotação A), \hat{a}_z o ângulo formado pelos vetores \hat{k}_o e \hat{a} (\hat{a}_z é a componente do vetor \hat{a} na direção Z_o), e \hat{o}_n o vetor unitário normal ao plano definido pelo eixo Z_o e o vetor \hat{o} , onde \hat{o} e \hat{o}_n são perpendiculares. Então \hat{o}_n é calculado por:

$$\hat{o}_n = \frac{\hat{k} \times \hat{o}}{\|\hat{k} \times \hat{o}\|} \quad (2.12)$$

Define-se também \hat{o}_t , o vetor unitário que pertence ao plano definido pelo eixo Z_o e o vetor \hat{o} , onde \hat{o} e \hat{o}_t são perpendiculares. Então, \hat{o}_t é obtido por:

$$\hat{o}_t = \hat{o}_n \times \hat{o} \quad (2.13)$$

Desse modo, \hat{o} , \hat{o}_t e \hat{o}_n formam uma base ortonormal.

A força F_{mol} que a mola exerce na base superior é calculada então pelo produto de uma constante de rigidez K , que engloba os efeitos de compressão e flexão da mola, da deformação $(\|O\| - L)$, e do vetor unitário \hat{o} , alinhado com a força:

$$\boxed{F_{mol} = -K \cdot (\|O\| - L) \cdot \hat{o}} \quad (2.14)$$

$$F_{mol} = -K \cdot \|O\| \cdot \hat{o} + K \cdot L \cdot \hat{o} \quad (2.15)$$

$$F_{mol} = -K \cdot \|O\| \cdot \frac{O}{\|O\|} + K \cdot L \cdot \hat{o} \quad (2.16)$$

$$\boxed{F_{mol} = -K \cdot O + K \cdot L \cdot \hat{o}} \quad (2.17)$$

2.5. Equações Dinâmicas do atuador

Após obter os modelos matemáticos dos músculos e da mola central, pode-se analisar a dinâmica do atuador. A Figura 29a mostra as forças exercidas pelos elementos do músculo, a força F_{mol} exercida pela mola, e a força da gravidade relativa ao disco superior e à carga útil nele fixada. O diagrama de corpo livre e a posição das forças podem ser vistas na Figura 29b.

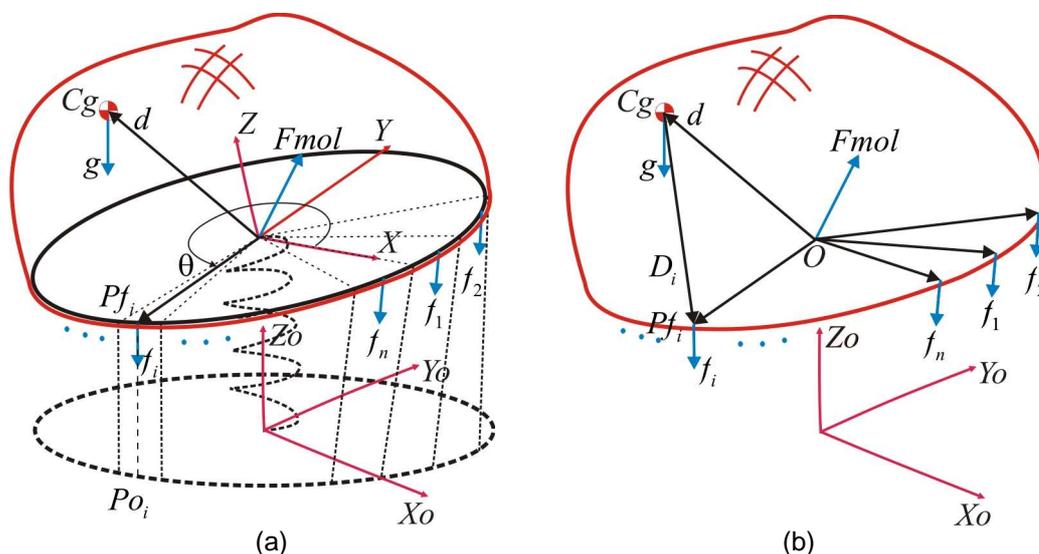


Figura 29: (a) Forças do atuador. (b) Diagrama de corpo livre e posições das forças.

A força da gravidade é sempre contrária à direção de \hat{k}_o , logo $Fg = -\hat{k}_o \cdot m \cdot g$, onde $g = 9,81m/s^2$ e m é a massa do disco superior e sua carga útil. Pela segunda lei de Newton, o somatório de forças que atuam sobre o corpo é igual à massa m multiplicada pela aceleração $\ddot{C}g$ do centro de massa deste sistema disco superior e carga útil, logo:

$$\sum_{i=1}^n f_i + F_{mol} + Fg = m \cdot \ddot{C}g \quad (2.18)$$

onde o centro de massa Cg e a aceleração da gravidade g podem ser vistas na Figura 29.

Define-se d como a posição do centro de massa medido referente ao sistema de coordenadas da base superior, vide Figura 29a, e D_i o vetor que parte do centro de massa até o ponto onde a força f_i é aplicada, vide Figura 29b. Então, tem-se:

$$D_i = Pf_i - A \cdot d \quad (2.19)$$

$$D_i = A \cdot (Po_i - d) \quad (2.20)$$

Sendo T_i o torque referente ao centro de massa Cg causado pela força f_i , então:

$$T_i = D_i \times f_i \quad (2.21)$$

Sendo $Tmol$ o torque referente ao centro de massa que é causado pela força da mola central $Fmol$, tem-se:

$$Tmol = -(A \cdot d) \times Fmol \quad (2.22)$$

Note que a força da gravidade não gera torque em relação ao centro de massa. Então, o somatório de torques referente ao centro de massa é igual à matriz de inércia I do sistema disco superior e carga útil multiplicado pela aceleração angular $\dot{\omega}$:

$$\sum_{i=1}^n T_i + Tmol = I \cdot \dot{\omega} \quad (2.23)$$

Assim, de acordo com a segunda lei de Newton e a partir das equações da dinâmica do músculo, as variáveis de posição e orientação Ox , Oy , Oz , α , β e γ são obtidas solucionando o sistema de equações diferenciais:

$$\sum_{i=1}^n f_i + Fmol + Fg = m \cdot \ddot{C}g \quad (2.24)$$

$$\sum_{i=1}^n T_i + Tmol = I \cdot \dot{\omega} \quad (2.25)$$

A solução deste sistema é descrita no Capítulo seguinte.

3 SOLUÇÃO NUMÉRICA

O Capítulo anterior mostrou as equações não lineares para o atuador proposto num estado dinâmico qualquer. Neste Capítulo são descritas as soluções numéricas das equações apresentadas mediante o método de Newton - Raphson [7] combinado com Newmark - Beta [8].

3.1. Matriz Jacobiana do Sistema de Equações

Como o calculo é para equações não lineares, a matriz jacobiana do sistema deve ser calculada. Neste item, será obtida a matriz Jacobiana do sistema de equações seguinte:

$$F(X) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n f_i + Fmol + Fg - m \cdot \ddot{C}g \\ \sum_{i=1}^n T_i + Tmol - I \cdot \dot{\omega} \end{pmatrix} = 0 \quad (3.1)$$

Primeiro se deve obter as derivadas parciais do vetor de translação $O = (Ox \quad Oy \quad Oz)^T$ em relação aos ângulos de rotação:

$$\frac{\partial O}{\partial \alpha} = \frac{\partial O}{\partial \beta} = \frac{\partial O}{\partial \gamma} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial O}{\partial Ox} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \frac{\partial O}{\partial Oy} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \frac{\partial O}{\partial Oz} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

e as derivadas parciais das matrizes de rotação A_α , A_β e A_γ :

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

$$A_\beta = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial A_\beta}{\partial \beta} = \begin{pmatrix} -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \\ 0 & 0 & 0 \\ -\cos(\beta) & 0 & -\sin(\beta) \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

$$A_\gamma = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial A_\gamma}{\partial \gamma} = \begin{pmatrix} -\sin(\gamma) & -\cos(\gamma) & 0 \\ \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Assim, as derivadas parciais da matriz de rotação $A = A_\alpha \cdot A_\beta \cdot A_\gamma$ resultam

em:

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} = \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha} \cdot A_\beta \cdot A_\gamma \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial A}{\partial \beta} = A_\alpha \cdot \frac{\partial A_\beta}{\partial \beta} \cdot A_\gamma \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial A}{\partial \gamma} = A_\alpha \cdot A_\beta \cdot \frac{\partial A_\gamma}{\partial \gamma} \quad (3.9)$$

Por simplicidade de notação, define-se dA como a derivada parcial de A referente a quaisquer das seis variáveis de estado, e dO como a derivada parcial de O referente a quaisquer das seis variáveis. Assim, a derivada parcial dos pontos correspondentes ao extremo superior $Pf_i = A \cdot Po_i + O$ do músculo Pf_i é dada por:

$$\boxed{dPf_i = dA \cdot Po_i + dO} \quad (3.10)$$

e a derivada parcial do vetor $B_i = Pf_i - Po_i = A \cdot Po_i + O - Po_i$, referente a qualquer variável, que vão do extremo inferior ao extremo superior do músculo são dadas por:

$$\boxed{dB_i = dA \cdot Po_i + dO} \quad (3.11)$$

A derivada parcial do módulo $\|B_i\|$, referente a qualquer variável, é obtida assim (Apêndice E):

$$\boxed{d\|B_i\| = dB_i^T \cdot \hat{b}_i} \quad (3.12)$$

e a derivada parcial do vetor unitário \hat{b}_i se calcula como segue (Apêndice E):

$$\boxed{d\hat{b}_i = \frac{dB_i - d\|B_i\| \cdot \hat{b}_i}{\|B_i\|}} \quad (3.13)$$

Seja Δt o intervalo de tempo usado na simulação numérica do sistema. Para o seguinte análise foi usado o meto de integração Newmark-Beta, por utilizar intervalos de tempo muitos maiores aos usados pelos métodos de Euler e Runge-Kutta. Segundo o método de integração de Newmark-Beta [8], a derivada temporal da deformação de cada elemento do músculo $\dot{\varepsilon}_i$ pode ser representada por:

$$\dot{\varepsilon}_i = -{}^{(t-\Delta t)}\dot{\varepsilon}_i + \frac{{}^{(t)}\varepsilon_i - {}^{(t-\Delta t)}\varepsilon_i}{0.5 \cdot \Delta t} \quad (3.14)$$

e assim a derivada parcial de $\dot{\varepsilon}_i$, referente a qualquer variável é:

$$d\dot{\varepsilon}_i = \frac{d\varepsilon_i}{0.5 \cdot \Delta t} \quad (3.15)$$

A segunda derivada de ε_i segundo Newmark-Beta resulta em:

$$\ddot{\varepsilon}_i = -{}^{(t-\Delta t)}\ddot{\varepsilon}_i - \frac{{}^{(t-\Delta t)}\dot{\varepsilon}_i}{0.25 \cdot \Delta t} + \frac{\varepsilon_i - {}^{(t-\Delta t)}\varepsilon_i}{0.25 \cdot \Delta t^2} \quad (3.16)$$

e assim a segunda derivada parcial de ε_i , referente a qualquer variável é:

$$d\ddot{\varepsilon}_i = \frac{d\varepsilon_i}{0.25 \cdot \Delta t^2} \quad (3.17)$$

O valor da força h_i dependerá do modelo matemático do músculo, como descrito a seguir.

Segundo o modelo Kelvin-Voigt (KV):

$$h_i = -k_{KV_i} \cdot \varepsilon_i - c_{KV_i} \cdot \dot{\varepsilon}_i \quad (3.18)$$

então a derivada parcial de h_i , referente a qualquer variável é:

$$dh_i = -k_{KV_i} \cdot d\varepsilon_i - c_{KV_i} \cdot d\dot{\varepsilon}_i \quad (3.19)$$

Segundo o modelo Zener:

$$k_{Z2_i} \cdot k_{Z1_i} \cdot \varepsilon_i + c_{Z_i} \cdot (k_{Z1_i} + k_{Z2_i}) \cdot \dot{\varepsilon}_i = -k_{Z2_i} \cdot h_i - c_{Z_i} \cdot \dot{h}_i \quad (3.20)$$

Derivando a equação acima, referente a qualquer variável, obtém-se:

$$k_{Z2_i} \cdot k_{Z1_i} \cdot d\varepsilon_i + c_{Z_i} \cdot (k_{Z1_i} + k_{Z2_i}) \cdot d\dot{\varepsilon}_i = -k_{Z2_i} \cdot dh_i - c_{Z_i} \cdot d\dot{h}_i \quad (3.21)$$

mas, análogo a (3.15), $d\dot{h}_i = \frac{dh_i}{0.5 \cdot \Delta t}$, logo:

$$k_{Z2_i} \cdot k_{Z1_i} \cdot d\varepsilon_i + c_{Z_i} \cdot (k_{Z1_i} + k_{Z2_i}) \cdot d\dot{\varepsilon}_i = -k_{Z2_i} \cdot dh_i - c_{Z_i} \cdot \frac{dh_i}{0.5 \cdot \Delta t} \quad (3.22)$$

e assim isola-se dh_i :

$$\boxed{dh_i = \frac{-\Delta t \cdot k_{z_{2i}} \cdot k_{z_{1i}} \cdot d\varepsilon_i - \Delta t \cdot c_{z_i} \cdot (k_{z_{1i}} + k_{z_{2i}}) \cdot d\dot{\varepsilon}_i}{\Delta t \cdot k_{z_{2i}} + 2 \cdot c_{z_i}}} \quad (3.23)$$

Segundo o modelo Kelvin-Voigt + Amortecedor:

$$k_{A_i} \cdot c_{A_{2i}} \cdot \dot{\varepsilon}_i + c_{A_{1i}} \cdot c_{A_{2i}} \cdot \ddot{\varepsilon}_i = -k_{A_i} \cdot h_i - (c_{A_{1i}} + c_{A_{2i}}) \cdot \dot{h}_i \quad (3.24)$$

Derivando a equação acima, referente a qualquer variável, obtém-se

$$k_{A_i} \cdot c_{A_{2i}} \cdot d\dot{\varepsilon}_i + c_{A_{1i}} \cdot c_{A_{2i}} \cdot d\ddot{\varepsilon}_i = -k_{A_i} \cdot dh_i - (c_{A_{1i}} + c_{A_{2i}}) \cdot d\dot{h}_i \quad (3.25)$$

e assim, como no caso anterior, se substitui $d\dot{h}_i = \frac{dh_i}{0.5 \cdot \Delta t}$ na equação anterior:

$$k_{A_i} \cdot c_{A_{2i}} \cdot d\dot{\varepsilon}_i + c_{A_{1i}} \cdot c_{A_{2i}} \cdot d\ddot{\varepsilon}_i = -k_{A_i} \cdot dh_i - (c_{A_{1i}} + c_{A_{2i}}) \cdot \frac{dh_i}{0.5 \cdot \Delta t} \quad (3.26)$$

$$\boxed{dh_i = \frac{-\Delta t \cdot k_{A_i} \cdot c_{A_{2i}} \cdot d\dot{\varepsilon}_i - \Delta t \cdot c_{A_{1i}} \cdot c_{A_{2i}} \cdot d\ddot{\varepsilon}_i}{\Delta t \cdot k_{A_i} + 2 \cdot (c_{A_{1i}} + c_{A_{2i}})}} \quad (3.27)$$

obtendo-se assim dh_i :

$$\boxed{dh_i = \frac{-\Delta t \cdot k_{z_{2i}} \cdot k_{z_{1i}} \cdot d\varepsilon_i - \Delta t \cdot c_{z_i} \cdot (k_{z_{1i}} + k_{z_{2i}}) \cdot d\dot{\varepsilon}_i}{\Delta t \cdot k_{z_{2i}} + 2 \cdot c_{z_i}}} \quad (3.28)$$

Agora se pode calcular a derivada de f_i , referente a qualquer variável:

$$f_i = h_i \cdot \hat{b}_i \quad (3.29)$$

$$\boxed{df_i = dh_i \cdot \hat{b}_i + h_i \cdot d\hat{b}_i} \quad (3.30)$$

A derivada parcial do torque $T_i = A \cdot (P_{O_i} - d) \times f_i$ que é causado pelas forças das elementos do músculo é dados por:

$$\boxed{dT_i = dA \cdot (P_{O_i} - d) \times f_i + A \cdot (P_{O_i} - d) \times df_i} \quad (3.31)$$

A derivada de $\ddot{C}g$, referente a qualquer variável, análogo a (3.17), é:

$$\boxed{d\ddot{C}g = \frac{Cg}{0.25 \cdot \Delta t^2}} \quad (3.32)$$

e a derivada de $\dot{\omega}$, referente a qualquer variável, análogo a (3.15) é:

$$d\dot{\omega} = \frac{\omega}{0.5 \cdot \Delta t} \quad (3.33)$$

A derivada parcial da força $F_{mol} = -K \cdot O + K \cdot L \cdot \hat{o}$ que é exercida pela mola central é:

$$\boxed{dF_{mol} = -K \cdot dO + K \cdot L \cdot d\hat{o}} \quad (3.34)$$

onde $d\hat{o}$ é calculado de forma análoga a db_i .

$$\boxed{d\hat{o} = \frac{dO - d\|O\| \cdot \hat{o}}{\|O\|}} \quad (3.35)$$

enquanto que a derivada do torque $T_{mol} = -A \cdot d \times F_{mol}$ causada pela mola central se calcula assim:

$$\boxed{dT_{mol} = -dA \cdot d \times F_{mol} - A \cdot d \times dF_{mol}} \quad (3.36)$$

A partir das equações acima, pode-se obter a derivada parcial de $F(X)$, referente a qualquer variável:

$$dF(X) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n df_i + dF_{mol} - m \cdot d\ddot{C}g \\ \sum_{i=1}^n dT_i + dT_{mol} - I \cdot d\dot{\omega} \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

A equação anterior é então usada para calcular as derivadas parciais referentes a cada uma das seis variáveis de estado do atuador. A matriz Jacobiana $JF(X)$ é então:

$$JF(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial O_x} & \frac{\partial F}{\partial O_y} & \frac{\partial F}{\partial O_z} & \frac{\partial F}{\partial \alpha} & \frac{\partial F}{\partial \beta} & \frac{\partial F}{\partial \gamma} \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

3.2. Solução Segundo o Newton-Raphson para o Modelo Kelvin-Voigt

O procedimento para calcular o valor das variáveis a longo do tempo é o seguinte.

Seja o sistema de equações não-lineares:

$$F(X, \dot{X}, \ddot{X}) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n f_i + F_{mol} + F_g - m \cdot \ddot{C}g \\ \sum_{i=1}^n T_i + T_{mol} - I \cdot \dot{\omega} \end{pmatrix} = 0 \quad (3.39)$$

de variáveis $X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ O_x \\ O_y \\ O_z \end{pmatrix}$, $\dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \\ \dot{O}_x \\ \dot{O}_y \\ \dot{O}_z \end{pmatrix}$ e $\ddot{X} = \begin{pmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \\ \ddot{\gamma} \\ \ddot{O}_x \\ \ddot{O}_y \\ \ddot{O}_z \end{pmatrix}$.

No método de Newton-Raphson para o modelo KV, escolhe-se um valor inicial para $X = X_0$ e $\dot{X} = \dot{X}_0$. A variável \ddot{X} é calculada substituindo X e \dot{X} nas equações da dinâmica. Calculam-se $F(X, \dot{X}, \ddot{X})$ e $JF(X)$, e então são obtidos os novos valores de X , \dot{X} e \ddot{X} por:

$${}^{Novo} X = X - JF^{-1} \cdot F \quad (3.40)$$

$${}^{Novo} \dot{X} = -\dot{X} + \frac{{}^{Novo} X - X}{0.5 \cdot \Delta t} \quad (3.41)$$

$${}^{Novo} \ddot{X} = -\ddot{X} + \frac{{}^{Novo} \dot{X} - \dot{X}}{0.5 \cdot \Delta t} \quad (3.42)$$

Repete-se o procedimento até que $(JF^{-1} \cdot F)^T \cdot (JF^{-1} \cdot F)$ seja menor que um erro requerido.

O procedimento acima será utilizado para calcular cada um dos valores X ao longo do tempo. Como o valor inicial do método a cada instante é obtido a partir do valor que já havia convergido no intervalo de tempo anterior, a convergência é muito rápida, tipicamente de 1 a 3 iterações.

3.3. Solução Segundo o Newton-Raphson para os Modelos Zener e Kelvin-Voigt + Amortecedor

Seja o sistema de equações não-lineares:

$$F(X, \dot{X}, \ddot{X}, h, \dot{h}) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n f_i + F_{mol} + F_g - m \cdot \ddot{C}g \\ \sum_{i=1}^n T_i + T_{mol} - I \cdot \dot{\omega} \end{pmatrix} = 0 \quad (3.43)$$

de variáveis $X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ O_x \\ O_y \\ O_z \end{pmatrix}$, $\dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \\ \dot{O}_x \\ \dot{O}_y \\ \dot{O}_z \end{pmatrix}$, $\ddot{X} = \begin{pmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \\ \ddot{\gamma} \\ \ddot{O}_x \\ \ddot{O}_y \\ \ddot{O}_z \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{ncol-1} \\ h_{ncol} \end{pmatrix}$ e $\dot{h} = \begin{pmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \vdots \\ \dot{h}_{ncol-1} \\ \dot{h}_{ncol} \end{pmatrix}$.

No método de Newton-Raphson para os modelos Zener ou KV + amortecedor, escolhe-se um valor inicial para $X = X_0$, $\dot{X} = \dot{X}_0$ e $h = h_0$. A variável \ddot{X} é calculada substituindo X , \dot{X} e h nas equações dinâmicas. Calculam-se F e JF , e são obtidos os novos valores de X , \dot{X} e \ddot{X} :

$${}^{Novo} X = X - JF^{-1} \cdot F \quad (3.44)$$

$${}^{Novo} \dot{X} = -\dot{X} + \frac{{}^{Novo} X - X}{0.5 \cdot \Delta t} \quad (3.45)$$

$${}^{Novo} \ddot{X} = -\ddot{X} + \frac{{}^{Novo} \dot{X} - \dot{X}}{0.5 \cdot \Delta t} \quad (3.46)$$

Repete-se o procedimento até que $(JF^{-1} \cdot F)^T \cdot (JF^{-1} \cdot F)$ seja menor que um erro requerido.

A partir da expressão de \dot{h} segundo Newmark-Beta, e substituindo-a na equação de Zener ou de KV + amortecedor são calculados h e \dot{h} .

Como no caso do cálculo para KV, o valor inicial do método a cada instante é obtido a partir do valor que já havia convergido no intervalo de tempo anterior, resultando em uma rápida convergência, tipicamente de 1 a 3 iterações.

4 MEDIÇÃO DA POSIÇÃO USANDO VISÃO ESTÉREO

Este Capítulo descreve o uso de duas câmeras para medir a posição e orientação da base superior do atuador no espaço tridimensional. Um pequeno objeto tridimensional é colocado na base superior do atuador para ser filmado com duas câmeras, que irão acompanhar o seu movimento com o uso de visão estéreo através de algoritmos de visão computacional. A medição ao longo do tempo é importante para o estudo do comportamento dinâmico do músculo artificial. Para seguir a posição de pontos nas imagens, é usada correlação cruzada junto com um algoritmo de busca de pontos locais. Para reconstruir os pontos em três dimensões foi preciso calibrar as câmeras e fazer uso da geometria epipolar [9]. A precisão da medição aumenta com a resolução da câmera. É importante ressaltar que grande parte do movimento do músculo é lento em relação às taxas de captura de câmeras típicas, o que faz com que os erros das posições estimadas quadro a quadro sejam pequenos.

É importante ressaltar a dificuldade de colocar sensores no atuador para medir sua posição. É por esta razão que foi usada uma técnica não-invasiva como a visão computacional. Um objeto cúbico contendo um padrão quadriculado é montado sobre o disco superior, facilitando a localização tridimensional do disco. O objeto é muito leve em relação ao atuador, portanto não modifica significativamente o comportamento dinâmico do músculo artificial. Na Figura 30a pode-se observar o objeto na parte superior do atuador. O uso desta solução de sensoriamento possui muitas vantagens como facilidade de construção, baixo custo, ausência de fios ou cabos no disco superior, além de não interferir significativamente nos parâmetros dinâmicos do atuador. A Figura 30b mostra a posição das câmeras e do atuador.



Figura 30: (a) Objeto para a medição colocado na base superior do atuador. (b) Posição das câmeras para medir o movimento do objeto.

A visão estéreo é o ramo da visão computacional que analisa o problema da reconstrução da informação tridimensional de objetos a partir de um par de imagens capturadas simultaneamente. Os seres humanos, assim como a maioria dos animais, possuem um par de olhos que resultam na aquisição de duas imagens do mundo externo com um pequeno deslocamento lateral. Tal deslocamento gera pequenas diferenças entre as imagens, quase imperceptíveis quando observadas separadamente. Mas são justamente estas pequenas diferenças que permitem a percepção tridimensional do mundo externo. Define-se **par estéreo** como o par de imagens capturadas simultaneamente com um pequeno deslocamento de posição entre as câmeras.

4.1. Obtenção do Par Estéreo

Como mencionado anteriormente, um par estéreo é composto por duas imagens capturadas ao mesmo tempo com duas câmeras diferentes. Este par precisa cumprir alguns requisitos: os pontos correspondentes em cada imagem precisam ser facilmente localizados, e o conjunto de pontos correlacionados precisa ocupar a maior área possível na imagem para melhorar a precisão para uma dada resolução de câmera.

Os pontos a serem encontrados no disco superior poderiam ser simples pontos pretos em um fundo branco, mas muitas vezes estes desaparecem no processamento da imagem, pois são confundidos com ruído ou, dependendo da disposição espacial do objeto, ficam deformados, dificultando seu reconhecimento.

Assim, é melhor utilizar pontos obtidos pela interseção de pares de retas. Obviamente, se as retas forem finas elas também podem sumir, mas não seria o caso se fossem formadas pelo limite entre duas cores. É por isso que uma das melhores maneiras de manter um ponto na imagem com boa precisão é sendo ele o canto comum de quatro áreas definidas por duas retas, como se vê na Figura 31a. Um conjunto de pontos pode ser obtido na forma da Figura 31b.



Figura 31: (a) Ponto como interseção de duas retas. (b) Grupo de pontos.

A localização das câmeras influencia muito na precisão da reconstrução dos pontos em três dimensões. Cada câmera forma uma reta no mundo real entre sua respectiva posição e a posição do ponto na imagem. Por exemplo, na Figura 32a a câmera 1 e a câmera 2 calculam a posição do ponto em três dimensões usando suas respectivas retas. Um pequeno erro na posição do ponto, numa das imagens do par estéreo, poderia gerar uma reta falsa e resultar, portanto, em um erro no cálculo do ponto em três dimensões, como pode ser observado na Figura 32a. Para diminuir o erro, colocam-se as câmeras de modo que os eixos centrais formem ângulos próximos a noventa graus. A Figura 32b mostra que o erro diminuiu consideravelmente neste caso.

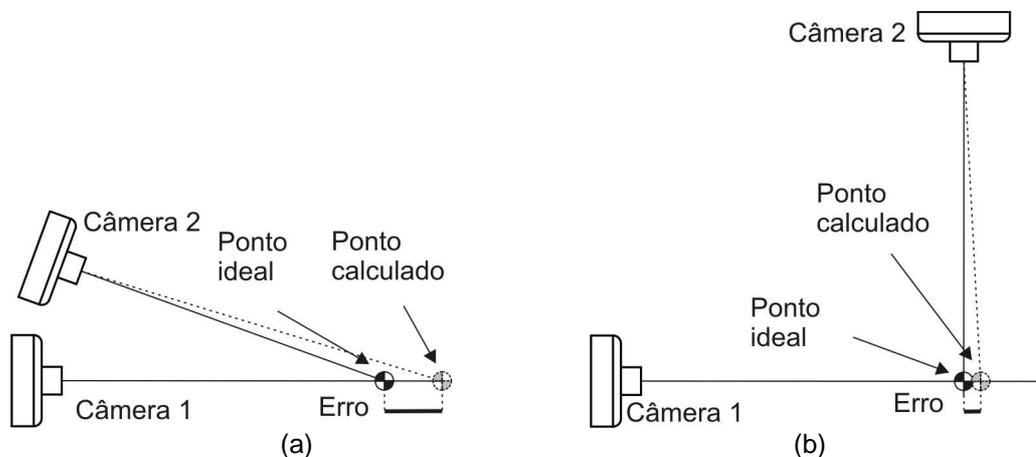


Figura 32: (a) Posição das câmeras que geram grandes erros na reconstrução 3D dos pontos. (b) Posição das câmeras que geram erros menores.

Agora, os pontos que são colocados no objeto serão analisados. Poder-se-ia colocar pontos numa das paredes do objeto de forma que fossem visíveis para as duas câmeras, mas, como as câmeras já foram dispostas muito separadas entre si, é muito provável que uma delas tenha uma melhor captura de pontos. Por exemplo, na Figura 33a, na parte superior do objeto, existem dois pontos cuja distância é representada por poucos *pixels* (*picture elements*, os elementos discretizados das imagens), neste caso pelo *segmento A*. Por outro lado, os dois pontos da parte frontal, que têm a mesma distância entre eles que a dos pontos da parte superior, é representada com mais *pixels* na imagem (*segmento B*). Os pontos na parte superior possivelmente seriam mais bem capturados por outra câmera, é por isso que os pontos não ficariam em um único plano. Para o controle do ponto quadro a quadro também há as mesmas considerações: na Figura 33b, na parte frontal, a distância de um ponto em um quadro em relação ao mesmo ponto no instante anterior é representada por mais *pixels*.

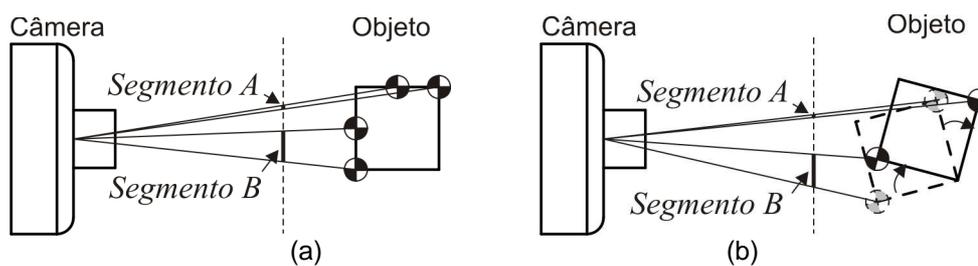


Figura 33: (a) Mesma distância representada por números diferentes de pixels. (b) Mesma distância de pontos *quadro a quadro* representada por números diferentes de pixels.

Assim, cada imagem do par estéreo deve ter captura de pontos que estejam em diferentes planos do objeto. Como o espaço tem três dimensões, então se usará três planos perpendiculares, que em seu conjunto devem ter pelo menos três pontos para definir um plano e então definir a posição e orientação do objeto, como mostra a Figura 34a. Teoricamente, três pontos são suficientes, mas, na prática, precisa-se de mais informação para que a solução seja válida para pontos que estejam afastados daqueles três primeiros pontos. Além disso, as câmeras terão maior probabilidade de captura de pontos. É por isso que um objeto mais apropriado é o objeto da Figura 34b, onde os três planos, normais entre eles, são calculados usando todos os pontos. Uma vez encontrados os planos, a posição e orientação do objeto também serão calculadas, como explicado mais adiante.

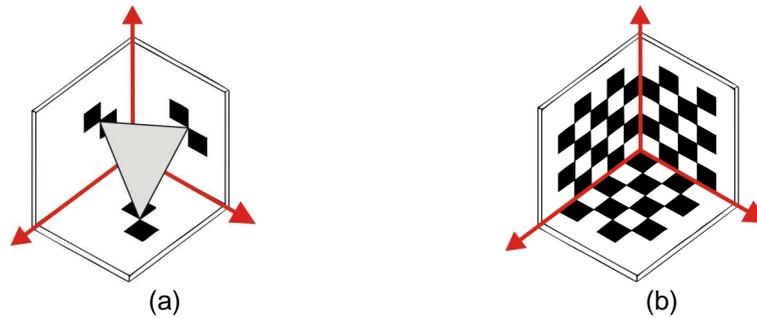


Figura 34: (a) Três pontos para definir a posição e orientação do objeto. (b) Muitos pontos para obter informação com melhor precisão.

O objeto da Figura 34b é também apropriado para calibrar câmeras. Este fato traz muitos benefícios, pois o mesmo objeto pode ser usado para a identificação da pose do atuador e para a calibração das câmeras. Ter um objeto adicional para calibração das câmeras traria problemas, pois o atuador teria que ser retirado para colocar um objeto de calibração, e a base inferior do atuador (que é fixa) teria que ter uma posição conhecida em relação ao objeto de calibração.

Um problema é que as câmeras estão posicionadas de modo que suas retas centrais sejam quase perpendiculares. Então, se uma delas consegue ter todos os pontos na sua imagem, a outra conseguirá, no máximo, capturar os pontos de um plano só, o que tornaria impossível sua calibração. Para solucionar este problema, usa-se o modelo tipo bloco da Figura 35, onde se tem duas vistas do objeto cujas quinas servem para a calibração da câmera correspondente. Além disso, as câmeras visualizarão dois planos em comum para o cálculo dos pontos em três dimensões.



Figura 35: Objeto côncavo tipo bloco em duas vistas.

O material usado para construir o objeto é náilon branco, fresado com 12mm de altura, 12mm de profundidade, e 10mm de largura. Cada quadrado do padrão quadriculado tem 2mm de lado, impressos em folhas coladas nas paredes do bloco.

Tabela 3: Resumo das vantagens do objeto.

Característica	Vantagem
Leve	Quase não influi na dinâmica do atuador.
Pequeno	Pode ser colocado com facilidade no atuador.
Muitos pontos	Melhor ajuste para calcular sua posição e orientação.
Pontos em três planos	Garante captura de pontos nas imagens do par estéreo.
Geometria cúbica	Câmeras separadas para ter precisão na reconstrução 3D
Calibrador	Não precisa de objeto calibrador adicional.
Construção	De fácil construção e barato.

Cada câmera usa uma quina do objeto para capturar uma imagem. A imagem deve ter boa visibilidade dos três planos da quina correspondente. Observando a Figura 36a, o vetor $Vect1$ mostra, partindo da quina do objeto, a posição da primeira câmera na direção $-i-j+k$ de onde os três planos daquela quina são igualmente visíveis para a câmera. Analogamente, para a segunda câmera, o vetor seria $i-j+k$. O problema das direções dos vetores é que o ângulo entre estes vetores é 70.5° , o que significaria possíveis erros na reconstrução em três dimensões, pois sabe-se que 90° seria o valor ideal. Para que o ângulo entre os vetores seja 90° e, além disso, para que estes vetores estejam o mais perto possível dos vetores $-i-j+k$ e $-i+j+k$, eles deveriam ter as direções $-i-\sqrt{2}j+k$ e $-i+\sqrt{2}j+k$. Mas nesse caso os planos das quinas não seriam igualmente visíveis nas imagens, e poderiam atrapalhar a busca pelos pontos. A Figura 36b mostra a posição das câmeras para os experimentos.

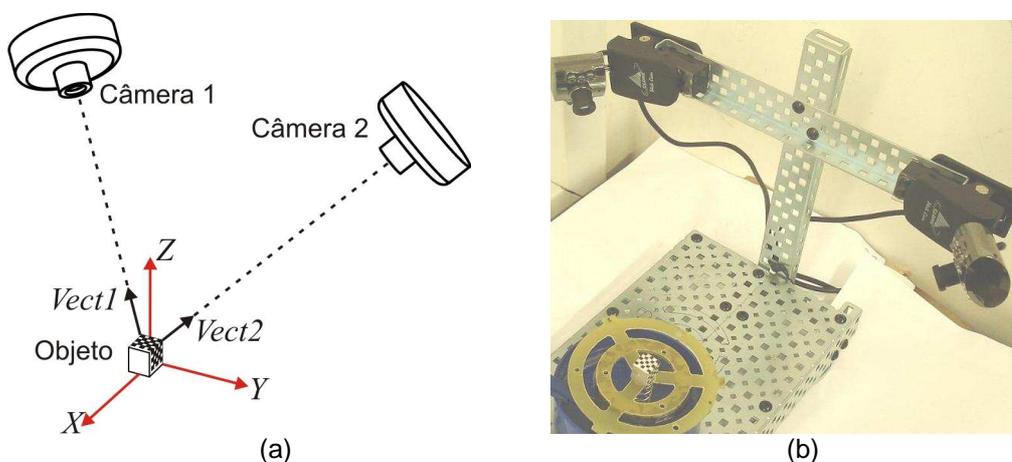


Figura 36: (a) Posição das câmeras para suas respectivas quinas. (b) Posição das câmeras nos experimentos.

Assim, usam-se as direções $-i-j+k$ e $-i+j+k$ quando o algoritmo de localização de pontos precisa de boa visão de todas as paredes do objeto. Usam-se as direções $-i-\sqrt{2}j+k$ e $-i+\sqrt{2}j+k$ quando o algoritmo de localização não precisa visualizar de forma otimizada todas as paredes do objeto. A Figura 37a mostra a vista da primeira câmera segundo a direção $-i-j+k$, visualizando bem as 3 paredes, e a Figura 37b segundo a direção $-i-\sqrt{2}j+k$, que foi a usada nos experimentos.

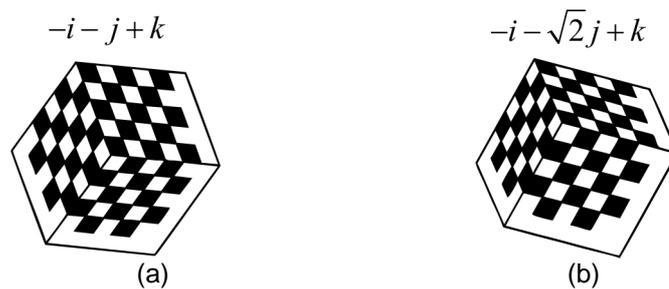


Figura 37: (a) Vista segundo direção $-i-j+k$. (b) Vista segundo direção $-i-\sqrt{2}j+k$.

Para que o objeto não fique muito grande nem muito pequeno dentro das imagens, as câmeras foram colocadas nos experimentos deste trabalho a 140mm de distância entre si, aproximadamente. Não há problema se houver alguns milímetros de erro nas posições das câmeras, pois no momento da calibração das câmeras as suas posições são recalculadas. A Figura 38 mostra um par estéreo obtido pelas câmeras.

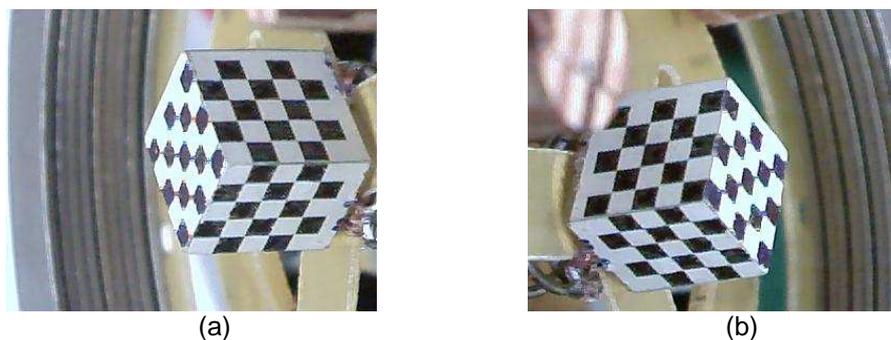


Figura 38: (a) Imagem capturada pela primeira câmera ("câmera da direita"). (b) Imagem capturada pela segunda câmera ("câmera da esquerda").

De agora em diante, a imagem que corresponde à quina esquerda será chamada *Imagem da Esquerda* e a câmera que a capturou *Câmera da Esquerda*.

(*Câmera 2*). Igualmente para a imagem da quina da direita, que será chamada *Imagem da Direita* e a câmera que a capturou *Câmera da Direita* (*Câmera 1*).

4.2. Obtenção Automática dos Pontos Correspondentes do Par Estéreo

Dois pontos correspondentes em duas imagens são um ponto do objeto, mas, capturado por duas câmeras em posições diferentes. Primeiro se acham os pontos independentemente em cada imagem e depois os relacionaremos. A Figura 39a mostra o objeto com um sistema de coordenadas na esquerda e um na direita. A quina onde encontra-se o sistema de coordenadas da direita é a que aparecerá na imagem da primeira câmera, veja Figura 39b.

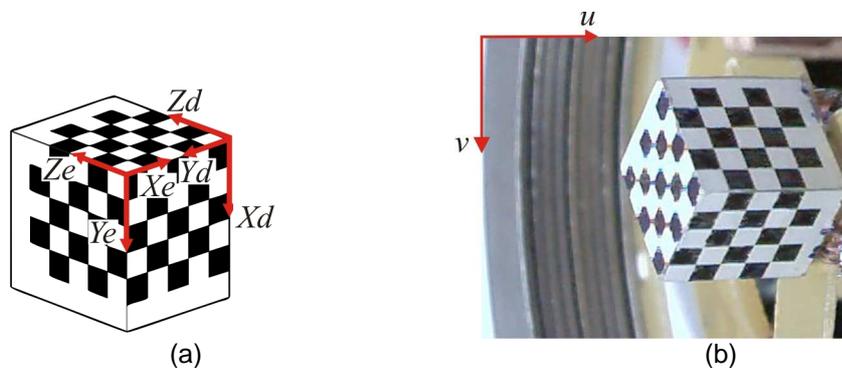


Figura 39: (a) Objeto com dois sistemas de coordenadas para a calibração de cada câmera. (b) Imagem da quina direita capturada pela câmera da direita com sistema de coordenadas na sua quina superior esquerda.

A imagem na Figura 39b será a usada para explicar o procedimento de busca de pontos. Definem-se alguns pontos na imagem, medidos em relação ao sistema de coordenadas da quina superior esquerda, como:

P_c : Ponto na imagem que corresponde à quina do objeto.

P_x : Ponto na imagem que corresponde ao ponto no eixo X_d , afastado 8 mm da quina no mundo real.

P_y : Ponto na imagem que corresponde ao ponto no eixo Y_d , afastado 8 mm da quina no mundo real.

P_z : Ponto na imagem que corresponde ao ponto no eixo Z_d , afastado 8 mm da quina no mundo real.

Os pontos P_c , P_x , P_y e P_z podem ser vistos na Figura 40a. Para garantir que o algoritmo de busca de pontos funcione, parte da imagem do objeto é isolada segundo os pontos sinalados P_c , P_x , P_y e P_z . Os pontos P_c , P_x , P_y e P_z são só guias e não precisam ser muito exatos, pois ao final da localização de todos os pontos P_c , P_x , P_y e P_z serão calculadas novamente com precisão. Estes quatro pontos são muito característicos na imagem e também serão usados na correlação cruzada para recalcular os pontos no quadro seguinte. A Figura 40b mostra o objeto isolado e envolvido por uma cor (entre branco e preto) que não terá muita influência na hora de calcular a gradiente da imagem.

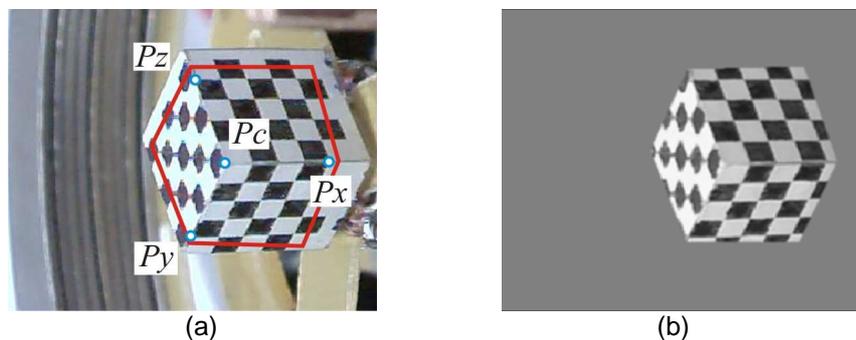


Figura 40: (a) Pontos na Imagem que ajudam na busca de pontos. (b) Imagem do objeto isolado.

A Figura 41a mostra as mudanças mais abruptas (Magnitude do gradiente). A Figura 41b mostra a direção onde acontecem as mudanças abruptas (Direção do gradiente) que na maioria estão orientados em três grupos.

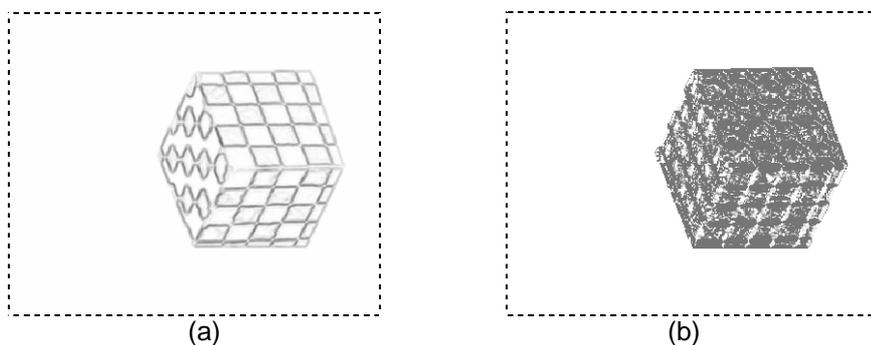


Figura 41: (a) Magnitude do gradiente da imagem. (b) Direção do gradiente da imagem.

Aplicando algoritmo de Otsu [10] calcula-se um limiar para a magnitude do gradiente da imagem [9]. Nas posições que ficam acima desse limiar,

identificamos, mediante k-means [9], três grupos de arestas (segundo as direção do gradiente) como pode-se ver na Figura 42.



Figura 42: Três grupos calculados segundo k-means.

Agora se faz processamento morfológico [12] dos três grupos de arestas aplicando dilatação e erosão perpendicularmente à média de suas direções de gradiente. Para limpar cada imagem se selecionam as 10 melhores áreas e para cada área se ajusta uma reta pelo método de mínimos quadrados. Como os pontos P_c , P_x , P_y e P_z são conhecidos se pode escolher três áreas; cada área contém dois grupos de retas, se escolhe as quatro retas (de cada grupo) que mais encaixam na área e assim finalmente se obtém 6 grupos de retas (vide Figura 43).

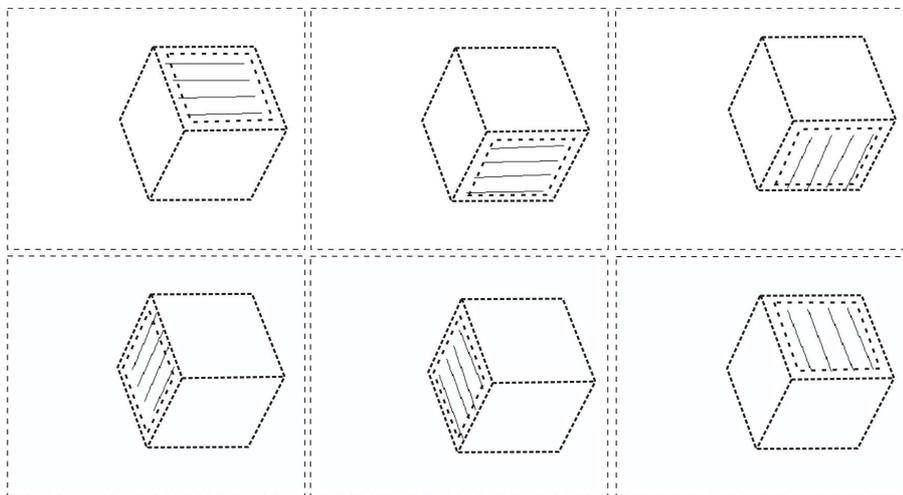


Figura 43: Seis grupos de retas.

Uma vez obtidas as retas, se encontram os pontos de interseção entre elas. Fazendo a interseção das retas mais afastadas de P_c , ver Figura 44a, se recalcula P_x , P_y e P_z com maior precisão. Para recalcular P_c , primeiro se ajustam as três retas vermelhas (Método de mínimos quadrados) segundo as respectivas

interseções que se mostram na Figura 44a e depois se interceptam cada duas retas para obter três pontos; então, P_c será a média destes pontos, como pode ser visto na Figura 44a. A Figura 44b mostra os pontos obtidos (16 pontos em cada plano da imagem do objeto) que são usados para recalculer com precisão a quina na imagem P_c , o ponto X_d , o ponto Y_d e ponto Z_d .

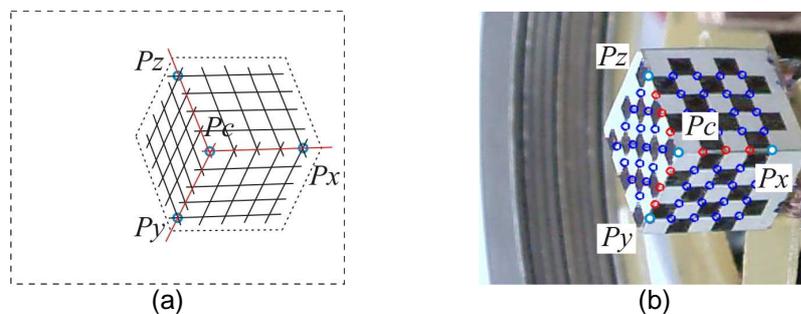


Figura 44: (a) Mostra os seis grupos de retas juntos e os quatro pontos de referência recalculados. (b) Os pontos de referência recalculados com maior precisão.

O algoritmo de busca de pontos é aplicado a todos os quadros do filme de cada câmera. Se usará a correlação cruzada para encontrar os pontos P_c , P_x , P_y e P_z no novo quadro. A Figura 45a mostra o quadro atual onde se pega uma parte da imagem em uma vizinhança (quadrado vermelho pequeno) do ponto P_c , também mostra uma vizinhança grande onde possivelmente estará o ponto P_c do seguinte quadro. A porção pequena do quadro atual percorre a vizinhança grande no quadro seguinte procurando a melhor similaridade em relação à correlação cruzada [13] que é usada por que quase não é afetado pela mudança de intensidade na iluminação. A Figura 45b mostra a vizinhança grande onde é feita a busca do ponto P_c no novo quadro.

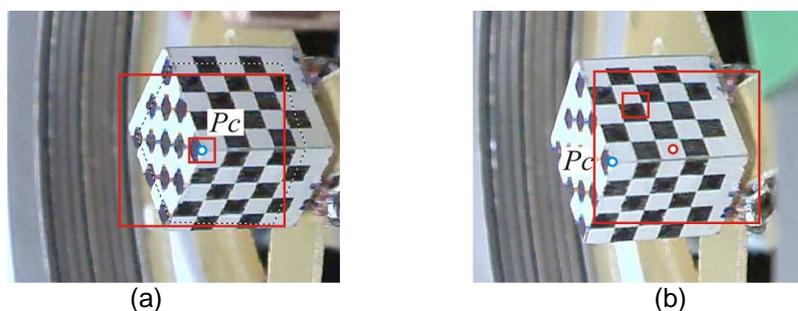


Figura 45: (a) Quadro atual mostrando a vizinhança onde se pegará uma pequena imagem para a correlação cruzada. (b) Quadro novo com a vizinhança onde é feita a busca do novo ponto.

O mesmo procedimento é feito para encontrar os pontos P_x , P_y e P_z no quadro novo. A Figura 46a mostra os pontos P_c , P_x , P_y e P_z no quadro atual, e a Figura 46b mostra os pontos P_c , P_x , P_y e P_z no quadro novo e de onde eles vieram.

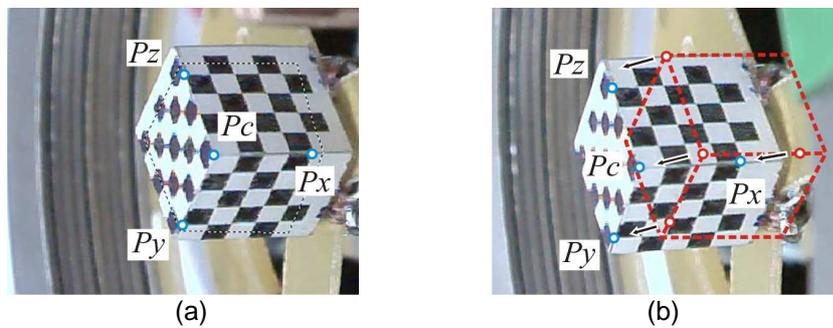


Figura 46: (a) Pontos de referência no quadro atual. (b) Pontos de referência no quadro novo e de onde eles vieram.

Depois de ter calculado os valores aproximados de P_c , P_x , P_y e P_z para o quadro novo, já se pode calcular as retas e pontos, para depois recalculá-los com precisão e passar ao seguinte quadro e assim sucessivamente até encontrar os pontos em todos os quadros.

Uma vez calculado os pontos em todos os quadros do filme da câmera da direita, se calcula pontos em todos os quadros do filme da câmera da esquerda para assim ter pontos correspondentes em cada par estéreo. A Figura 47 mostra um par estéreo com os pontos localizados e a correspondência entre dois pares de pontos.

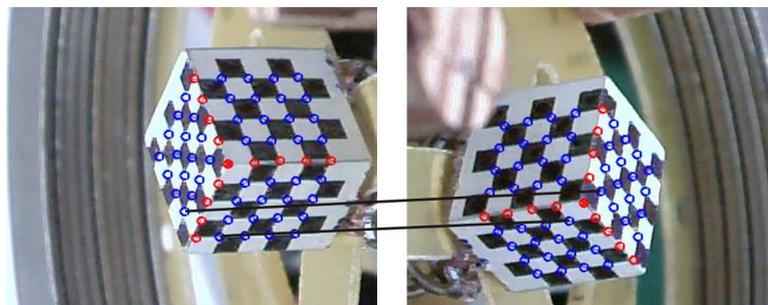


Figura 47: Par estéreo com a correspondência de dois pares de pontos

4.3. Cálculo das Matrizes de Projeção das Câmeras

A matriz de projeção de uma câmera é uma matriz que relaciona pontos no mundo real com pontos correspondentes em uma imagem segundo parâmetros da

câmera [14]. Para calcular a matriz de projeção de uma câmera, precisa-se de pontos em três dimensões no mundo real medidos de um sistema de coordenadas, como se vê na parte esquerda da Figura 48, e de pontos em duas dimensões medidos de um sistema de coordenadas na imagem, como se vê na parte direita da Figura 48. Mostra-se também a correspondência de três pares de pontos no objeto e sua imagem, mas, para a calibração, serão usados quarenta e oito pontos.

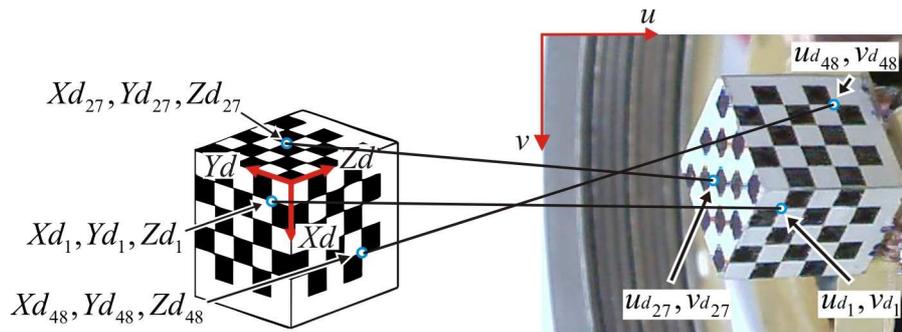


Figura 48: Pontos correspondentes do objeto e da imagem dele.

Seja $Pd_i^T = (Xd_i \ Yd_i \ Zd_i \ 1)$, onde Xd_i , Yd_i e Zd_i são medidos em relação ao sistema de coordenadas da quina direita do objeto. Seja $(\mu_i \ \nu_i)$ o ponto na imagem correspondente a Pd_i^T , medido em relação ao sistema da quina superior esquerda, e $Nu^T = (0 \ 0 \ 0 \ 0)$.

Calcula-se a Matriz \mathcal{P} por

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} Pd_1^T & Nu^T & -\mu_1 \cdot Pd_1^T \\ Nu^T & Pd_1^T & -\nu_1 \cdot Pd_1^T \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ Pd_{48}^T & Nu^T & -\mu_{48} \cdot Pd_{48}^T \\ Nu^T & Pd_{48}^T & -\nu_{48} \cdot Pd_{48}^T \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Calcula-se o autovetor Av que corresponde ao menor autovalor de $\mathcal{P}^T \cdot \mathcal{P}$. Então Av tem a seguinte forma:

$$Av^T = (av_1 \ av_2 \ av_3 \ av_4 \ av_5 \ av_6 \ av_7 \ av_8 \ av_9 \ av_{10} \ av_{11} \ av_{12})$$

A matriz de projeção para a câmera da direita Md calcula-se assim:

$$Md = \frac{\begin{pmatrix} av_1 & av_2 & av_3 & av_4 \\ av_5 & av_6 & av_7 & av_8 \\ av_9 & av_{10} & av_{11} & av_{12} \end{pmatrix}}{\sqrt{(av_1^2 + av_2^2 + av_3^2)}} \quad (4.2)$$

Analogamente, se segue o mesmo procedimento para calcular a matriz de projeção para a câmera da esquerda Me .

4.4. Cálculo dos Pontos em Três Dimensões

Para realizar o cálculo das posições dos pontos em três dimensões, elege-se um sistema de coordenadas fixo no mundo real; neste caso, fixo na parte baixa da base inferior do atuador como se vê na Figura 49a. Os eixos Xo e Yo pertencem ao plano da parte baixa da base inferior e o eixo Xo é paralelo a uma das partes retas da base inferior. O centro da base do objeto é colocado (fixo) no centro da base superior e com uma de suas arestas paralelas a uma das arestas da base superior. As bases são paralelas e o objeto está distante 15mm do sistema de coordenadas da base inferior. Nesta posição, se realiza a captura das imagens do par estéreo que são usados para a obtenção das matrizes de projeção Me e Md . Esta posição inicial tem que ser forçada e uma vez calibrada cada câmera, a base superior é liberada, ficando os sistemas de coordenadas fixos no mundo real como se vê na Figura 49b. Uma vez calibradas as câmeras, o objeto só serve para calcular a posição e orientação da base superior.

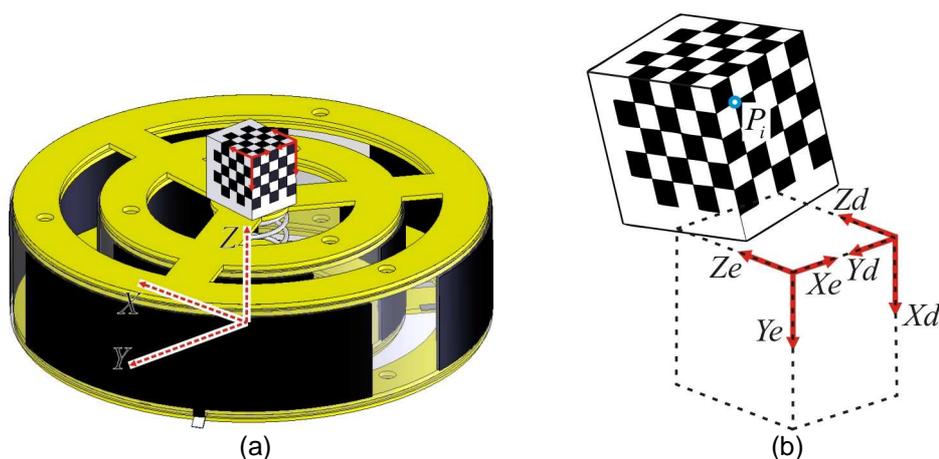


Figura 49: (a) Objeto colocado na base superior para calibrar as câmeras. (b) Posição arbitrária do objeto depois de que a base superior foi liberada.

A Figura 49b mostra o ponto $P_i = (X_i \ Y_i \ Z_i)^T$ que é um dos 32 pontos que podem ser capturados com as duas câmeras ao mesmo tempo (16 em cada plano em comum). Para ter uma idéia de como é calculado o ponto P_i , se observa a Figura 50 que mostra como é construído geometricamente, segundo os dados do par estéreo.

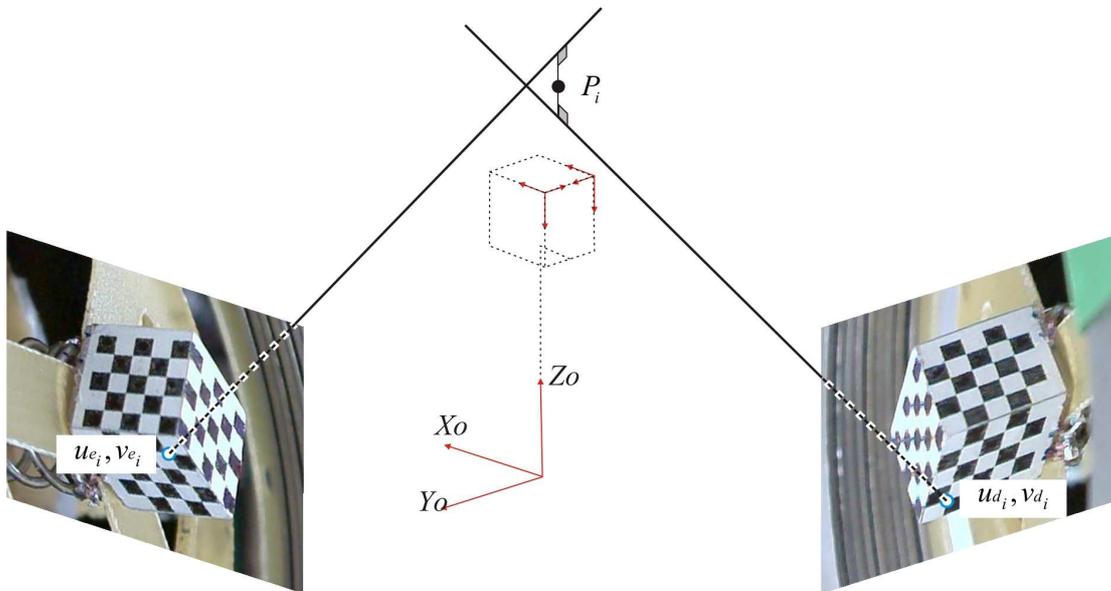


Figura 50: Construção do Ponto em três dimensões.

Seja Pe_i o ponto P_i medido no sistema de coordenadas da quina esquerda e Pd_i o ponto P_i medido no sistema de coordenadas da quina direita.

$$\text{Seja } [p_{e_i}] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & v_{e_i} \\ 1 & 0 & -u_{e_i} \\ -v_{e_i} & u_{e_i} & 0 \end{pmatrix} \text{ e } [p_{d_i}] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & v_{d_i} \\ 1 & 0 & -u_{d_i} \\ -v_{d_i} & u_{d_i} & 0 \end{pmatrix}$$

Tem que se cumprir [11]:

$$[p_{e_i}] \cdot Me \cdot Pe_i = 0 \quad (4.3)$$

$$[p_{d_i}] \cdot Md \cdot Pd_i = 0 \quad (4.4)$$

De acordo com a posição do objeto e suas medidas, é obtida a matriz de transformação T_E que relaciona os pontos P_i e Pe_i segundo a equação $(Pe_i \ 1)^T = T_E \cdot (P_i \ 1)^T$, também é obtida a matriz de transformação T_D que

relaciona os pontos P_i e Pd_i segundo a equação $(Pd_i^T \ 1)^T = T_D \cdot (P_i^T \ 1)^T$. Estas matrizes de transformação são:

$$T_E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 27 \\ 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; T_D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 27 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (4.5)$$

Então as equações (4.1) e (4.2) ficam:

$$[p_e] \cdot Me \cdot T_E \cdot \begin{pmatrix} P_i \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (4.6)$$

$$[p_d] \cdot Md \cdot T_D \cdot \begin{pmatrix} P_i \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (4.7)$$

Agrupando as duas equações obtém-se:

$$\begin{pmatrix} [p_e] \cdot Me \cdot T_E \\ [p_d] \cdot Md \cdot T_D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_i \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (4.8)$$

Para calcular P_i se minimiza $(P_i^T \cdot M^T \cdot M \cdot P_i)$. Onde

$$M = \begin{pmatrix} [p_e] \cdot Me \cdot T_E \\ [p_d] \cdot Md \cdot T_D \end{pmatrix}.$$

Calcula-se o autovetor Av correspondente ao menor autovalor de $M^T \cdot M$.

Então Av tem a seguinte forma:

$$Av = (au_1 \ au_2 \ au_3 \ au_4)^T \quad (4.9)$$

O cálculo de P_i é da seguinte maneira:

$$P_i = \frac{(au_1 \ au_2 \ au_3)^T}{au_4} \quad (4.10)$$

Então se pode obter os 32 pontos $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{31}$ e P_{32} do objeto. A Figura 51 mostra os 32 pontos em cada imagem de um par estéreo e os 32 pontos construídos em três dimensões, também se pode ver a correspondência de um dos pontos.

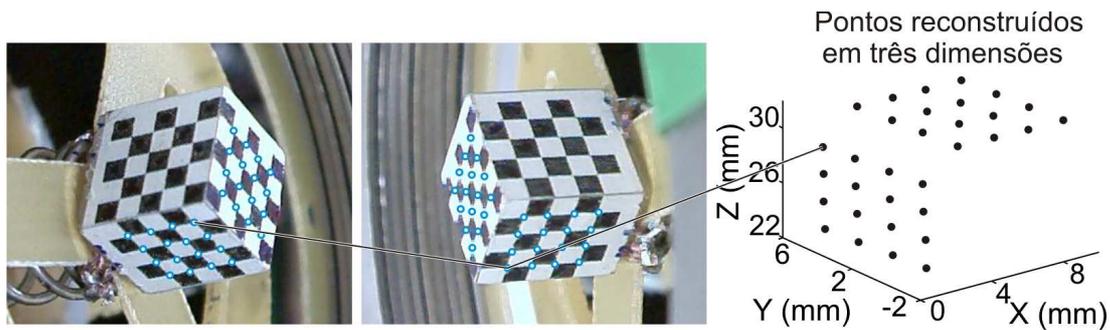


Figura 51: Par estéreo, a reconstrução em três dimensões e a correspondência de um dos pontos.

4.5. Cálculo da Posição e Orientação da Base Superior

Para calcular a posição e orientação da base superior, fixa-se um sistema de coordenadas entre a base superior e o objeto, como se vê na Figura 52a, e se associa os vetores unitários \hat{i} , \hat{j} e \hat{k} , como se vê na Figura 52b. Para calcular a orientação da base superior, tem que se calcular \hat{i} , \hat{j} e \hat{k} em relação ao sistema fixo que fica na base inferior.

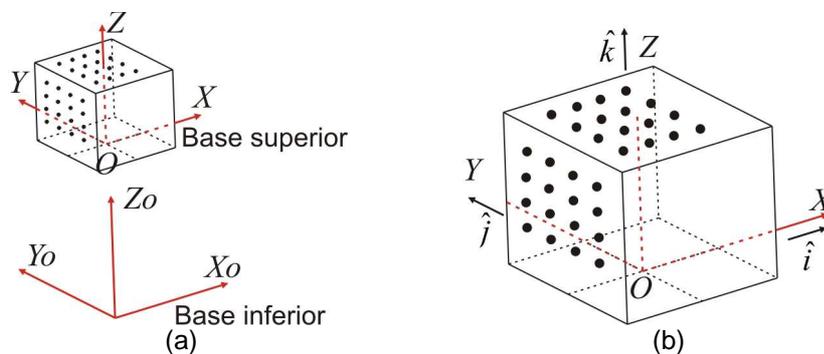


Figura 52: (a) Sistema de coordenadas no mundo real na base inferior e o sistema de coordenadas da base superior. (b) Vetores unitários associados aos eixos da base superior.

Primeiro se calculará \hat{j} , para isso se ajustam dois planos pelo método de mínimos quadrados (Apêndice F). Se obtém $Nor1$ (vetor normal ao plano superior), com terceiro termo positivo e $Nor2$ para o plano lateral, mas com a condição de ter o segundo termo positivo. Então o cálculo de \hat{j} é:

$$\hat{j} = Nor1 \times Nor2 \quad (4.11)$$

O vetor \hat{j} é paralelo à interseção daqueles planos, como se vê na Figura 53a. Como \hat{i} e \hat{k} devem ser perpendiculares a \hat{j} , usa-se um plano normal ao vetor \hat{j} para calculá-los. Neste plano, normal ao vetor \hat{j} , se projetam todos os pontos como se vê na Figura 53b.

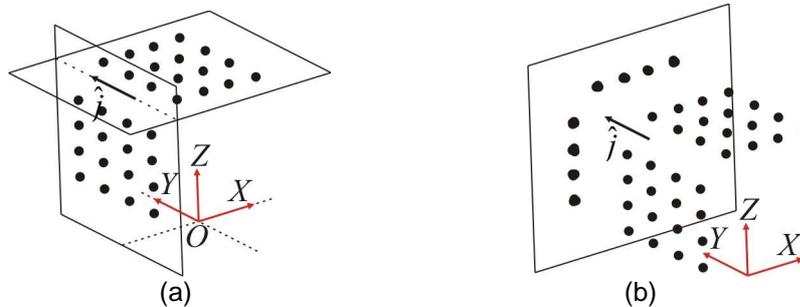


Figura 53 (a) O vetor unitário é a interseção de dois planos ajustados segundo seus respectivos pontos. (b) Projeção dos pontos a um plano normal ao vetor unitário.

Para calcular as coordenadas em duas dimensões das projeções se constrói uma matriz de rotação A' de forma que o eixo Y' e \hat{j} sejam paralelas e assim utilizar apenas os valores X'_i e Z'_i , pois, Y'_i só seria a profundidade da projeção.

Seja $\hat{k}' = (1 \ 0 \ 0)^T \times \hat{j}$ e $\hat{i}' = \hat{j} \times \hat{k}'$ então a matriz de rotação do sistema de coordenadas de eixos X', Y', Z' para o sistema de coordenadas fixo é:

$$A' = \begin{pmatrix} \hat{i}' & \hat{j} & \hat{k}' \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Então se podem calcular os pontos medidos do novo sistema:

$$P'_i = A'^T \cdot P_i \quad (4.13)$$

onde $P'_i = (X'_i \ Y'_i \ Z'_i)$.

Uma vez projetados os 32 pontos, são ajustados duas retas pelo método de mínimos quadrados, com a condição que seja perpendicular (Apêndice G), como se vê na Figura 54a. Os vetores \hat{i} e \hat{k} são então os vetores paralelos àquelas retas. Por tanto os vetores \hat{i} , \hat{j} , \hat{k} já foram calculados (Figura 54b)

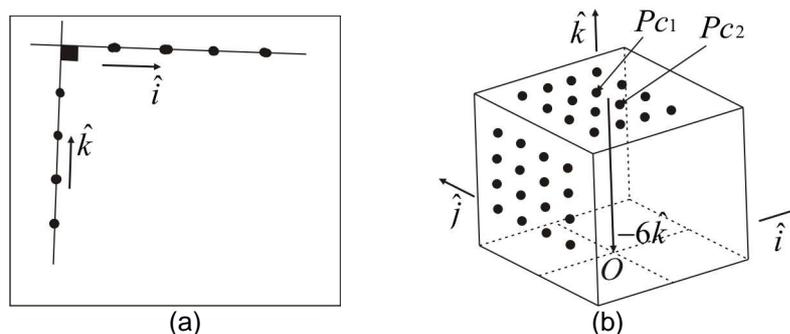


Figura 54: (a) Ajuste de duas retas com a condição de serem perpendiculares. (b) Centro de sistema de coordenadas a seis elementos de distância da média de dois pontos.

A matriz de rotação do sistema da base superior para o sistema da base inferior é:

$$A = \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{i}_x & \hat{j}_x & \hat{k}_x \\ \hat{i}_y & \hat{j}_y & \hat{k}_y \\ \hat{i}_z & \hat{j}_z & \hat{k}_z \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

Tendo a matriz de rotação, se pode calcular α , β e γ (Ângulos de Cardan [15]):

$$\beta = \sin^{-1}(\hat{k}_x) \quad (4.15)$$

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{-\hat{k}_y}{\cos(\beta)}\right) \quad (4.16)$$

$$\gamma = \sin^{-1}\left(\frac{-\hat{j}_x}{\cos(\beta)}\right) \quad (4.17)$$

O centro do sistema de coordenadas da base superior está a doze unidades abaixo do centro da parte superior do objeto (Figura 54b).

$$O = \frac{(P_{C1} + P_{C2})}{2} - 6\hat{k} \quad (4.18)$$

onde $O = (O_x \ O_y \ O_z)^T$.

Finalmente, a partir dos filmes, foram obtidos α , β , γ , O_x , O_y e O_z . Para reduzir pequenos erros devido à interferência na captura de imagens, se faz uma suavização mediando um dado com seus dois vizinhos mais próximos, em caso dos extremos com o vizinho mais perto.

5

SIMULAÇÃO, EXPERIMENTOS E CALIBRAÇÃO DO ATUADOR

5.1. Simulação do Atuador

O software MATLAB foi usado para a simulação do sistema. As rotinas programadas, com 120 funções e cerca de 4000 linhas de código, dividem-se em 4 sub-grupos:

- *Atuador*, onde se simula o equilíbrio e a dinâmica do atuador para cada modelo matemático do músculo .
- *Medição 3D*, onde estão os programas para a medição com as webcams.
- *Calibração do atuador*, que é a parte que contém os programas para a calibração.
- *Calibração da Mola*, que contém os programas para calibrar a mola fora do atuador.

Para construir os gráficos é preciso ter o valor de $X = (\alpha \ \beta \ \gamma \ O_x \ O_y \ O_z)^T$ que contém a informação da orientação da base superior e a posição de seu centro O . Como o deslocamento do músculo é essencialmente vertical, como foi explicado no Capítulo anterior do modelo matemático, então este é dividido em colunas. Pode-se observar na Figura 55 um quadro da simulação do atuador.

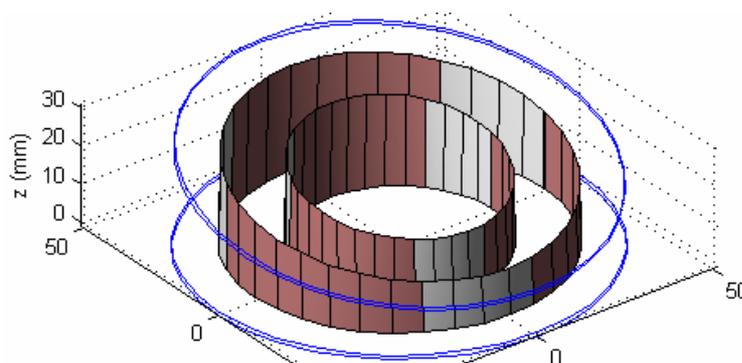


Figura 55: Simulação do atuador de duas camadas.

Os parâmetros que contêm X se podem obter por medição mediante os webcams como foi explicado no Capítulo 4. A Figura 56 mostra um par de quadros. A Figura 57 mostra uma imagem do atuador e uma de sua correspondente imagem da simulação.

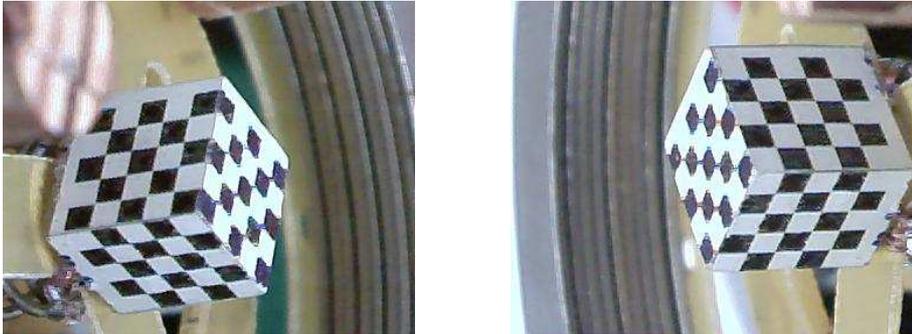


Figura 56: Par de quadros capturados pelo par de webcams.

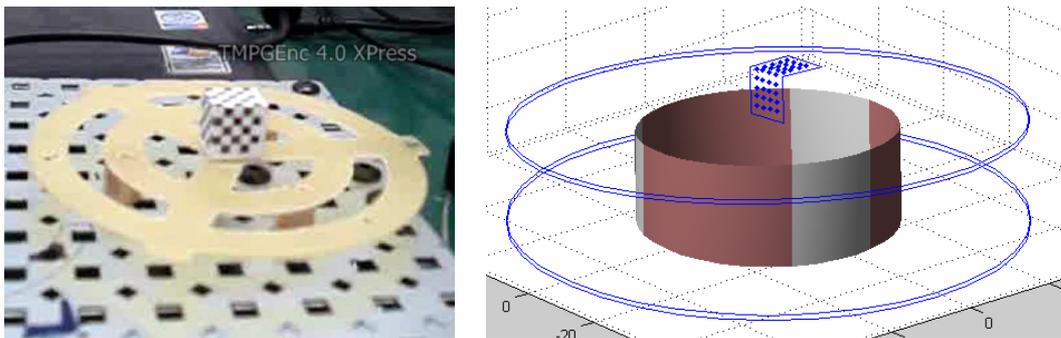


Figura 57: Imagem real na parte esquerda e Imagem da simulação na parte direita.

5.2. Sistema Experimental

Para fazer os experimentos foi necessário ter dispositivos eletrônicos e mecânicos não convencionais, por isso eles foram construídos no laboratório. O elevador de tensão elétrica [4, 5] conseguiu aproximadamente na sua saída até 10 KV (contínuo) com uma entrada de 9V (contínuo) e tem um emissor de luz para sincronizar ao par de imagens estéreo (ver Capítulo 4) . As partes do elevador de tensão elétrica se pode observar na Figura 58

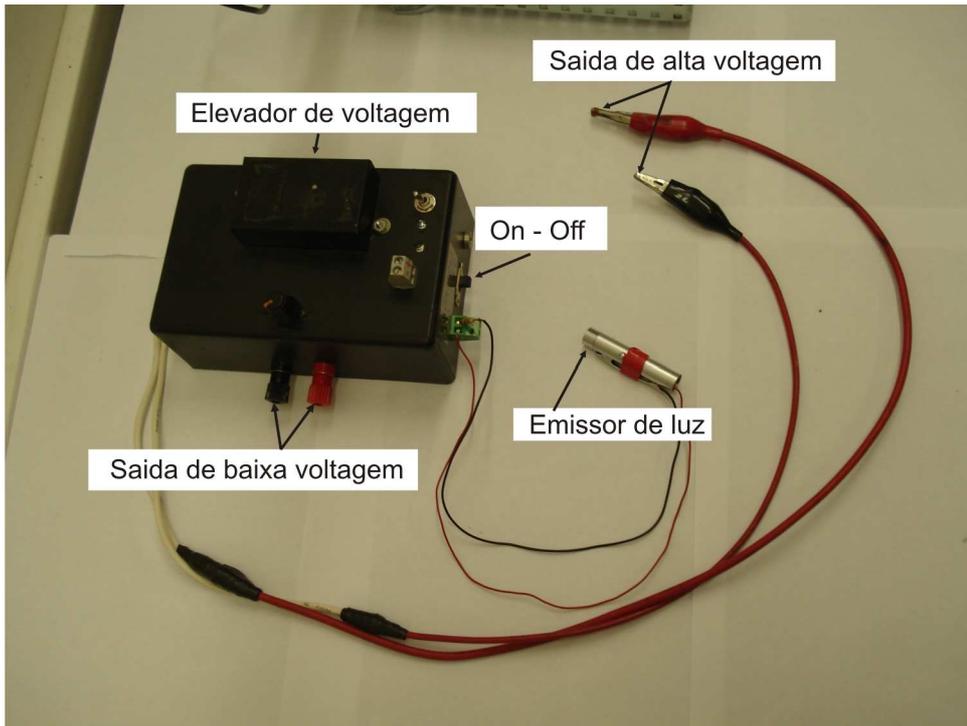


Figura 58: Partes do elevador de tensão elétrica.

O elevador comunica a alta tensão elétrica a uma, duas ou a os três capacitores do atuador (Figura 59)



Figura 59: Atuador.

Para fazer as medições se colocam as duas câmeras *webcam* para formar um par estéreo, além disso, se coloca o emissor de luz que indica o momento em que a alta tensão elétrica é aplicada. A Figura 60 mostra o par estéreo e o emissor de luz.

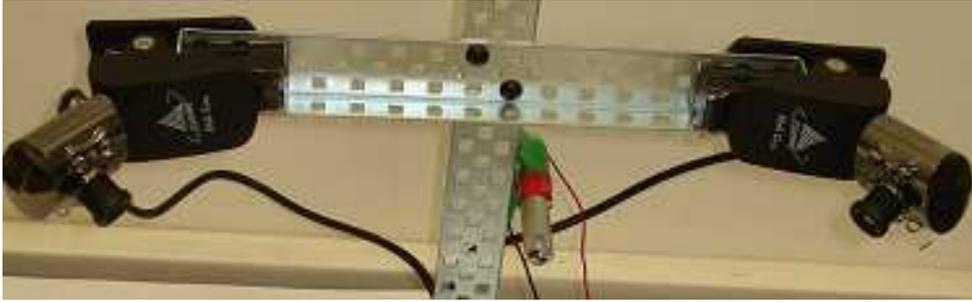


Figura 60: Par estéreo e o emissor de luz

Uma terceira câmera *webcam* (Figura 61) é usada para obter o vídeo real do atuador para ser comparado com a simulação correspondente o modelo matemático do atuador.



Figura 61: Câmera *webcam* para obter o vídeo do atuador.

Como os experimentos usam três câmeras e não sempre vai ser possível usar só um computador, então os vídeos gerados estariam fora de sincronia. Para sincronizar os vídeos se buscam os quadros onde a luz gerada pelo emissor de luz faça sua primeira aparição. Este emissor é colocado apontando ao atuador como se vê na Figura 62 onde também se pode observar o experimento completo excluindo os computadores (um computador para o par estéreo e um para a câmera que filma o atuador).

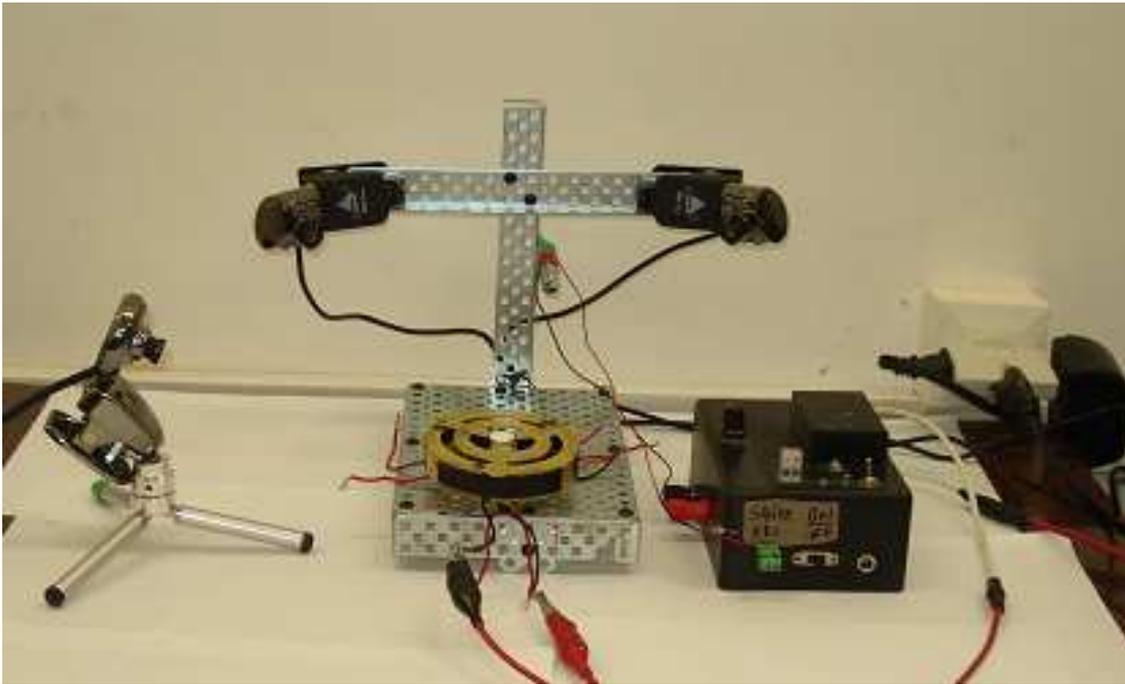


Figura 62: Componentes do experimento excluindo os computadores.

Os experimentos com o atuador de duas camadas têm menos movimento considerável que o uma camada só por dois motivos, a primeira é que o fato de ter maior área de músculo artificial faz que o deslocamento seja menor, então, o campo elétrico exerce força, com menor intensidade, aos capacitores, e a segunda é que ao ficar a camada exterior mais longe gera ângulos de rotação pequenos na base superior do atuador. Por tanto, como se vê na Figura 63b, se usara uma camada só. Coloca-se o objeto de medição na base superior do atuador e uma massa que é 10 vezes maior que a de atuador. As propriedades do objeto pesado se pode ver na Figura 63a.

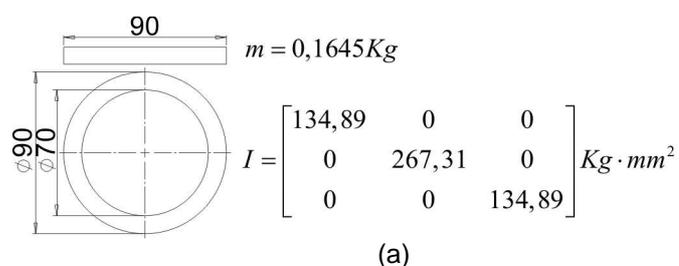


Figura 63: (a) Propriedades da carga. (b) Se coloca a massa e o objeto de medição ao atuador de uma camada.

Uma vez colocados os dispositivos se inicia a captura de imagens. Primeiro se indica ao par estéreo, desde o MATLAB, que iniciem a captura (Figura 64a), logo indicamos desde outro computador a iniciar a captura do movimento do atuador (Figura 64b). Depois de um a dois segundos é ligado manualmente o elevador de tensão elétrica, ligando também o emissor de luz e acrescentando a iluminação, durante três segundos aproximadamente. Um pequeno instante depois de o atuador ser ligado este fará um pequeno movimento rápido para depois continuar com um movimento lento. Quatro segundos depois de ser desligado o elevador de tensão elétrica se desligam as câmeras finalizando assim o experimento.

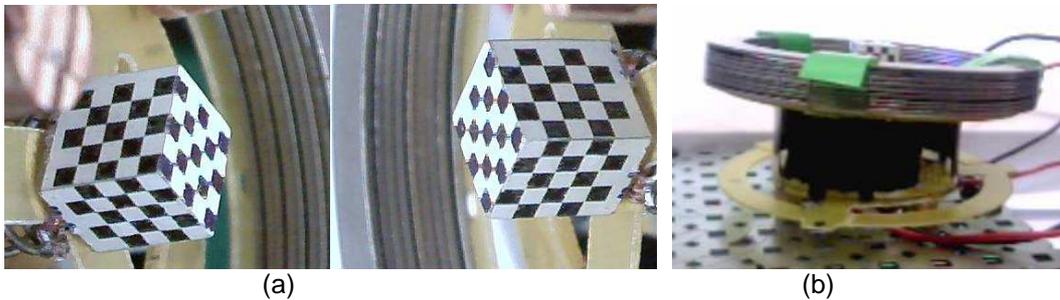


Figura 64: (a) Captura das imagens do par estéreo. (b) Captura de imagem do atuador.

Foram feitos onze experimentos, até o atuador quebrar (Figura 65), para diferentes combinações de capacitores e diferentes voltagens.

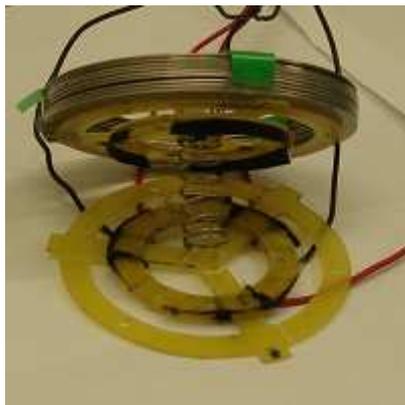


Figura 65: Atuador quebrado ao final dos experimentos.

5.3. Resultados da medição estéreo

O Capítulo 4 descreve como fazer a medição dos parâmetros de posição e orientação da base superior do atuador. Este Capítulo mostra os resultados medições dos onze experimentos realizados e a comparação com o modelo Kelvin-Voigt. Para compreender melhor os resultados se lembra (Figura 66) os parâmetros de posição, rotação da base superior e posição dos capacitores. É importante saber que a carga de massa grande faz que a base superior não fique horizontal.

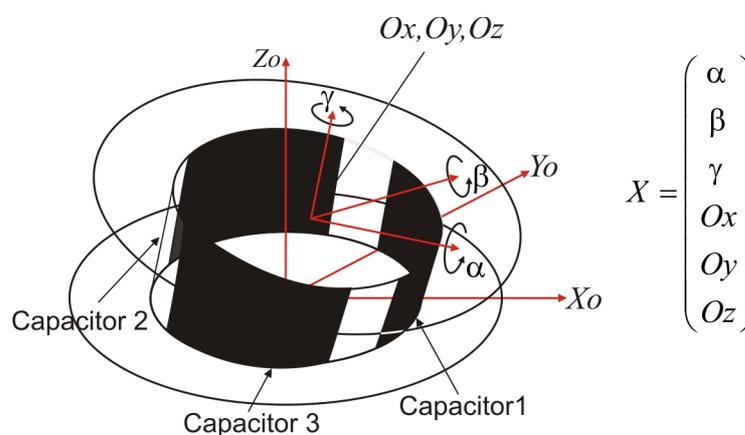


Figura 66: Partes importantes para análises dos resultados.

Um experimento segue os seguintes passos.

1. Segundos antes de aplicar tensão elétrica nas paredes do músculo se inicia a medição dos parâmetros (Capítulo 4).
2. Se aplica uma tensão elétrica nas paredes do músculo, fazendo com que a base superior do atuador se mova.
3. Se retira a tensão elétrica.
4. Quando a base superior fica estável, terminam as medições.

Cada experimento consta de três partes. A primeira (parte A dos gráficos) é quando o sistema está em repouso e as variáveis possuem valores iniciais $\alpha_o = -15^\circ$, $\beta_o = 7^\circ$, $\gamma_o = 2^\circ$, $Ox_o = 1mm$, $Oy_o = 19mm$ e $Oz_o = 19mm$. O ideal é que só Oz_o seja diferente de zero, mas, a carga sempre inclina ao atuador pela força gravidade (para evitar esta inclinação se pode colocar o atuador de cabeça para baixo). Estes valores iniciais são os mesmos para todos os experimentos. A

segunda (parte B dos gráficos) consta na ativação do um ou mais capacitores durante três segundos aproximadamente. E finalmente a terceira (parte C dos gráficos) é na desativação dos capacitores até chegar aos seis segundos. A terceira parte é ideal para a calibração dos parâmetros do músculo sem tensão elétrica. A terceira parte, quando o polímero é liberado, serve para calibrar os parâmetros da parte do polímero que tem tensão elétrica. A Figura 67 mostra as partes A, B e C na parte inferior de cada gráfico.

Para uma melhor análise dos gráficos se faz coincidir o início de cada curva com zero, para isso se resta seu valor inicial (Figura 67).

No primeiro experimento os três capacitores são acionados com tensão de 5KV. Como a área dos três capacitores fica maior não há rotação significativa, então o movimento deveria ser essencialmente no eixo Z_0 . O experimento número um mostra que a maior variação é da variável Oz como se esperava.

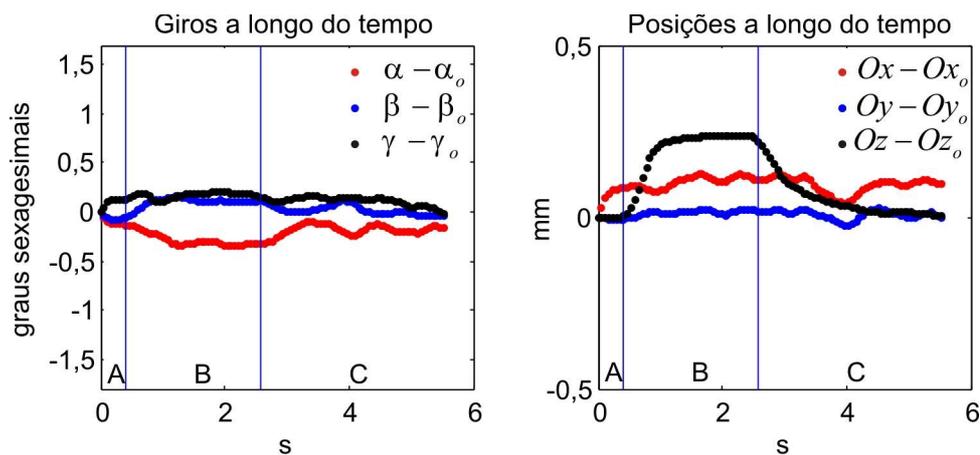


Figura 67: Giros e posições no experimento um.

Na Figura 67 dá para perceber o a influencia do ruído nas variáveis de baixo valor. Este ruído é devido, principalmente, à falta de sincronia nas imagens do para estéreo, pois, a pesar que se ordene às câmeras iniciar a captura ao mesmo tempo, isso não acontece necessariamente. Este problema pode ser solucionado capturando mais frames por segundo. Outro motivo do ruído é o tratamento de imagens para reconhecimento de linhas que pode ser melhorado analisando um erro global e não para cada linha como é explicado no Capítulo 4.

O experimento número dois aciona os capacitores um e três com 5KV. Segundo a Figura 66 pode se deduzir que α , Oy e Oz deveriam apresentar movimentação apreciável o que é conferido pelo experimento número dois. A Figura 68 mostra os resultados.

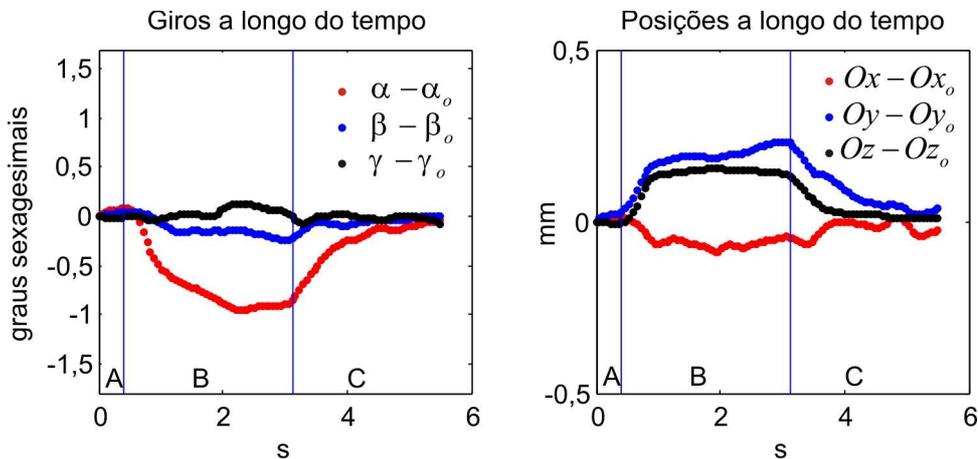


Figura 68: Giros e posições no experimento dois.

O capacitor 1 é acionado no experimento três o que deve ocasionar maior movimento em β e Ox . A Figura 69 mostra que β e Ox são os que mais variam.

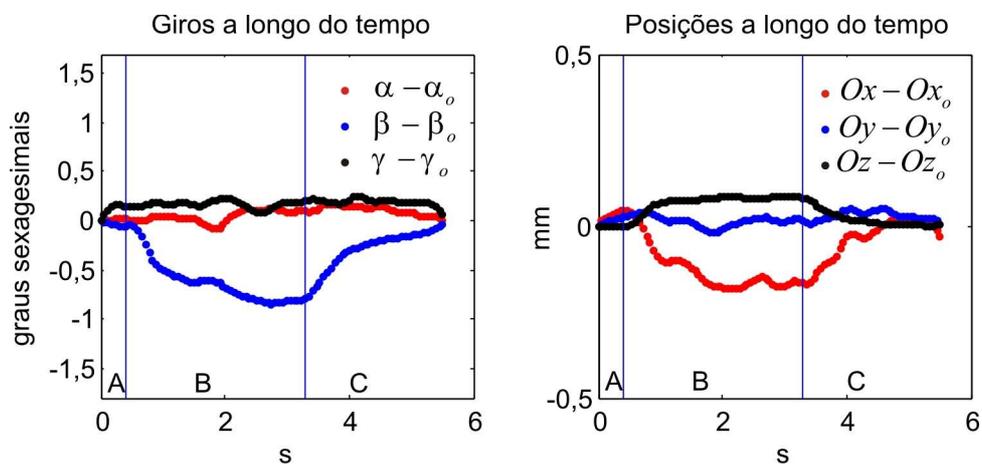


Figura 69: Giros e posições no experimento três.

O experimento quatro só é diferente do primeiro na tensão elétrica aplicada que neste caso é de 5.8 kV. Os resultados mostram maior amplitude na variável Oz (Figura 70).

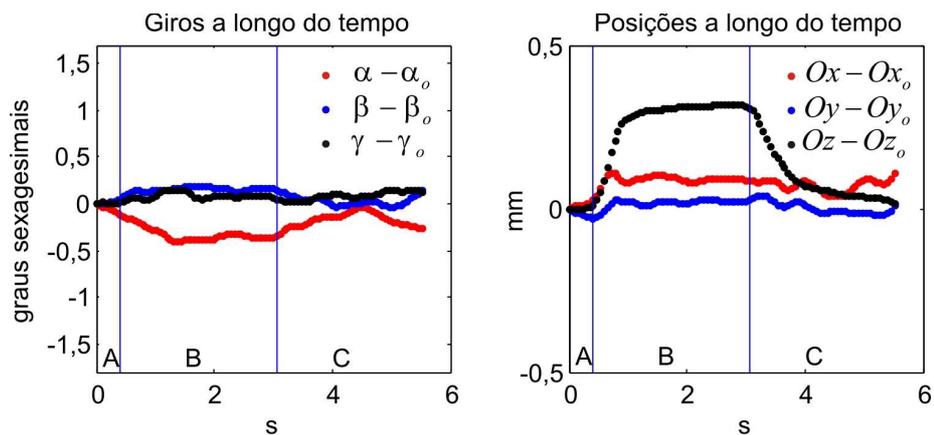


Figura 70: Giros e posições no experimento quatro.

O Experimento número cinco é parecido ao segundo só que, como no caso anterior, a tensão elétrica é de 5,8 kV. Também se aprecia maiores amplitudes na Figura 71.

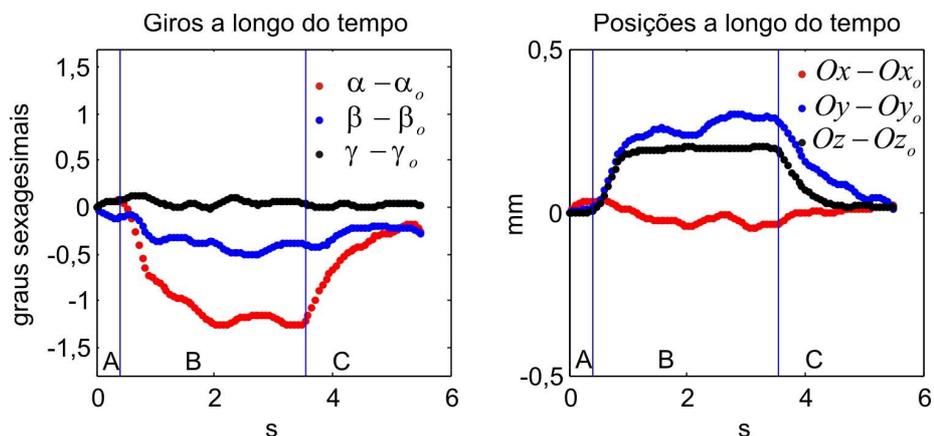


Figura 71: Giros e posições no experimento cinco.

Também se aprecia maiores amplitudes no experimento seis com o capacitor uno ativo com 5,8 kV (Figura 72)

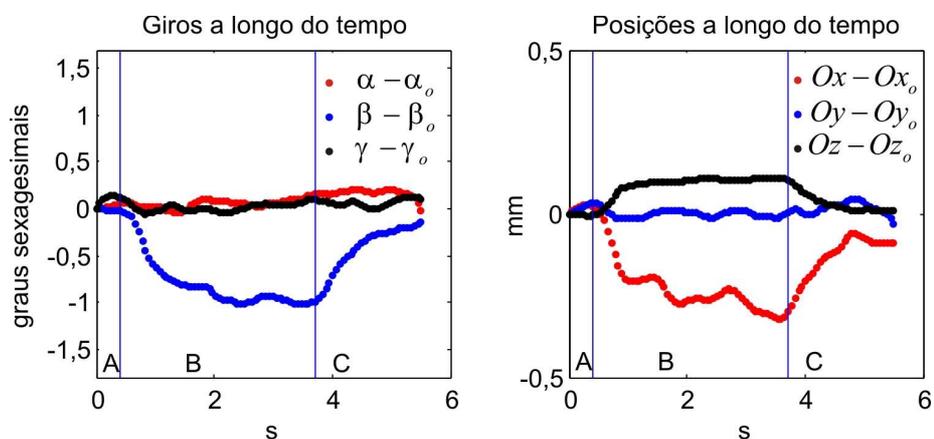


Figura 72: Giros e posições no experimento seis.

Como nos experimentos um e quatro a variável O_z tem maior amplitude para a mesma configuração de capacitores, mas com tensão elétrica de 6,5 kV. Ver Figura 73

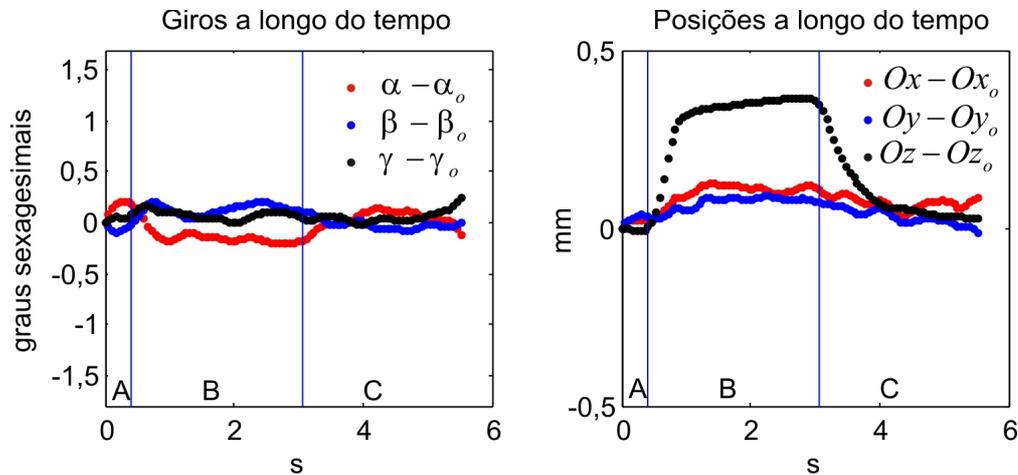


Figura 73: Giros e posições no experimento sete.

O experimento oito tem a mesma configuração de capacitores ativos que os do experimento dois e cinco pero com voltagem 6,5 kV. A Figura 74 mostra crescimento das amplitudes.

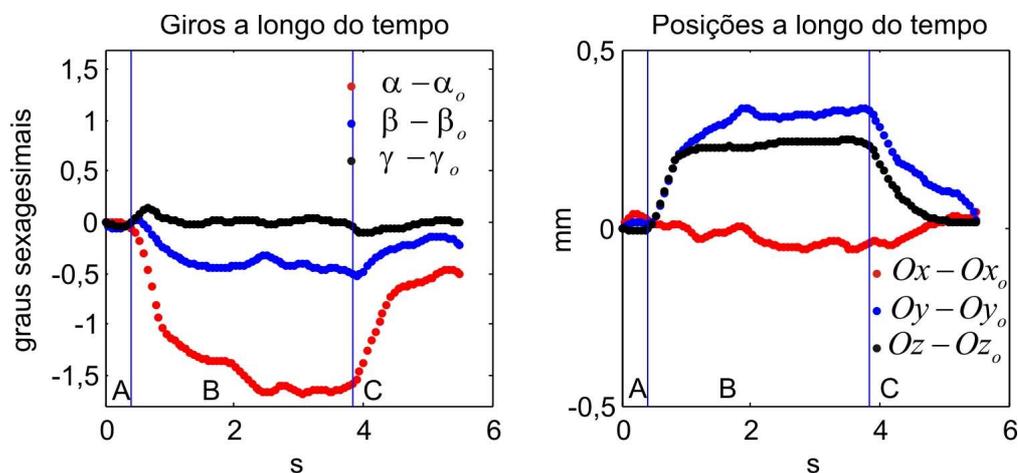


Figura 74: Giros e posições no experimento oito.

Com o capacitor uno ativado a 6,5 kV o experimento nove apresenta maiores amplitudes que os experimentos três e seis. Ver Figura 75.

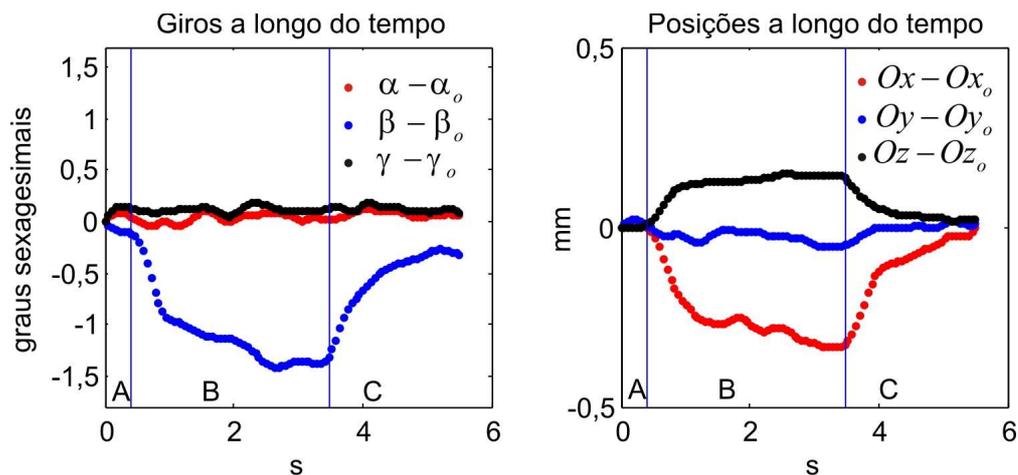


Figura 75: Giros e posições no experimento nove.

O experimento 10 repete o ciclo de experimentos. Ao igual que o primeiro inicia seu movimento com os três capacitores ativos, mas, com 7 kV. A amplitude de O_z é ainda mais apreciável (Figura 76).

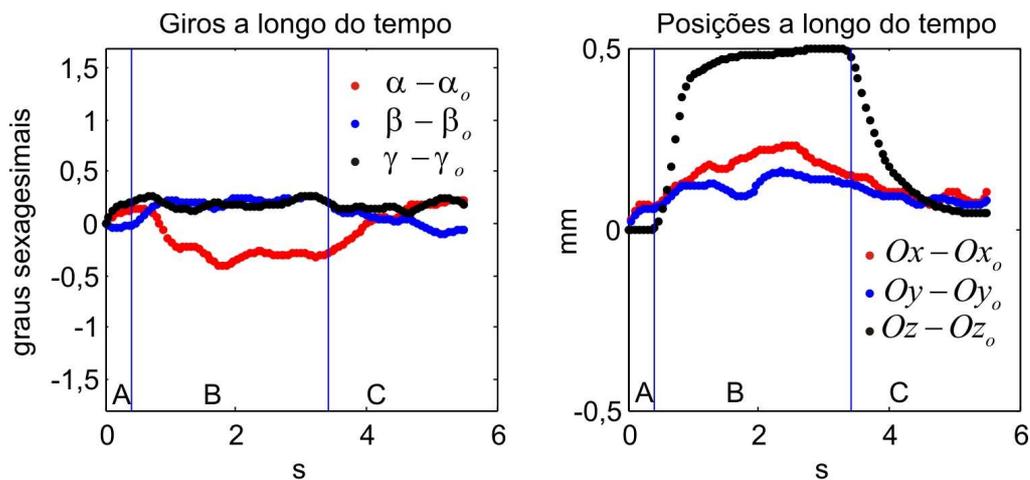


Figura 76: Giros e posições no experimento dez.

Depois de que os capacitores um e três quebraram. O último experimento foi com 8KV no capacitor dois. É apresentado na Figura 77, mas descartado para posteriores análises por apresentar rompimentos.

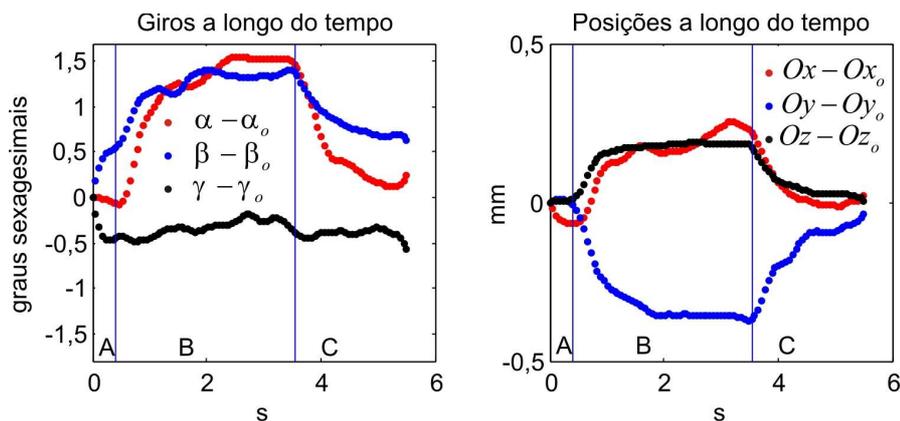


Figura 77: Giros e posições no experimento onze.

Para a análise das amplitudes se juntam os resultados dos experimentos um, quatro, sete e dez (Figura 78a). Como nestes quatro experimentos a configuração de capacitores ativos é o mesmo, de pode apreciar a diferencia de amplitudes. O da para ver que a curva de maior amplitude não conseguiu chegar à posição original, por tanto se precisa de mais tempo de capacitores ativos para uma melhor análise do comportamento visco-elástico. Segundo a Figura 78a o modelo KV deveria pelo menos seguir aquelas curvas. A Figura 78b mostra γ a longo do tempo para os 10 primeiros experimentos e não mostra muita variação, então se conclui que γ não recebe influencia no movimento do atuador e se poderia desprezar em análises dinâmicos.

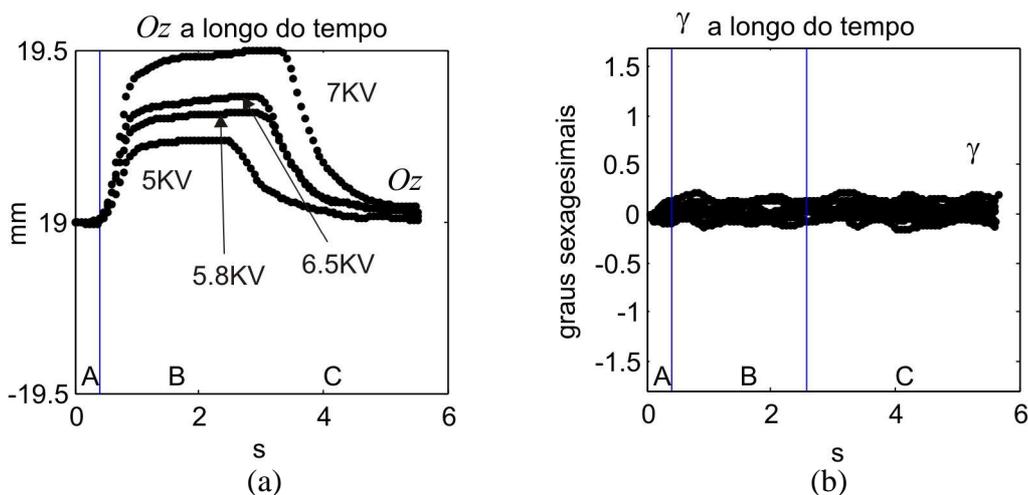


Figura 78: (a) Oz nos experimentos um, quatro, sete e dez. (b) γ nos dez primeiros experimentos.

A Tabela 4 apresenta um resumo dos experimentos.

Tabela 4: Resumo de experimentos:

Num.	Tensão Elétrica	Primeira parte (0.4 s)	Segunda parte (3 s)	Terceira parte (3 s)
1	5,0KV	Capacitor 1: Não Ativo Capacitor 2: Não Ativo Capacitor 3: Não Ativo	Capacitor 1: Ativo Capacitor 2: Ativo Capacitor 3: Ativo	Capacitor 1: Não Ativo Capacitor 2: Não Ativo Capacitor 3: Não Ativo
2	5,0KV	Capacitor 1: Não Ativo Capacitor 2: Não Ativo Capacitor 3: Não Ativo	Capacitor 1: Ativo Capacitor 2: Não Ativo Capacitor 3: Ativo	Capacitor 1: Não Ativo Capacitor 2: Não Ativo Capacitor 3: Não Ativo
3	5,0KV	Capacitor 1: Não Ativo Capacitor 2: Não Ativo Capacitor 3: Não Ativo	Capacitor 1: Ativo Capacitor 2: Não Ativo Capacitor 3: Não Ativo	Capacitor 1: Não Ativo Capacitor 2: Não Ativo Capacitor 3: Não Ativo
4	5,8KV	Capacitor 1: Não Ativo Capacitor 2: Não Ativo Capacitor 3: Não Ativo	Capacitor 1: Ativo Capacitor 2: Ativo Capacitor 3: Ativo	Capacitor 1: Não Ativo Capacitor 2: Não Ativo Capacitor 3: Não Ativo
5	5,8KV	Capacitor 1: Não Ativo Capacitor 2: Não Ativo Capacitor 3: Não Ativo	Capacitor 1: Ativo Capacitor 2: Não Ativo Capacitor 3: Ativo	Capacitor 1: Não Ativo Capacitor 2: Não Ativo Capacitor 3: Não Ativo
6	5,8KV	Capacitor 1: Não Ativo Capacitor 2: Não Ativo Capacitor 3: Não Ativo	Capacitor 1: Ativo Capacitor 2: Não Ativo Capacitor 3: Não Ativo	Capacitor 1: Não Ativo Capacitor 2: Não Ativo Capacitor 3: Não Ativo
7	6,5KV	Capacitor 1: Não Ativo Capacitor 2: Não Ativo Capacitor 3: Não Ativo	Capacitor 1: Ativo Capacitor 2: Ativo Capacitor 3: Ativo	Capacitor 1: Não Ativo Capacitor 2: Não Ativo Capacitor 3: Não Ativo
8	6,5KV	Capacitor 1: Não Ativo Capacitor 2: Não Ativo Capacitor 3: Não Ativo	Capacitor 1: Ativo Capacitor 2: Não Ativo Capacitor 3: Ativo	Capacitor 1: Não Ativo Capacitor 2: Não Ativo Capacitor 3: Não Ativo
9	6,5KV	Capacitor 1: Não Ativo Capacitor 2: Não Ativo Capacitor 3: Não Ativo	Capacitor 1: Ativo Capacitor 2: Não Ativo Capacitor 3: Não Ativo	Capacitor 1: Não Ativo Capacitor 2: Não Ativo Capacitor 3: Não Ativo
10	7,0KV	Capacitor 1: Não Ativo Capacitor 2: Não Ativo Capacitor 3: Não Ativo	Capacitor 1: Ativo Capacitor 2: Ativo Capacitor 3: Ativo	Capacitor 1: Não Ativo Capacitor 2: Não Ativo Capacitor 3: Não Ativo
11	8,0KV	Capacitor 1: Não Ativo Capacitor 2: Não Ativo Capacitor 3: Não Ativo	Capacitor 1: Não Ativo Capacitor 2: Ativo Capacitor 3: Não Ativo	Capacitor 1: Não Ativo Capacitor 2: Não Ativo Capacitor 3: Não Ativo

5.4. Calibração do Atuador

Calibrar o atuador significa estimar parâmetros que caracterizam os elementos do atuador, como suas constantes de rigidez, de amortecimento, e comprimentos naturais. Estimar estes parâmetros é muito importante, pois, ao ser o músculo um material visco-elástico, ele apresenta variações em seu comportamento físico devido a mudanças de temperatura, umidade, fadiga, etc.

Se depois de ter construído o atuador ele for levado a outro tipo de ambiente ou esteve muito tempo expandido por diferentes forças (como a da mola central ou forças externas), então ele tem que ser recalibrado pois os valores dos parâmetros calculados, com o músculo isolado, já mudaram, e para isolá-los de novo o atuador teria que ser desmontado.

Esta calibração é feita a partir da medição, a longo do tempo, das posições O_x , O_y , O_z e ângulos de rotação α , β , γ ao longo do tempo (Figura 79).

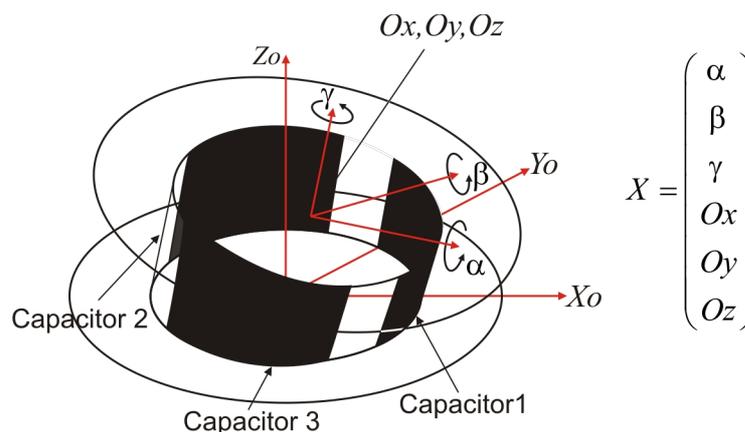


Figura 79: Posições e rotações são medidas a longo do tempo

Se consideram nt medições em intervalos de tempo Δt . O sub-índice j representa a parte do músculo onde não é possível aplicar tensão elétrica, o sub-índice k representa a parte do músculo onde é possível aplicar tensão elétrica. O sub-índice i representa a união dos dois grupos j e k . A Figura 80 mostra a carga que o atuador tem que mover (base inferior fixa) ademais mostra os sub-índices.

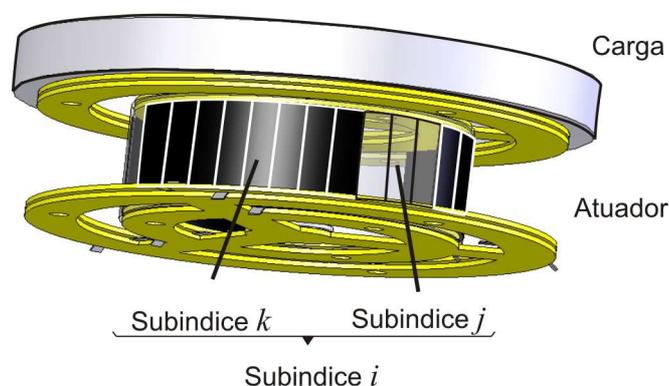


Figura 80: Sub-índice j para as partes sem tensão elétrica, k para as partes com tensão elétrica e i para todo o conjunto.

O procedimento é o seguinte.

1. Se aplica uma tensão elétrica nas paredes do músculo para assim mover a base superior do atuador, e se inicia a medição dos parâmetros (ver Capítulo 4).
2. Se retira a tensão elétrica.
3. Quando a base superior fica estável, terminam as medições.
4. Se capturam os dados obtidos entre os passos 2 e 3 e se faz o cálculo dos parâmetros do músculo no estado natural (sem tensão elétrica)
5. Se capturam os dados obtidos entre os passos 1 e 2, os parâmetros calculados em 4, e se faz o cálculo dos parâmetros do músculo com tensão elétrica.

O método de calibração é para o modelo Kelvin Voigt.

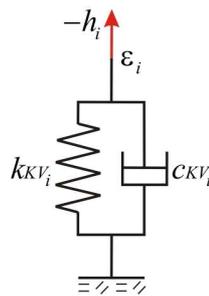


Figura 81: Modelo matemático KV.

Com equação:

$$-k_{KV_i} \cdot \varepsilon_i - c_{KV_i} \cdot \dot{\varepsilon}_i = h_i$$

Os parâmetros que serão calculados são:

k_{KV_j} : Coeficiente de rigidez para o modelo KV sem tensão elétrica.

c_{KV_j} : Coeficiente de amortecimento para o modelo KV sem tensão elétrica.

K : Constante de rigidez da mola central.

k_{KV_K} : Coeficiente de rigidez para o modelo KV com tensão elétrica.

c_{KV_K} : Coeficiente de amortecimento para o modelo KV com tensão elétrica.

l_K : comprimento natural para o modelo KV com tensão elétrica

Primeiro se faz a calibração do músculo no estado natural (sem tensão elétrica na suas paredes). Os parâmetros neste estado são K , k_{KV_j} e c_{KV_j} , que são calculados a partir de α , β , γ , O_x , O_y e O_z obtidos nos experimentos. As deduções das formulas estão no Apêndice B.

Para simplificar a formula que resolve K , k_{KV_j} e c_{KV_j} , primeiro se definem:

$$CVI_F = -\sum_i \dot{\hat{e}}_i \cdot \hat{b}_i \quad (5.1)$$

$$CT_F = -(\|O\| - L) \cdot \hat{o} \quad (5.2)$$

$$RF = m \cdot \ddot{C}g - Fg \quad (5.3)$$

$$CEI_T = -\sum_i \varepsilon_i \cdot D_i \times \hat{b}_i \quad (5.4)$$

$$CVI_T = -\sum_i \dot{\hat{e}}_i \cdot D_i \times \hat{b}_i \quad (5.5)$$

$$CT_T = A \cdot d \times (\|O\| - L) \cdot \hat{o} \quad (5.6)$$

$$RT = I \cdot \hat{\omega} \quad (5.7)$$

onde A , O , \hat{o} , L , \hat{b}_i , ε_i , m , $\ddot{C}g$, Fg , D_i , d , I , $\hat{\omega}$ são vetores e propriedades físicas descritas no Capítulo 2.

Para nt medições existem nt equações vetoriais (três dimensões) referidas às forcas, e nt equações vetoriais referidas aos torques, fazendo um total $2 \cdot nt$ equações vetoriais ou $6 \cdot nt$ equações escalares. A formula matricial do sistema de equações é:

$$\begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ nt \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \begin{matrix} {}^1CEI_F & {}^1CVI_F & {}^1CT_F \\ {}^1CEI_T & {}^1CVI_T & {}^1CT_T \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ {}^{nt}CEI_F & {}^{nt}CVI_F & {}^{nt}CT_F \\ {}^{nt}CEI_T & {}^{nt}CVI_T & {}^{nt}CT_T \end{matrix} \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{MKV_{SV}} \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \begin{matrix} k_{KV_I} \\ c_{KV_I} \\ K \end{matrix} \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{RKV_{SV}} \end{matrix} = \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ nt \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} {}^1RF \\ {}^1RT \\ \vdots \\ {}^{nt}RF \\ {}^{nt}RT \end{matrix} \right\} \quad (5.8)$$

Como há mais equações que incógnitas, se usa a matriz pseudo-inversa para obter os primeiros quatro parâmetros:

$$\boxed{(k_{KV_I} \quad c_{KV_I} \quad K)^T = (MKV_{SV}^T \cdot MKV_{SV})^{-1} \cdot MKV_{SV}^T \cdot RKV_{SV}} \quad (5.9)$$

Depois de calcular estes três primeiros parâmetros, se faz o cálculo dos três restantes que correspondem ao músculo com tensão elétrica na suas paredes. Estes

parâmetros são k_{KV_K} , c_{KV_K} e l_K que são calculados a partir de α , β , γ , Ox , Oy , Oz , K , k_{KV_j} e c_{KV_j} (Apêndice B).

Definem-se:

$$CBK_F = -\sum_k B_k \quad (5.10)$$

$$CDK_F = \sum_k \hat{b}_k \quad (5.11)$$

$$CVK_F = -\sum_k \dot{\hat{e}}_k \cdot \hat{b}_k \quad (5.12)$$

$$RRF = m \cdot \ddot{C}g - Fmol - \sum_j f_j - Fg \quad (5.13)$$

$$CBK_T = -\sum_k D_k \times B_k \quad (5.14)$$

$$CDK_T = \sum_k D_k \times \hat{b}_k \quad (5.15)$$

$$CVK_T = -\sum_k \dot{\hat{e}}_k \cdot D_k \times \hat{b}_k \quad (5.16)$$

$$RRT = I \cdot \dot{\omega} - \sum_j T_j - Tmol \quad (5.17)$$

A fórmula matricial do sistema de $6 \cdot nt$ equações é:

$$\begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ nt \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \begin{matrix} {}^1CBK_F & {}^1CDK_F & {}^1CVK_F \\ {}^1CBK_T & {}^1CDK_T & {}^1CVK_T \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{matrix} \\ \underbrace{\begin{matrix} {}^{nt}CBK_F & {}^{nt}CDK_F & {}^{nt}CVK_F \\ {}^{nt}CBK_T & {}^{nt}CDK_T & {}^{nt}CVK_T \end{matrix}}_{MKV_{CV}} \end{matrix} \right\} \begin{pmatrix} k_{KV_K} \\ k_{KV_K} \cdot l_K \\ c_{KV_K} \end{pmatrix} = \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ nt \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} {}^1RRF \\ {}^1RRT \\ \vdots \\ {}^{nt}RRF \\ {}^{nt}RRT \end{matrix} \right\} \quad (5.18)$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{RKV_{CV}}$

Seja:

$$\begin{pmatrix} k_{KV_K} \\ k_{KV_K} \cdot l_K \\ c_{KV_K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_{K_1} \\ N_{K_2} \\ N_{K_3} \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

Como há mais equações que incógnitas, se utiliza a matriz pseudo-inversa para obter:

$$\boxed{(N_{K_1} \quad N_{K_2} \quad N_{K_3})^T = (MKV_{CV}^T \cdot MKV_{CV})^{-1} \cdot MKV_{CV}^T \cdot RKV_{CV}} \quad (5.20)$$

Obtêm-se os últimos três parâmetros:

$$k_{kv_K} = N_{K_1} \quad (5.21)$$

$$l_K = \frac{N_{K_2}}{N_{K_1}} \quad (5.22)$$

$$c_{kv_K} = N_{K_3} \quad (5.23)$$

5.5. Resultados da calibração

A calibração é feita para o modelo KV no intervalo de tempo quando os capacitores são desligados em consequência a calibração é só para o músculo no estado natural (sem tensão elétrica). A Figura 82 mostra, para cada experimento descrito na tabela 4, na parte esquerda a constante da mola central K em N/mm, no centro, a rigidez por unidade de comprimento $\rho k_o = \frac{k_{kv_j}}{\Delta\theta \cdot Rbase}$ e por último na direita a constante de amortecimento por unidade de comprimento $\rho c_o = \frac{c_{kv_j}}{\Delta\theta \cdot Rbase}$ onde $\Delta\theta$ é o ângulo de uma volta dividido entre o numero de partições do músculo, e $Rbase$ é o radio das bases.

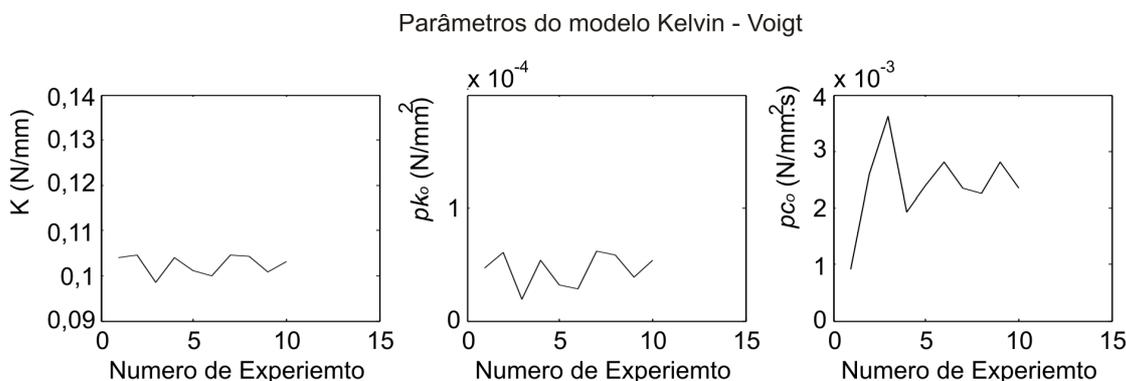


Figura 82: Parâmetros calculados nos dez experimentos.

Para K os valores são muito parecidos para ρk_o e ρc_o é muito oscilatório, mas todos estes valores geram resultados similares na hora do calculo dos ângulos de rotação.

A Figura 83 mostra o experimento dez com ajuste feito para o modelo KV com parâmetros $\rho k_o = 0,1 \times 10^{-4} \frac{N}{mm^2}$, $\rho c_o = 2,5 \times 10^{-3} \frac{N \times s}{mm^2}$ e $K = 0,1 \frac{N}{mm}$ da mola central. Pode-se apreciar um bom desempenho nos ângulos.

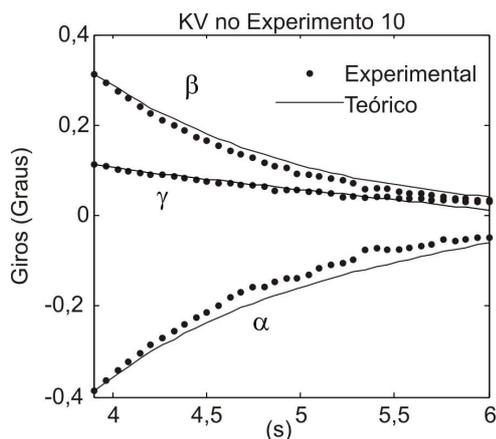


Figura 83: Ajuste para o modelo KV.

5.6. Validação

Para validar a calibração se usa um experimento para calcular os parâmetros. Estes parâmetros devem mostrar bom desempenho nos outros experimentos. Usaram-se os parâmetros obtidos a partir do experimento 10:

$$\rho k_o = 0,1 \times 10^{-4} \frac{N}{mm^2} \quad (5.24)$$

$$\rho c_o = 2,5 \times 10^{-3} \frac{N \times s}{mm^2} \quad (5.25)$$

$$K = 0,1 \frac{N}{mm} \quad (5.26)$$

Usaram-se os parâmetros calibrados com o experimento dez para calcular os as curvas do experimento oito. Os resultados apresentados na Figura 84 mostram bom desempenho nos ângulos.

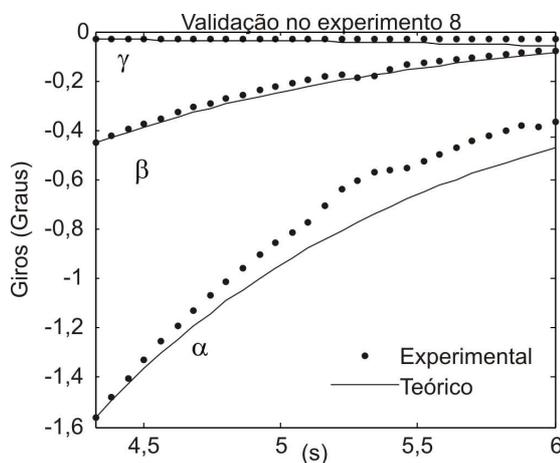


Figura 84: Resultados do experimento oito para a validação.

Agora se calcula as curvas correspondentes ao experimento onze. A Figura 85 mostra que os cálculos teóricos para ângulos fazem bom seguimento aos experimentais.

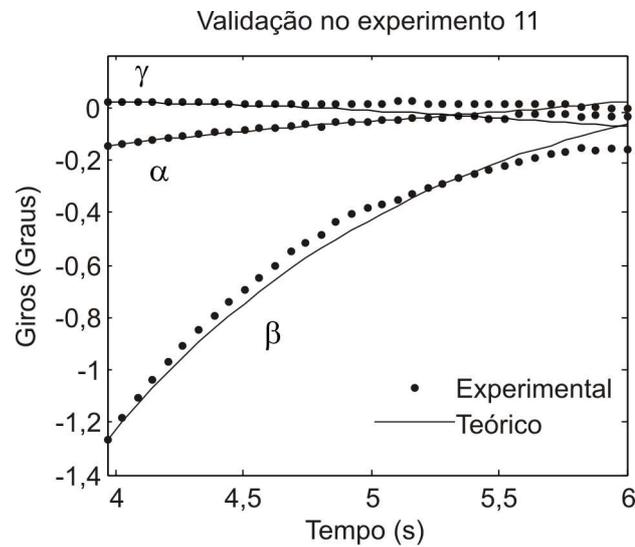


Figura 85: Resultados do experimento onze para a validação.

As três figuras anteriores mostram boa validação nos ângulos e regular nas posições. Então este modelo é útil em aplicações que implicam rotações. Os modelos de Zener, KV+A e Burgers, ao possuir mais parâmetros, são mais flexíveis ao ajuste, em consequência representam melhor o atuador.

6 CONCLUSÕES

O modelo matemático mais simples baseado em molas e amortecedores foi eficiente, especialmente na parte angular. Foi considerada a mesma configuração de molas e amortecedores quando o tensionamento cresce e decresce, então, considerando outra configuração no decrescimento, melhoraria o modelo matemático ou no pior dos casos seria igual. Um melhor modelo matemático da mola também melhoraria a modelagem matemática do atuador.

O fato de ter pré-tensionado (numa dimensão) ao músculo simplifica enormemente a análise dinâmica. O pré-tensionado em duas dimensões não garante a validade dos modelos matemáticos estudados neste trabalho.

O método de Newmark-Beta, apesar de precisar resolução de sistema de equações não lineares, mostrou rapidez na hora do cálculo. Newmark-Beta combinado com Newton Raphson oferecem bom desempenho, mas, apresentam problemas em pontos de singularidade. Análises da dinâmica com números quaternios forneceriam a método de solução, pois os números quaternios não apresentam pontos de singularidade.

Um fato (obtido experimentalmente), que beneficiaria a análise dinâmica, é que as orientações das partições do músculo são quase iguais.

Programar um método de visão estéreo possui um alto custo computacional, não obstante, não interfere fisicamente no atuador (não há contacto). O reconhecimento de arestas nas imagens utiliza um erro para o ajuste de cada aresta, sem embargo, se utilizaria um erro global o algoritmo apresentaria maior eficiência. A medição com uma câmera é possível, mas, é preciso desenvolver algoritmos para melhorar sua precisão.

A calibração não linear do atuador segundo Kelvin-Voigt foi eficiente, além disso, seus parâmetros servem como pontos iniciais para a calibração do atuador baseado em outros modelos matemáticos, por que, outros modelos precisam métodos não lineares para calcular seus parâmetros.

A variação da posição e rotação do corpo de massa grande é exponencial, o que quer dizer que a velocidade é grande, como o que se conclui que a potência do atuador é grande também. Como o atuador precisa de circuitos eletrônicos para seu funcionamento, parte da potência é perdido pelo efeito Joule.

Uma boa aplicação para este atuador seria implementar um sistema de visão parecida ao olho humano. O olho humano percebe uma imagem, usa os músculos para centrar a imagem e faz uma melhor captura, importando más o movimento angular que o translacional. A rapidez do músculo artificial e a capacidade de mover objetos pesados fazem possível o desenvolvimento de sistemas de visão artificial. Projetos como reconhecimento da íris apresentam problemas de centrado da imagem, então, uma aplicação de um sistema de visão artificial pode centrar a imagem movendo rapidamente a câmera. Sistemas de vigilância reduziram custos.

Trabalhos futuros são, além de desenvolver atuadores de configurações apresentadas neste trabalho, desenhar métodos de construção para aqueles atuadores.

Referências bibliográficas

- 1 Bar-Cohen Y. **Electroactive Polymer (EAP) Actuators as Artificial Muscles: Reality, Potential, and Challenges**. Washington: SPIE, 2004.
- 2 Wingert A. R., **Development of a Polymer-Actuated Binary Manipulator**. Submitted to the Department of the Requirements for the Degree of Master of Science in Mechanical Engineering at the Massachusetts Institute of Technology, June, 2002.
- 3 Bystronski M. **Desenvolvimento de Sistema de Atuação Linear Baseado em Músculos Artificiais Poliméricos de Efeito Capacitivo**. Submetido ao departamento de Graduação em Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica de Rio de Janeiro, como requisito para a obtenção do título em Engenharia Mecânica, dezembro, 2005.
- 4 Assis, Pedro F.B. **Desenvolvimento de Circuitos para Músculos Artificiais Poliméricos por Efeito Capacitivo**. Submetido ao departamento de Graduação em Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica de Rio de Janeiro, como requisito para a obtenção do título em Engenharia Mecânica, dezembro 2005.
- 5 Assis, Pedro F.B. **Caracterização de Atuadores Baseados em Músculos Artificiais Poliméricos por Efeito Capacitivo (EAP)**. Submetido ao departamento de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica de Rio de Janeiro, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica, Setembro, 2007.
- 6 Castro, J. T. P., Meggiolaro, M. A. **Fadiga - Técnicas e Práticas de Dimensionamento Estrutural sob Cargas Reais de Serviço**. Volumes I e II, Editora CreateSpace/ Amazon, Scotts Valley, CA, EUA, 2009.
- 7 Adi B. Modified Newton-Raphson Method for the Solution of Systems of Equations. **Israel Journal of Mathematics**, Haifa, February, 1965. Vol. 3, No. 2, pp. 94-98.
- 8 Newmark N.M. A method of computation for structural dynamics. **Journal of Engineering mechanics Division**, Colorado, 1959, Vol. 85 No. EM3, pp.67-94.
- 9 Forsyth D.; Ponce J. **Computer Vision - A modern approach**. New Jersey: Prentice Hall, 2003.

- 10 Otsu N. A Threshold Selection Method From Gray-level histograms. **IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics**. January, 1979, Vol. 9(1), pp. 62-67.
- 11 Gonzalez R. G.; Woods R. E. Ponce. **Digital Image Processing**. New Jersey: Prentice Hall, 2002.
- 12 INDUSTRIAL LIGHT & MAGIC. **Fast Normalized Cross-Correlation..** California, 1995.
- 13 Gang X.; Yuki I.; Hirohisa T. Determining Camera Intrinsic and Extrinsic Parameters from Multiple Images of Multiple Balls. **Journal IEICE Transactions on Information and Systems, Pt.2 (Japanese Edition)**, Tokyo, 2004, VOL.J87-D-2, No. 5, pp. 1071-1082.
- 14 Christoph M. Hackl, Hong-Yue Tang. A Multidomain Model of Planar Electro-Active Polymer Actuators. **Journal IEEE transactions on industry applications, IEEE**, New York, September, 2005, vol. 41, n^o5, pp. 1142-1148.
- 15 PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO. Departamento de Engenharia Mecânica. **Raciocinando Dinâmica De Rotação**. Rio de Janeiro, 2008.
- 16 Meriam J. L; Kraige L. G., **Engineering mechanics, Dynamics**. New Jersey: John Wiley & Sons, 2001.
- 17 NATIONAL UNIVERSITY OF IRELAND GALWAY. Department of Electronic Engineering. **Materials and Technologies for Artificial Muscle: A Review for the Mechatronic**, Ireland, 2004.
- 18 Hirai S.; Cusin P.; Tanigawa H.; Masui T. ;Konishi S.; Kawamura S. Qualitative Synthesis of Deformable Cylindrical Actuators through Constraint. **Intelligent Robots and Systems, 2000. (IROS 2000). Proceedings. 2000 IEEE/RSJ International Conference on**, Takamatsu, October, 2000. Vol. 1(1), pp. 197-202.
- 19 Castelman K. R. **Digital Image Processing**. New Jersey: Prentice Hall, 1995.
- 20 Duda R. O.; Hart P. E.; Stork D. G. **Pattern Classification**. Wiley-Interscience, 2000.
- 21 Fukunaga K. **Introduction to Statistical Pattern Recognition**. Academic Press, 1990.
- 22 Nixon M.; Aguado A. **Feature Extraction & Image Processing**. Newnes, 2002.
- 23 L. O'Donnell. Phase-Based User-Steered Image Segmentation. **Fourth International Conference on Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention**, Utrecht, October 2000. Vol. 2208, pp. 1022-1030.

- 24 Trucco E.; Verri A. **Introductory Techniques for 3-D Computer Vision**. New Jersey: Prentice Hall, 1998.
- 25 Shapiro L. G.; Stockman G. **Computer Vision**. New Jersey: Prentice Hall, 2001.
- 26 Yi M.; Soatto S.; Kosecká J.; Sastry S. **An Invitation to 3-D Vision – From Images to Geometric Models**. Springer, 2004.
- 27 Schweitzer H.; Dell J. W.; Wu F. Very Fast Template Matching. **Proceedings of the 7th European Conference on Computer Vision-Part IV**, London, 2002. Vol. 2353, pp. 358 - 372.
- 28 Shinichi Y.; Takeo K. Fast Template Matching on the Normalized Correlation by Using Multiresolution Eigenimages. **Intelligent Robots and Systems '94. 'Advanced Robotic Systems and the Real World', IROS '94. Proceedings of the IEEE/RSJ/GI International Conference on**. Munich, December 1994. Vol.3(3), pp. 2086-2093.
- 29 Sears F. W.; Zemansky M. W.; Young H. D. **Física Universitária**. Traduzido por Roberto Escalona Garcia. Mexico: Pearson, 2004.
- 30 Timoshenko S. **Resistencia de Materiales**. Traduzido por Tomas Delgado P. Madrid: Espasa-Calpe, 1957.
- 31 Kane C.; Marsden J.; Ortiz M.; West. M. Variational Integrators and the Newmark Algorithm for Conservative and Dissipative Mechanical Systems. **Inter-National Journal for Numerical Methods in Engineering**, Published Online, 13 October 2000, Vol. 49(1), pp. 1295 - 1325.

Apêndice A - Construção do Atuador

O material usado para as bases e os fixadores é a garolite, uma versão mais resistente da fenolite. Ele foi escolhido por ser um material muito leve e resistente, apesar de possuir uma espessura muito pequena. Para o atuador foi usado garolite de 0.9 mm de espessura. As medidas para as peças estão em mm e em graus sexagesimais. A Figura 86 mostra as medidas da base inferior em escala 1:1 com duas vistas em detalhe em escala 4:1 e duas seções para cada detalhe também em escala 4:1. A Figura 87 mostra as medidas da base superior em escala 1:1 com um vista em detalhe em escala 4:1 e uma seção para o detalhe também em escala 4:1. A Figura 88 mostra as medidas do anel fixador pequeno inferior em escala 1:1 com um vista em detalhe em escala 4:1 e uma seção para o detalhe também em escala 4:1. A Figura 89 mostra as medidas do anel fixador pequeno superior em escala 1:1. A Figura 90 mostra as medidas do anel fixador maior inferior em escala 1:1 com um vista em detalhe em escala 4:1 e uma seção para o detalhe também em escala 4:1. E, finalmente a Figura 91 mostra as medidas do anel fixador maior superior em escala 1:1.

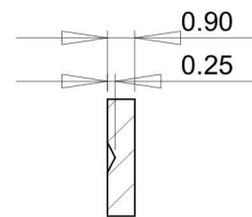
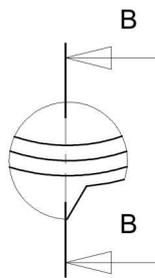
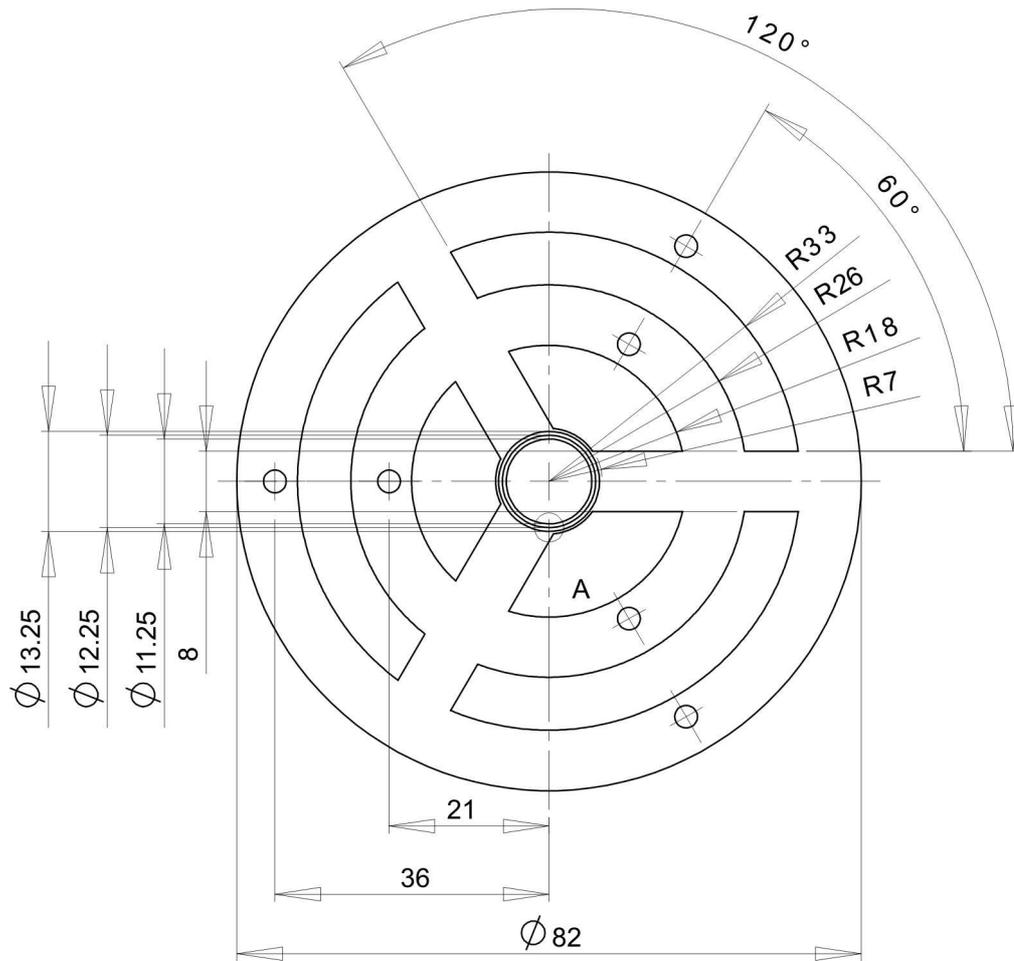


Figura 87: Medidas da base superior em escala 1:1 com uma vista em detalhe em escala 4:1 e uma seção para o detalhe também em escala 4:1.

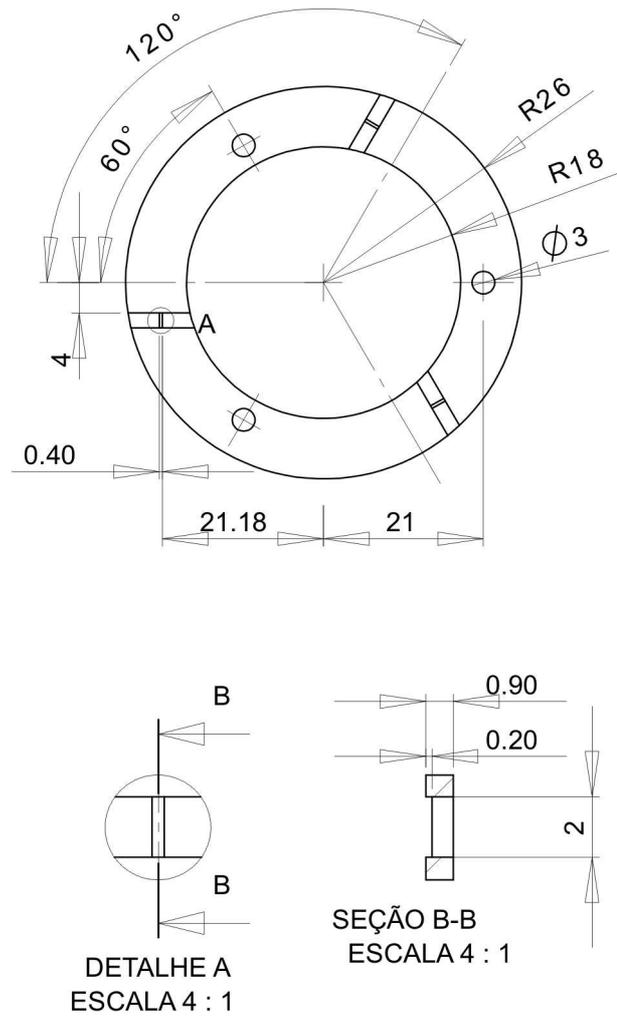


Figura 88: Medidas do anel fixador pequeno inferior em escala 1:1 com uma vista em detalhe em escala 4:1 e uma seção para o detalhe também em escala 4:1.

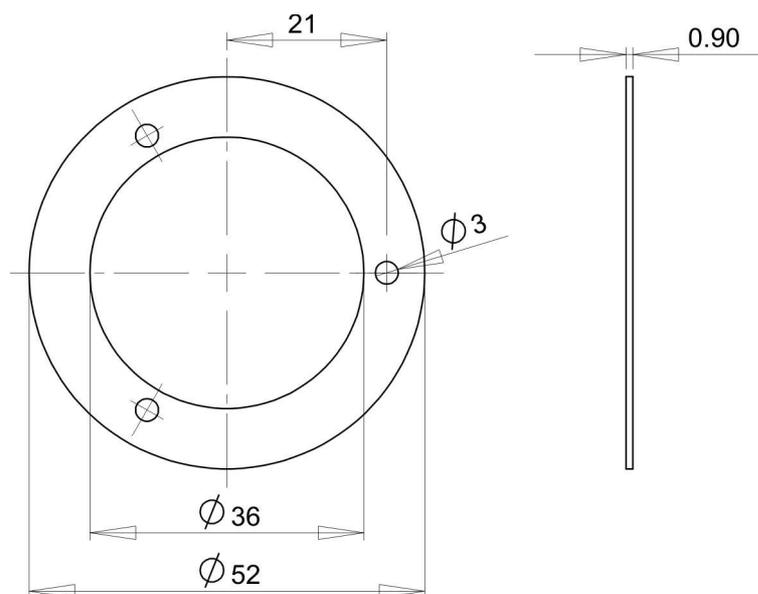


Figura 89: Medidas do anel fixador pequeno superior em escala 1:1

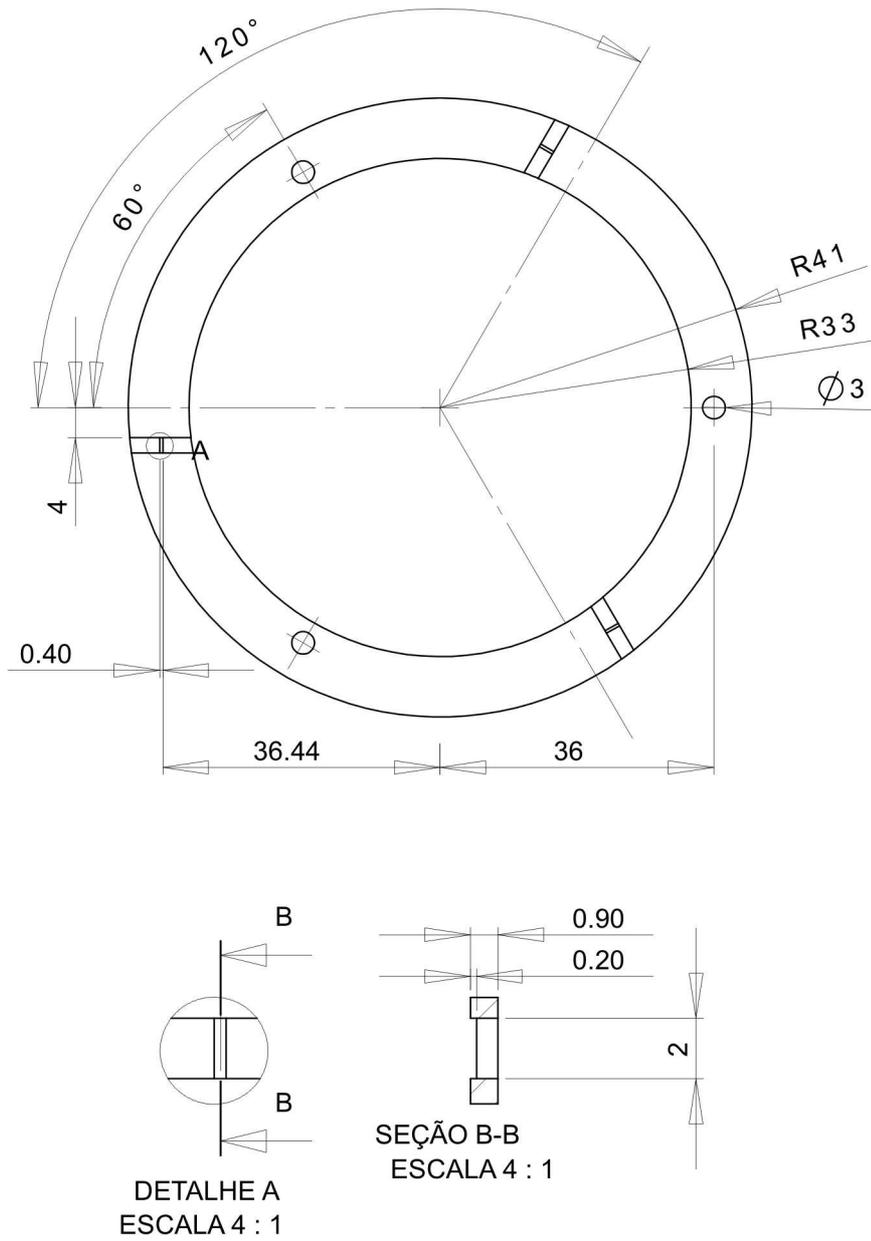


Figura 90: Medidas do anel fixador maior inferior em escala 1:1 com uma vista em detalhe em escala 4:1 e uma seção para o detalhe também em escala 4:1.

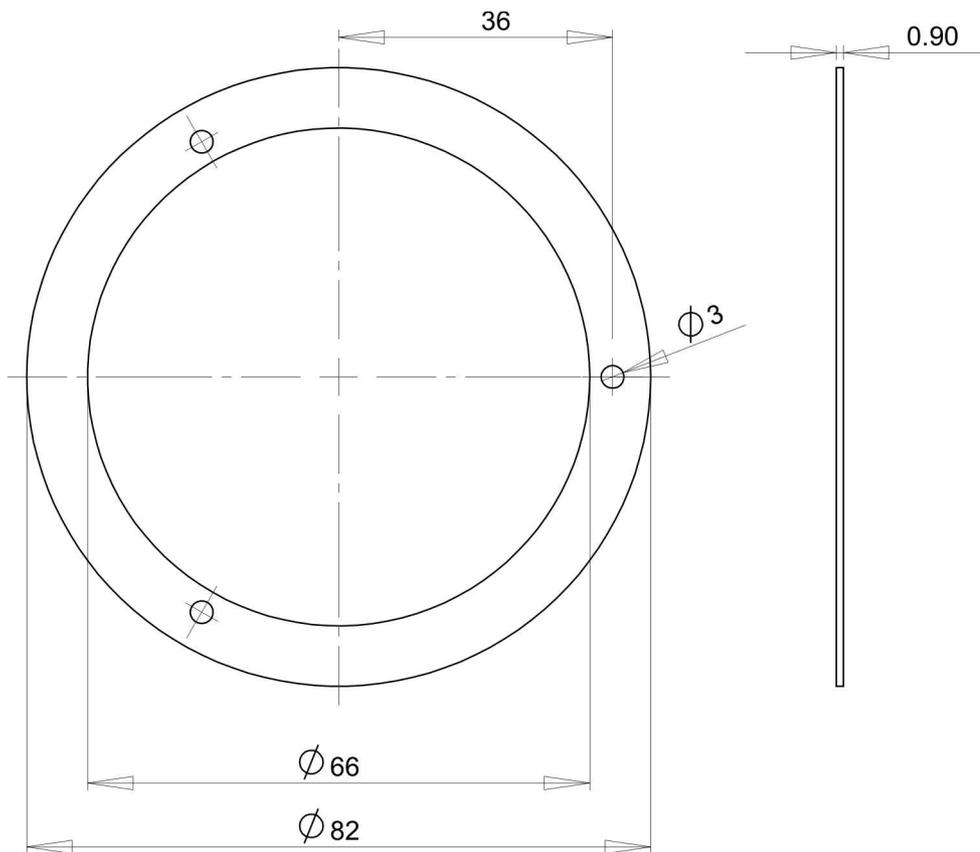


Figura 91: medidas do fixador maior superior em escala 1:1.

As seis peças de garolite são apresentadas na Figura 92. Para sua construção foram usados, principalmente, um torno e uma fresadora.



Figura 92: As seis peças de garolite.

Inicia-se a construção do atuador colocando os fixadores pequenos a 5 mm de distância. Para isto, se colocam parafusos e se prendem os fixadores de forma sua conexão fique rígida (Figura 34).



Figura 93: Anéis Fixadores separados 5 mm com ajuda de parafusos.

Rolam-se os fixadores sobre o músculo artificial para que ele seja aderido ao seu perímetro, como se observa na Figura 94a. Posicionam-se então os fios condutores de corrente elétrica que comunicam as paredes interiores com a parte interna do atuador na disposição mostrada na Figura 94b.

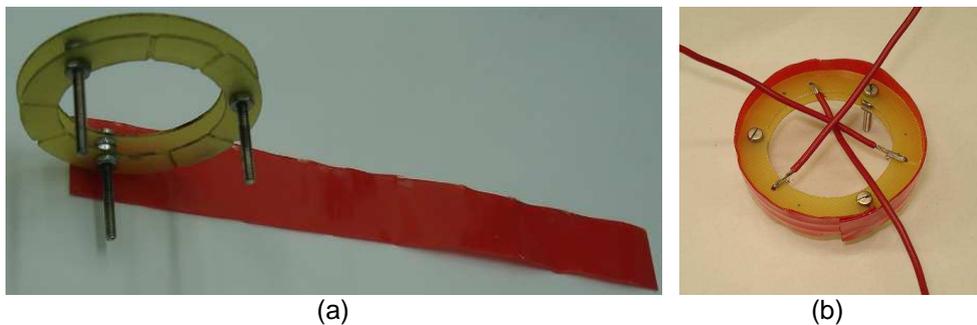


Figura 94: (a) Fixadores e músculos prontos para serem colados. (b) Fios condutores em um fixador.

O envoltório que protege o músculo auxilia seu manuseio, pois o músculo já é um adesivo. Se Corta parte da superfície para evitar acumulação de material (Figura 18a). Retiram-se o envoltório para que o músculo fique colado e pronto para ser pré-tensionado (Figura 95b).



Figura 95: (a) Superfície cortada para evitar acumulação de material. (b) Músculo colado aos fixadores, pronto para ser esticado.

Com ajuda dos parafusos estica-se o músculo em 200%, ou seja, até 15 mm de distância entre fixadores (Figura 96a). Então se usa um pincel para cobrir em três partes as paredes externas e três partes correspondentes nas paredes internas para assim formar três capacitores como mostrado na Figura 96b.

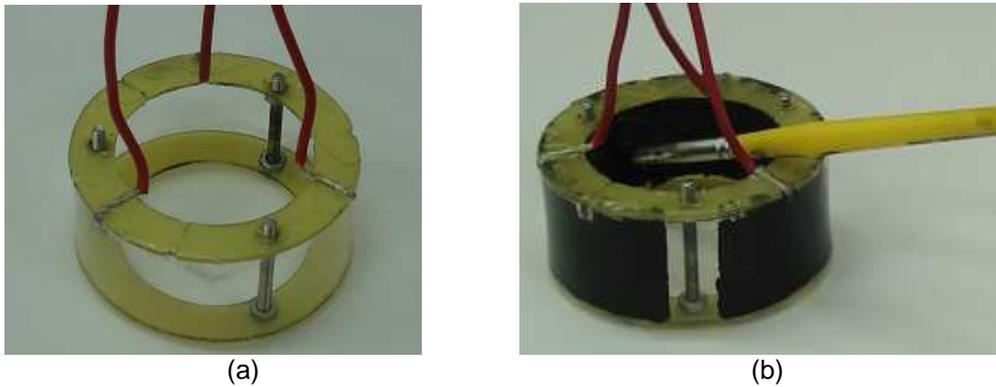


Figura 96: (a) Músculo esticado. (b) Músculo com três capacitores feitos de graxa condutora.

Com os fixadores maiores, repete-se o mesmo procedimento anterior para assim construir a camada maior, também com três capacitores. Usando os furos circulares dos fixadores e da base como guias, se prendem as duas camadas na base inferior (Figura 97) e a superior. A mola pode ser introduzida por espaços perto do centro das bases. A Figura 97b mostra o atuador totalmente construído.

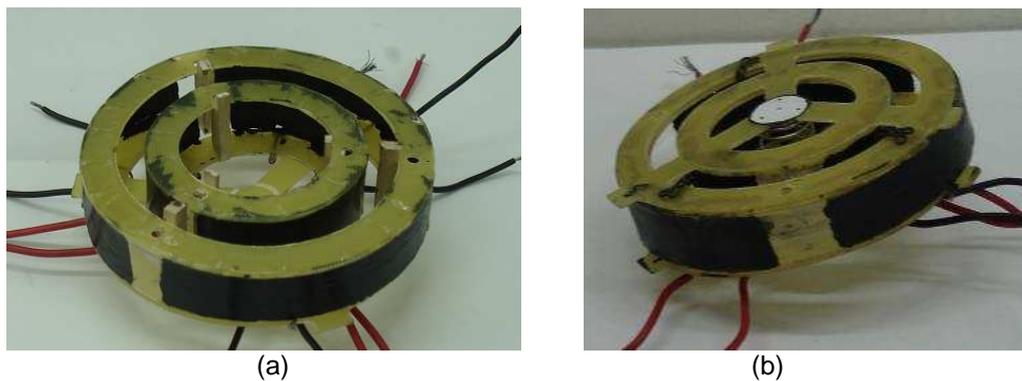


Figura 97: (a) Camadas coladas à base inferior. (b) Atuador totalmente construído.

A Figura 98 mostra um atuador com apenas a camada interna, após seu rompimento, para se ter uma idéia de como foi construída.

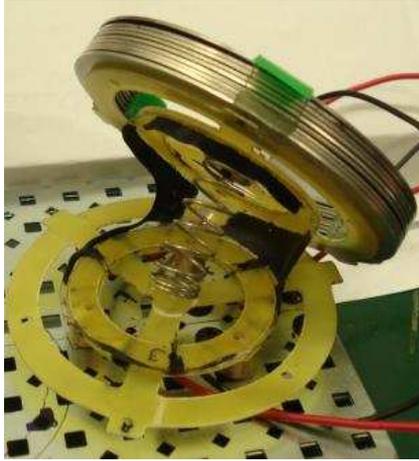


Figura 98: Atuador de uma camada ao final dos experimentos.

Apêndice B - Cálculo dos Parâmetros do Atuador para o modelo Kelvin- Voigt

Esta calibração é feita a partir da medição, a longo do tempo, das posições O_x , O_y , O_z e ângulos de rotação α , β , γ . Se consideram nt medições em intervalos de tempo Δt . O sub-índice j representa a parte do músculo onde não é possível aplicar tensão elétrica, o sub-índice k representa a parte do músculo onde é possível aplicar tensão elétrica. O sub-índice i representa a união dos dois grupos j e k . A Figura 99 mostra a carga que o atuador tem que mover (base inferior fixa) ademais mostra os sub-índices.

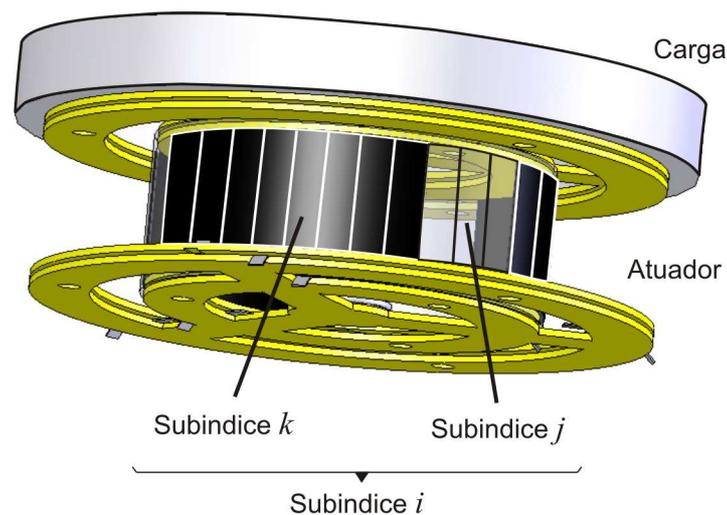


Figura 99: Sub-índice j para as partes sem tensão elétrica, k para as partes com tensão elétrica e i para todo o conjunto.

O procedimento é o seguinte.

1. Se aplica uma tensão elétrica nas paredes do músculo para assim mover a base superior do atuador e se inicia a medição dos parâmetros (ver Capítulo 4).
2. Se retira a tensão elétrica.
3. Quando a base superior fica estável terminam as medições.

4. Se tomam os dados obtidos entre os pasos 2 e 3 e se faz a calculo dos parâmetros do músculo no estado natural (sem tenção elétrica)
5. Se tomam os dados obtidos entre os pasos 1 e 2, os parâmetros calculados em 4 e se faz a calculo dos parâmetros do músculo com tenção elétrica.

O método de calibração é para o modelo Kelvin Voigt.

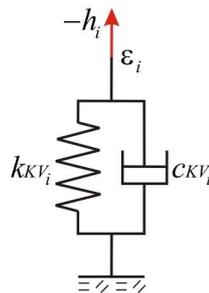


Figura 100: Modelo matemático KV.

Com equação:

$$\boxed{-k_{KV_i} \cdot \epsilon_i - c_{KV_i} \cdot \dot{\epsilon}_i = h_i} \quad (\text{B.1})$$

Os parâmetros que serão calculados são:

k_{KV_J} : Coeficiente de rigidez para o modelo KV sem tensão elétrica.

c_{KV_J} : Coeficiente de amortecimento para o modelo KV sem tensão elétrica.

K : Constante de rigidez da mola central.

k_{KV_K} : Coeficiente de rigidez para o modelo KV com tensão elétrica.

c_{KV_K} : Coeficiente de amortecimento para o modelo KV com tensão elétrica.

l_K : comprimento natural para o modelo KV com tensão elétrica

Primeiro se faz a calibração do músculo no estado natural (sem tensão elétrica nas suas paredes). Os parâmetros neste estado são K , k_{KV_J} e c_{KV_J} , que são calculados a partir de α , β , γ , O_x , O_y e O_z obtidos nos experimentos.

O análise inicia da equação de forças do atuador (descrito no Capítulo 2)

$$\sum_{i=1}^n f_i + F_{mol} + F_g = m \cdot \ddot{C}g \quad (\text{B.2})$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^n f_i + F_{mol} = m \cdot \ddot{C}g - Fg} \quad (B.3)$$

Analisa-se a somatória de forças f_i sabendo que $f_i = h_i \cdot \hat{b}_i$:

$$\sum_i f_i = \sum_i h_i \cdot \hat{b}_i \quad (B.4)$$

Substitui-se a força h_i segundo o modelo KV:

$$\sum_i f_i = \sum_i (-k_{KV_i} \cdot \varepsilon_i - c_{KV_i} \cdot \dot{\varepsilon}_i) \cdot \hat{b}_i \quad (B.5)$$

$$\sum_i f_i = -\sum_i k_{KV_i} \cdot \varepsilon_i \cdot \hat{b}_i - \sum_i c_{KV_i} \cdot \dot{\varepsilon}_i \cdot \hat{b}_i \quad (B.6)$$

$$\sum_i f_i = -k_{KV_I} \cdot \sum_i \varepsilon_i \cdot \hat{b}_i - c_{KV_I} \cdot \sum_i \dot{\varepsilon}_i \cdot \hat{b}_i \quad (B.7)$$

Por comodidade Definem-se:

$$CEI_F = -\sum_i \varepsilon_i \cdot \hat{b}_i \quad (B.8)$$

$$CVI_F = -\sum_i \dot{\varepsilon}_i \cdot \hat{b}_i \quad (B.9)$$

Por tanto a equação da somatória de forças no músculo é:

$$\boxed{\sum_i f_i = k_{KV_I} \cdot CEI_F + c_{KV_I} \cdot CVI_F} \quad (B.10)$$

Agora se lembra a força na mola central:

$$F_{mol} = -K \cdot (\|O\| - L) \cdot \hat{o} \quad (B.11)$$

Define-se:

$$CT_F = -(\|O\| - L) \cdot \hat{o} \quad (B.12)$$

Então a força na mola central é:

$$\boxed{F_{mol} = K \cdot CT_F} \quad (B.13)$$

Substituindo (B.10) e (B.13) em (B.3):

$$k_{KV_I} \cdot CEI_F + c_{KV_I} \cdot CVI_F + K \cdot CT_F = m \cdot \ddot{C}g - Fg \quad (B.14)$$

Definindo:

$$RF = m \cdot \ddot{C}g - Fg$$

então

$$\boxed{F_{mol} = K \cdot CT_F} \quad (B.15)$$

$$\boxed{k_{KV_I} \cdot CEI_F + c_{KV_I} \cdot CVI_F + K \cdot CT_F = RF} \quad (B.16)$$

Agora se analisam os torques

$$\boxed{\sum_{i=1}^n T_i + T_{mol} = I \cdot \dot{\omega}} \quad (\text{B.17})$$

A somatória de torques T_i sabendo que $T_i = D_i \times h_i \cdot \hat{b}_i$ é

$$\sum_i T_i = \sum_i D_i \times f_i \quad (\text{B.18})$$

$$\sum_i T_i = \sum_i D_i \times h_i \cdot \hat{b}_i \quad (\text{B.19})$$

$$\sum_i T_i = \sum_i h_i \cdot D_i \times \hat{b}_i \quad (\text{B.20})$$

Substitui-se a força h_i segundo o modelo KV:

$$\sum_i T_i = \sum_i (-k_{KV_i} \cdot \varepsilon_i - c_{KV_i} \cdot \dot{\varepsilon}_i) \cdot D_i \times \hat{b}_i \quad (\text{B.21})$$

$$\sum_i T_i = -\sum_i k_{KV_i} \cdot \varepsilon_i \cdot D_i \times \hat{b}_i - \sum_i c_{KV_i} \cdot \dot{\varepsilon}_i \cdot D_i \times \hat{b}_i \quad (\text{B.22})$$

$$\sum_i T_i = -k_{KV_I} \cdot \sum_i \varepsilon_i \cdot D_i \times \hat{b}_i - c_{KV_I} \cdot \sum_i \dot{\varepsilon}_i \cdot D_i \times \hat{b}_i \quad (\text{B.23})$$

Definem-se:

$$CEI_T = -\sum_i \varepsilon_i \cdot D_i \times \hat{b}_i \quad (\text{B.24})$$

$$CVI_T = -\sum_i \dot{\varepsilon}_i \cdot D_i \times \hat{b}_i \quad (\text{B.25})$$

Por tanto a equação da somatória de torques segundo o modelo KV é:

$$\boxed{\sum_i T_i = k_{KV_I} \cdot CEI_T + c_{KV_I} \cdot CVI_T} \quad (\text{B.26})$$

Lembra-se o torque gerado pela força da mola central:

$$T_{mol} = -A \cdot d \times (-K \cdot (\|O\| - L) \cdot \hat{o}) \quad (\text{B.27})$$

Ordena-se:

$$T_{mol} = K \cdot (A \cdot d \times (\|O\| - L) \cdot \hat{o}) \quad (\text{B.28})$$

Definem-se:

$$CT_T = A \cdot d \times (\|O\| - L) \cdot \hat{o} \quad (\text{B.29})$$

Então o torque que e gerado pela força da mola central:

$$\boxed{T_{mol} = K \cdot CT_T} \quad (\text{B.30})$$

Substituindo (B.26) e (B.30) em (B.17):

$$k_{KV_I} \cdot CEI_T + c_{KV_I} \cdot CVI_T + K \cdot CT_T = I \cdot \dot{\omega} \quad (B.31)$$

Definindo-se

$$RT = I \cdot \dot{\omega} \quad (B.32)$$

obtem-se

$$\boxed{k_{KV_I} \cdot CEI_T + c_{KV_I} \cdot CVI_T + K \cdot CT_T = RT} \quad (B.33)$$

Se Constrói o sistema de equações a partir das equações (B.16) e (B.33) para as nt medições.

$$\begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ nt \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \begin{matrix} {}^1CEI_F & {}^1CVI_F & {}^1CT_F \\ {}^1CEI_T & {}^1CVI_T & {}^1CT_T \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ {}^{nt}CEI_F & {}^{nt}CVI_F & {}^{nt}CT_F \\ {}^{nt}CEI_T & {}^{nt}CVI_T & {}^{nt}CT_T \end{matrix} \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{MKV_{SV}} \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \left(\begin{matrix} k_{KV_I} \\ c_{KV_I} \\ K \end{matrix} \right) \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ nt \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \begin{matrix} {}^1RF \\ {}^1RT \\ \vdots \\ {}^{nt}RF \\ {}^{nt}RT \end{matrix} \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{RKV_{SV}} \end{matrix} \right\} \quad (B.34)$$

Como há mais equações que incógnitas se usa a matriz pseudo-inversa para obter os primeiro quatro parâmetros:

$$\boxed{\left(k_{KV_I} \quad c_{KV_I} \quad K \right)^T = \left(MKV_{SV}^T \cdot MKV_{SV} \right)^{-1} \cdot MKV_{SV}^T \cdot RKV_{SV}} \quad (B.35)$$

Depois de calcular estes três primeiros parâmetros, se faz o cálculo dos três restantes que correspondem ao músculo com tensão elétrica nas suas paredes. Estes parâmetros são k_{KV_K} , c_{KV_K} e l_K , que são calculados a partir de α , β , γ , Ox , Oy , Oz , K , k_{KV_J} e c_{KV_J} .

Da equação de forças do atuador:

$$\sum_{i=1}^n f_i + Fmol + Fg = m \cdot \ddot{C}g \quad (B.36)$$

Separam-se as forças do músculo em duas somatórias:

$$\sum_j f_j + \sum_k f_k + Fmol + Fg = m \cdot \ddot{C}g \quad (B.37)$$

$$\sum_k f_k = m \cdot \ddot{C}g - \sum_j f_j - Fg - Fmol \quad (B.38)$$

Analisa-se a somatória de forças f_k sabendo que $f_k = h_k \cdot \hat{b}_k$:

$$\sum_k f_k = \sum_k h_k \cdot \hat{b}_k \quad (B.39)$$

Substitui-se a força h_k segundo o modelo KV:

$$\sum_k f_k = \sum_k (-k_{KV_k} \cdot \varepsilon_k - c_{KV_k} \cdot \dot{\varepsilon}_k) \cdot \hat{b}_k \quad (\text{B.40})$$

$$\sum_k f_k = -k_{KV_K} \cdot \sum_k \varepsilon_k \cdot \hat{b}_k - c_{KV_K} \cdot \sum_k \dot{\varepsilon}_k \cdot \hat{b}_k \quad (\text{B.41})$$

$$\sum_k f_k = -k_{KV_K} \cdot \sum_k (B_k - l_k \cdot \hat{b}_k) - c_{KV_K} \cdot \sum_k \dot{\varepsilon}_k \cdot \hat{b}_k \quad (\text{B.42})$$

$$\sum_k f_k = -k_{KV_K} \cdot \sum_k B_k + k_{KV_K} \cdot l_K \cdot \sum_k \hat{b}_k - c_{KV_K} \cdot \sum_k \dot{\varepsilon}_k \cdot \hat{b}_k \quad (\text{B.43})$$

Definem-se:

$$CBK_F = -\sum_k B_k \quad (\text{B.44})$$

$$CDK_F = \sum_k \hat{b}_k$$

$$CVK_F = -\sum_k \dot{\varepsilon}_k \cdot \hat{b}_k$$

Por tanto a equação da somatória de forças de sub-índice k segundo o modelo KV é:

$$\boxed{\sum_k f_k = k_{KV_K} \cdot CBK_F + k_{KV_K} \cdot l_K \cdot CDK_F + c_{KV_K} \cdot CVK_F} \quad (\text{B.45})$$

Substituindo (B.45) em(B.38):

$$k_{KV_K} \cdot CBK_F + k_{KV_K} \cdot l_K \cdot CDK_F + c_{KV_K} \cdot CVK_F = m \cdot \ddot{C}g - \sum_j f_j - Fg - Fmol \quad (\text{B.46})$$

Seja:

$$RRF = m \cdot \ddot{C}g - Fmol - \sum_j f_j - Fg \quad (\text{B.47})$$

Obtém-se:

$$\boxed{k_{KV_K} \cdot CBK_F + k_{KV_K} \cdot l_K \cdot CDK_F + c_{KV_K} \cdot CVK_F = RRF} \quad (\text{B.48})$$

Agora da equação de torques do atuador:

$$\sum_{i=1}^n T_i + Tmol = I \cdot \dot{\omega} \quad (\text{B.49})$$

Separam-se os torques do músculo em duas somatórias:

$$\sum_j T_j + \sum_k T_k + Tmol = I \cdot \dot{\omega} \quad (\text{B.50})$$

$$\sum_k T_k = I \cdot \dot{\omega} - \sum_j T_j - T_{mol} \quad (B.51)$$

Analisa-se a somatória de torques T_i sabendo que $T_i = h_i \cdot D_i \times \hat{b}_i$:

$$\sum_k T_k = \sum_k h_k \cdot D_k \times \hat{b}_k \quad (B.52)$$

Substitui-se a força h_i segundo o modelo KV:

$$\sum_k T_k = \sum_k (-k_{KV_k} \cdot \varepsilon_k - c_{KV_k} \cdot \dot{\varepsilon}_k) \cdot D_k \times \hat{b}_k \quad (B.53)$$

$$\sum_k T_k = -k_{KV_K} \cdot \sum_k \varepsilon_k \cdot D_k \times \hat{b}_k - c_{KV_K} \cdot \sum_k \dot{\varepsilon}_k \cdot D_k \times \hat{b}_k \quad (B.54)$$

Definem-se:

$$CBK_T = -\sum_k D_k \times B_k \quad (B.55)$$

$$CDK_T = \sum_k D_k \times \hat{b}_k \quad (B.56)$$

$$CVK_T = -\sum_k \dot{\varepsilon}_k \cdot D_k \times \hat{b}_k \quad (B.57)$$

Por tanto a equação da somatória de torques de sub-índice k segundo o modelo KV é:

$$\boxed{\sum_k T_k = k_{KV_K} \cdot CBK + k_{KV_K} \cdot l_K \cdot CDK + c_{KV_K} \cdot CVK} \quad (B.58)$$

Substituindo (B.58) em (B.51):

$$k_{KV_K} \cdot CBK + k_{KV_K} \cdot l_K \cdot CDK + c_{KV_K} \cdot CVK = I \cdot \dot{\omega} - \sum_j T_j - T_{mol} \quad (B.59)$$

Definindo-se

$$RRT = I \cdot \dot{\omega} - \sum_j T_j - T_{mol} \quad (B.60)$$

obtem-se

$$\boxed{k_{KV_K} \cdot CBK + k_{KV_K} \cdot l_K \cdot CDK + c_{KV_K} \cdot CVK = RRT} \quad (B.61)$$

Construí-se o sistema de equações a partir das equações (B.48) e (B.61) para as nt medições:

$$\begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ nt \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} {}^1CBK_F & {}^1CDK_F & {}^1CVK_F \\ {}^1CBK_T & {}^1CDK_T & {}^1CVK_T \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ {}^mCBK_F & {}^mCDK_F & {}^mCVK_F \\ {}^mCBK_T & {}^mCDK_T & {}^mCVK_T \end{matrix} \right\} \begin{matrix} k_{KV_K} \\ k_{KV_K} \cdot l_K \\ c_{KV_K} \end{matrix} = \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ nt \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} {}^1RRF \\ {}^1RRT \\ \vdots \\ {}^mRRF \\ {}^mRRT \end{matrix} \right\} \quad (B.62)$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{MKV_{CV}} \qquad \qquad \qquad \underbrace{\hspace{15em}}_{RKV_{CV}}$

Seja:

$$\begin{pmatrix} k_{KV_K} \\ k_{KV_K} \cdot l_K \\ c_{KV_K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_{K_1} \\ N_{K_2} \\ N_{K_3} \end{pmatrix} \quad (B.63)$$

Como há mais equações que incógnitas se utiliza a matriz pseudo-inversa para obter:

$$\boxed{(N_{K_1} \ N_{K_2} \ N_{K_3})^T = (MKV_{CV}^T \cdot MKV_{CV})^{-1} \cdot MKV_{CV}^T \cdot RKV_{CV}} \quad (B.64)$$

Obtêm-se os últimos três parâmetros:

$$k_{KV_K} = N_{K_1} \quad (B.65)$$

$$l_K = \frac{N_{K_2}}{N_{K_1}} \quad (B.66)$$

$$c_{KV_K} = N_{K_3} \quad (B.67)$$

Apêndice C - Relações entre a Matriz de Rotação e a Velocidade Angular

Nesta seção, são apresentadas equações entre a matriz de rotação, a velocidade angular, e as derivadas destas.

Para um sistema de coordenadas que esta girando, a matriz de rotação A e os vetores unitários $\hat{i} = (\hat{i}_x \ \hat{i}_y \ \hat{i}_z)^T$, $\hat{j} = (\hat{j}_x \ \hat{j}_y \ \hat{j}_z)^T$ e $\hat{k} = (\hat{k}_x \ \hat{k}_y \ \hat{k}_z)^T$ correspondentes ao sistema de coordenadas, estão relacionados como segue:

$$A = \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{i}_x & \hat{j}_x & \hat{k}_x \\ \hat{i}_y & \hat{j}_y & \hat{k}_y \\ \hat{i}_z & \hat{j}_z & \hat{k}_z \end{pmatrix} \quad (C.1)$$

Um vetor unitário (fixo a um corpo que gira) multiplicado vetorialmente por a velocidade angular de dito corpo $\omega = (\omega_x \ \omega_y \ \omega_z)^T$, resulta na derivada do vetor [16]. Então, para os vetores unitários \hat{i} , \hat{j} e \hat{k} , tem-se

$$\dot{\hat{i}} = \omega \times \hat{i} \quad (C.2)$$

$$\dot{\hat{j}} = \omega \times \hat{j} \quad (C.3)$$

$$\dot{\hat{k}} = \omega \times \hat{k} \quad (C.4)$$

O produto vetorial pode ser feito mediante um produto matricial ordenando os elementos de ω numa matriz. Se $[\omega]$ é a representação matricial de ω , então

$$[\omega] = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \quad (C.5)$$

e os produtos vetoriais anteriores ficam em produtos matriciais como segue

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{i}}_x \\ \dot{\hat{i}}_y \\ \dot{\hat{i}}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{i}_x \\ \hat{i}_y \\ \hat{i}_z \end{pmatrix} \quad (C.6)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{j}}_x \\ \dot{\hat{j}}_y \\ \dot{\hat{j}}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{j}_x \\ \hat{j}_y \\ \hat{j}_z \end{pmatrix} \quad (\text{C.7})$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{k}}_x \\ \dot{\hat{k}}_y \\ \dot{\hat{k}}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{k}_x \\ \hat{k}_y \\ \hat{k}_z \end{pmatrix} \quad (\text{C.8})$$

Agrupam-se as equações acima em uma

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{i}}_x & \dot{\hat{j}}_x & \dot{\hat{k}}_x \\ \dot{\hat{i}}_y & \dot{\hat{j}}_y & \dot{\hat{k}}_y \\ \dot{\hat{i}}_z & \dot{\hat{j}}_z & \dot{\hat{k}}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{i}_x & \hat{j}_x & \hat{k}_x \\ \hat{i}_y & \hat{j}_y & \hat{k}_y \\ \hat{i}_z & \hat{j}_z & \hat{k}_z \end{pmatrix} \quad (\text{C.9})$$

Note que a primeira matriz é a derivada da matriz de rotação, a segunda matriz é a velocidade angular representada em forma matricial, e a última é a própria matriz de rotação. Desse modo, se pode ver a relação entre a velocidade angular do sistema e a matriz de rotação

$$\dot{A} = [\omega] \cdot A \quad (\text{C.10})$$

ou

$$\dot{A} \cdot A^T = [\omega] \quad (\text{C.11})$$

Apêndice D - Relações entre os Ângulos de Rotação e a Velocidade Angular

Agora se usará a equação $\dot{A} \cdot A^T = [\omega]$ descrita no Apêndice anterior para obter uma relação direta entre a velocidade angular e os ângulos de rotação usados para girar um sistema de coordenadas.

Neste trabalho se usam três rotações consecutivas (Ângulos de Cardan [15]), primeiro um ângulo α no eixo X , depois um ângulo β no eixo Y e por último um ângulo γ no eixo Z . Então para estes ângulos a matriz de rotação se calcula como

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (D.1)$$

Para os ângulos α , β e γ a equação $\dot{A} \cdot A^T = [\omega]$ pode ser escrita

$$\left(\frac{\partial A}{\partial \alpha} \dot{\alpha} + \frac{\partial A}{\partial \beta} \dot{\beta} + \frac{\partial A}{\partial \gamma} \dot{\gamma} \right) \cdot A^T = [\omega] \quad (D.2)$$

Igualando elemento por elemento, esta última equação matricial gera nove equações, das quais três são identidades, e três são iguais às três restantes. Então, das três equações restantes pode-se calcular

$$\omega_x = \dot{\alpha} + \dot{\gamma} \cdot \sin(\beta) \quad (D.3)$$

$$\omega_y = \dot{\beta} \cdot \cos(\alpha) - \dot{\gamma} \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) \quad (D.4)$$

$$\omega_z = \dot{\beta} \cdot \sin(\alpha) + \dot{\gamma} \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) \quad (D.5)$$

ou também

$$\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \cos(\beta) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \cos(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} \quad (D.6)$$

$$\text{Definindo } H = (\alpha \quad \beta \quad \gamma)^T \text{ e } W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \cos(\beta) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \cos(\beta) \end{pmatrix}$$

então as equações acima resultam em

$$\boxed{\omega = W \cdot \dot{H}} \quad (\text{D.7})$$

onde:

$$\dot{H} = (\dot{\alpha} \quad \dot{\beta} \quad \dot{\gamma})^T \quad (\text{D.8})$$

e:

$$\dot{W} = \frac{\partial W}{\partial \alpha} \cdot \dot{\alpha} + \frac{\partial W}{\partial \beta} \cdot \dot{\beta} \quad (\text{D.9})$$

Também se precisará da derivada da velocidade angular. Para isso, deriva-se a equação anterior para obter

$$\boxed{\dot{\omega} = \dot{W} \cdot \dot{H} + W \cdot \ddot{H}} \quad (\text{D.10})$$

Da equação $\dot{A} = [\omega] \cdot A$, pode-se calcular a segunda derivada referente ao tempo da matriz de rotação A

$$\boxed{\ddot{A} = [\dot{\omega}] \cdot A + [\omega] \cdot \dot{A}} \quad (\text{D.11})$$

ou também

$$\boxed{\ddot{A} = ([\dot{\omega}] + [\omega]^2) \cdot A} \quad (\text{D.12})$$

onde $[\dot{\omega}]$ é a representação matricial do vetor $\dot{\omega}$.

As matrizes A , $[\omega]$ e W facilitam muito o cálculo das derivadas de outros parâmetros.

Apêndice E - Derivadas com vetores

Nesta parte se apresenta a dedução de duas formulas que ajudam enormemente na hora do calculo da derivadas do modulo e direção de um vetor.

Seja um vetor Λ com derivada referente a tempo $\dot{\Lambda}$, modulo $m\Lambda$ e vetor unitário $\hat{\Delta} = \frac{\Lambda}{m\Lambda}$

Para o modulo de um vetor temos

$$m\Lambda^2 = \Lambda^T \cdot \Lambda \quad (\text{E.1})$$

Derivando referente ao tempo

$$2 \cdot m\Lambda \cdot m\dot{\Lambda} = \dot{\Lambda}^T \cdot \Lambda + \Lambda^T \cdot \dot{\Lambda} \quad (\text{E.2})$$

Como $\Lambda^T \cdot \dot{\Lambda}$ é um escalar então $\Lambda^T \cdot \dot{\Lambda} = \dot{\Lambda}^T \cdot \Lambda$. A equação fica como segue

$$2 \cdot m\Lambda \cdot m\dot{\Lambda} = 2 \cdot \dot{\Lambda}^T \cdot \Lambda \quad (\text{E.3})$$

$$m\dot{\Lambda} = \frac{\dot{\Lambda}^T \cdot \Lambda}{m\Lambda} \quad (\text{E.4})$$

Então a derivada do modulo de um vetor e igual à transposta da derivada de dito vetor multiplicado por seu vetor unitário

$$\boxed{m\dot{\Lambda} = \dot{\Lambda}^T \cdot \hat{\Delta}} \quad (\text{E.5})$$

Agora para calcular a derivada do vetor unitário se parte da equação:

$$\hat{\Delta} = \frac{\Lambda}{m\Lambda} \quad (\text{E.6})$$

deriva-se a equação anterior

$$\dot{\hat{\Delta}} = \frac{\dot{\Lambda}}{m\Lambda} - \frac{\Lambda}{m\Lambda^2} \cdot m\dot{\Lambda} \quad (\text{E.7})$$

$$\dot{\hat{\Delta}} = \frac{\dot{\Lambda}}{m\Lambda} - \frac{m\dot{\Lambda}}{m\Lambda} \cdot \hat{\Delta} \quad (\text{E.8})$$

$$\dot{\hat{\Delta}} = \frac{\dot{\Lambda} - m\dot{\Lambda} \cdot \hat{\Delta}}{m\Lambda} \quad (\text{E.9})$$

Por tanto a derivada de um vetor unitário referente ao tempo é

$$\boxed{\dot{\hat{\Delta}} = \frac{\dot{\Lambda} - (\dot{\Lambda}^T \cdot \hat{\Delta}) \cdot \hat{\Delta}}{m\Lambda}} \quad (\text{E.10})$$

Apêndice F - Ajuste por mínimos quadrados de um plano

Seja equação do plano:

$$f_{plano}(x, y, z) = a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0 \quad (\text{F.1})$$

O vetor $D = [a \cdot \lambda \quad b \cdot \lambda \quad c \cdot \lambda]^T$ parte de (x_i, y_i, z_i) ao ponto mais perto dele e que pertence ao plano. Então:

$$x = x_i + a \cdot \lambda \quad (\text{F.2})$$

$$y = y_i + b \cdot \lambda \quad (\text{F.3})$$

$$z = z_i + c \cdot \lambda \quad (\text{F.4})$$

Substituindo na equação do plano

$$a \cdot (x_i + a \cdot \lambda) + b \cdot (y_i + b \cdot \lambda) + c \cdot (z_i + c \cdot \lambda) + d = 0 \quad (\text{F.5})$$

$$a \cdot x_i + a^2 \cdot \lambda + b \cdot y_i + b^2 \cdot \lambda + c \cdot z_i + c^2 \cdot \lambda + d = 0 \quad (\text{F.6})$$

$$a \cdot x_i + b \cdot y_i + c \cdot z_i + d + a^2 \cdot \lambda + b^2 \cdot \lambda + c^2 \cdot \lambda = 0 \quad (\text{F.7})$$

$$\lambda = \frac{a \cdot x_i + b \cdot y_i + c \cdot z_i + d}{a^2 + b^2 + c^2} \quad (\text{F.8})$$

A distância se calcula como o modulo do vetor D

$$D_{plano} = |\lambda| \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \quad (\text{F.9})$$

Substituindo (F.8) em (F.9) a distância de um ponto (x_i, y_i, z_i) ao plano é:

$$D_{plano} = \frac{|a \cdot x_i + b \cdot y_i + c \cdot z_i + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad (\text{F.10})$$

Agora para ajustar um plano para vários pontos. Se precisa minimizar $\sum D_{plano_i}^2$. Para isso se utiliza o multiplicador de Lagrange, com restrição $a^2 + b^2 + c^2 - 1 = 0$ e se cria a função:

$$Fp = \sum D_{plano_i}^2 - \lambda \cdot (a^2 + b^2 + c^2 - 1) \quad (\text{F.11})$$

$$Fp = \sum (a \cdot x_i + b \cdot y_i + c \cdot z_i + d)^2 - \lambda \cdot (a^2 + b^2 + c^2 - 1) \quad (\text{F.12})$$

Onde $i = 1, 2, 3, \dots, Np$ e Np é o numero de pontos.

Deriva-se com referência a variável a :

$$\frac{\partial Fp}{\partial a} = 2 \cdot \sum (a \cdot x_i + b \cdot y_i + c \cdot z_i + d) \cdot x_i - 2 \cdot \lambda \cdot a = 0 \quad (\text{F.13})$$

$$\frac{\partial Fp}{\partial a} = 2 \cdot \left[a \cdot \sum x_i^2 + b \cdot \sum x_i \cdot y_i + c \cdot \sum x_i \cdot z_i + d \cdot \sum x_i \right] - 2 \cdot \lambda \cdot a = 0 \quad (\text{F.14})$$

Deriva-se com referência a variável b :

$$\frac{\partial Fp}{\partial b} = 2 \cdot \sum (a \cdot x_i + b \cdot y_i + c \cdot z_i + d) \cdot y_i - 2 \cdot \lambda \cdot b = 0 \quad (\text{F.15})$$

$$\frac{\partial Fp}{\partial b} = 2 \cdot \left[a \cdot \sum x_i \cdot y_i + b \cdot \sum y_i^2 + c \cdot \sum y_i \cdot z_i + d \cdot \sum y_i \right] - 2 \cdot \lambda \cdot b = 0 \quad (\text{F.16})$$

Deriva-se com referência a variável c :

$$\frac{\partial Fp}{\partial c} = 2 \cdot \sum (a \cdot x_i + b \cdot y_i + c \cdot z_i + d) \cdot z_i - 2 \cdot \lambda \cdot c = 0 \quad (\text{F.17})$$

$$\frac{\partial Fp}{\partial c} = 2 \cdot \left[a \cdot \sum x_i \cdot z_i + b \cdot \sum y_i \cdot z_i + c \cdot \sum z_i^2 + d \cdot \sum z_i \right] - 2 \cdot \lambda \cdot c = 0 \quad (\text{F.18})$$

Deriva-se com referência a variável d :

$$\frac{\partial Fp}{\partial d} = 2 \cdot \sum (a \cdot x_i + b \cdot y_i + c \cdot z_i + d) = 0 \quad (\text{F.19})$$

$$\frac{\partial Fp}{\partial d} = 2 \cdot \left[a \cdot \sum x_i + b \cdot \sum y_i + c \cdot \sum z_i + d \cdot Np \right] = 0 \quad (\text{F.20})$$

Deriva-se com referência a variável λ :

$$a^2 + b^2 + c^2 - 1 = 0 \quad (\text{F.21})$$

Das derivadas anteriores, obtêm-se o sistema de equações:

$$a \cdot \sum x_i^2 + b \cdot \sum x_i \cdot y_i + c \cdot \sum x_i \cdot z_i + d \cdot \sum x_i - \lambda \cdot a = 0 \quad (\text{F.22})$$

$$a \cdot \sum x_i \cdot y_i + b \cdot \sum y_i^2 + c \cdot \sum y_i \cdot z_i + d \cdot \sum y_i - \lambda \cdot b = 0 \quad (\text{F.23})$$

$$a \cdot \sum x_i \cdot z_i + b \cdot \sum y_i \cdot z_i + c \cdot \sum z_i^2 + d \cdot \sum z_i - \lambda \cdot c = 0 \quad (\text{F.24})$$

$$a \cdot \sum x_i + b \cdot \sum y_i + c \cdot \sum z_i + d \cdot Np = 0 \quad (\text{F.25})$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - 1 = 0 \quad (\text{F.26})$$

$$\text{Seja } \bar{X} = \sum x_i, \quad \bar{Y} = \sum y_i, \quad \bar{Z} = \sum z_i, \quad \overline{X^2} = \sum x_i^2, \quad \overline{Y^2} = \sum y_i^2,$$

$$\overline{Z^2} = \sum z_i^2, \quad \overline{X \cdot Y} = \sum x_i \cdot y_i, \quad \overline{Y \cdot Z} = \sum y_i \cdot z_i \text{ e } \overline{Z \cdot X} = \sum z_i \cdot x_i.$$

Substituindo no sistema de cinco equações.

$$a \cdot \overline{X^2} + b \cdot \overline{X \cdot Y} + c \cdot \overline{X \cdot Z} + d \cdot \bar{X} = \lambda \cdot a \quad (\text{F.27})$$

$$a \cdot \overline{X \cdot Y} + b \cdot \overline{Y^2} + c \cdot \overline{Y \cdot Z} + d \cdot \bar{Y} = \lambda \cdot b \quad (\text{F.28})$$

$$a \cdot \overline{X \cdot Z} + b \cdot \overline{Y \cdot Z} + c \cdot \overline{Z^2} + d \cdot \bar{Z} = \lambda \cdot c \quad (\text{F.29})$$

$$a \cdot \bar{X} + b \cdot \bar{Y} + c \cdot \bar{Z} + d \cdot Np = 0 \quad (\text{F.30})$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - 1 = 0 \quad (\text{F.31})$$

Isolando d da quarta equação e substituindo nas três primeiras se obtêm o sistema de quatro equações:

$$\begin{bmatrix} \overline{X^2} - \overline{X}^2 & \overline{X \cdot Y} - \overline{X} \cdot \overline{Y} & \overline{X \cdot Z} - \overline{X} \cdot \overline{Z} \\ \overline{X \cdot Y} - \overline{X} \cdot \overline{Y} & \overline{Y^2} - \overline{Y}^2 & \overline{Y \cdot Z} - \overline{Y} \cdot \overline{Z} \\ \overline{X \cdot Z} - \overline{X} \cdot \overline{Z} & \overline{Y \cdot Z} - \overline{Y} \cdot \overline{Z} & \overline{Z^2} - \overline{Z}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad (\text{F.32})$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - 1 = 0 \quad (\text{F.33})$$

A solução corresponde ao autovalor correspondente ao menor autovalor com a restrição $a^2 + b^2 + c^2 - 1 = 0$. Finalmente se calcula d :

$$d = \frac{a \cdot \overline{X} + b \cdot \overline{Y} + c \cdot \overline{Z}}{Np} \quad (\text{F.34})$$

Apêndice G - Ajuste por mínimos quadrados de duas retas perpendiculares

Sejam as equações das retas:

$$L_1 = a \cdot x + b \cdot y + c_1 \quad (\text{G.1})$$

$$L_2 = -b \cdot x + a \cdot y + c_2 \quad (\text{G.2})$$

Seja (x_i, y_i, z_i) um ponto correspondente a reta L_1 e (x_j, y_j, z_j) um ponto correspondente a reta L_2 . As distâncias a ditas retas são:

$$D_{1_i} = \frac{|a \cdot x_i + b \cdot y_i + c_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}}; D_{2_j} = \frac{|-b \cdot x_j + a \cdot y_j + c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad (\text{G.3})$$

Quer-se minimizar $\sum D_{1_i}^2 + \sum D_{2_j}^2$. Para isso se utiliza o multiplicador de Lagrange, com restrição $a^2 + b^2 - 1 = 0$, para minimizar a função:

$$Frp = \sum D_{1_i}^2 + \sum D_{2_j}^2 - \lambda \cdot (a^2 + b^2 - 1) \quad (\text{G.4})$$

$$Frp = \sum (a \cdot x_i + b \cdot y_i + c_1)^2 + \sum (-b \cdot x_j + a \cdot y_j + c_2)^2 - \lambda \cdot (a^2 + b^2 - 1) \quad (\text{G.5})$$

onde $i = 1, 2, 3, \dots, Nrp$

Deriva-se com referência a variável a :

$$\frac{\partial Frp}{\partial a} = 2 \cdot [a \cdot \sum x_i^2 + b \cdot \sum x_i \cdot y_i + c_1 \cdot \sum x_i - b \cdot \sum x_j \cdot y_j + a \cdot \sum y_j^2 + c_2 \cdot \sum y_j] - 2 \cdot a \cdot \lambda = 0 \quad (\text{G.6})$$

Deriva-se com referência a variável b :

$$\frac{\partial Frp}{\partial b} = 2 \cdot [a \cdot \sum x_i \cdot y_i + b \cdot \sum y_i^2 + c_1 \cdot \sum y_i + b \cdot \sum x_j^2 - a \cdot \sum x_j \cdot y_j - c_2 \cdot \sum x_j] - 2 \cdot b \cdot \lambda = 0 \quad (\text{G.7})$$

Deriva-se com referência a variável c_1 :

$$\frac{\partial Frp}{\partial c_1} = 2 \cdot [a \cdot \sum x_i + b \cdot \sum y_i + c_1 \cdot Nrp] = 0 \quad (\text{G.8})$$

Deriva-se com referência a variável c_2 :

$$\frac{\partial Frp}{\partial c_2} = 2 \cdot [-b \cdot \sum x_j + a \cdot \sum y_j + c_2 \cdot Nrp] = 0 \quad (\text{G.9})$$

Deriva-se com referência a variável λ :

$$a^2 + b^2 - 1 = 0 \quad (\text{G.10})$$

$$\text{Seja } \bar{X}_I = \sum x_i, \quad \bar{Y}_I = \sum y_i, \quad \bar{Z}_I = \sum z_i, \quad \bar{X}_I^2 = \sum x_i^2, \quad \bar{Y}_I^2 = \sum y_i^2,$$

$$\bar{Z}_I^2 = \sum z_i^2, \quad \overline{XY}_I = \sum x_i \cdot y_i, \quad \overline{YZ}_I = \sum y_i \cdot z_i \text{ e } \overline{ZX}_I = \sum z_i \cdot x_i.$$

$$\text{Seja } \bar{X}_J = \sum x_j, \quad \bar{Y}_J = \sum y_j, \quad \bar{Z}_J = \sum z_j, \quad \bar{X}_J^2 = \sum x_j^2, \quad \bar{Y}_J^2 = \sum y_j^2,$$

$$\bar{Z}_J^2 = \sum z_j^2, \quad \overline{XY}_J = \sum x_j \cdot y_j, \quad \overline{YZ}_J = \sum y_j \cdot z_j \text{ e } \overline{ZX}_J = \sum z_j \cdot x_j.$$

Substituindo no sistema de cinco equações obtidas pelas derivadas parciais se obtém.

$$a \cdot \bar{X}_I^2 + b \cdot \overline{XY}_I + c_1 \cdot \bar{X}_I - b \cdot \overline{XY}_J + a \cdot \bar{Y}_J^2 + c_2 \cdot \bar{Y}_J = a \cdot \lambda \quad (\text{G.11})$$

$$a \cdot \overline{XY}_I + b \cdot \bar{Y}_I^2 + c_1 \cdot \bar{Y}_I + b \cdot \bar{X}_J^2 - a \cdot \overline{XY}_J - c_2 \cdot \bar{X}_J = b \cdot \lambda \quad (\text{G.12})$$

$$a \cdot \bar{X}_I + b \cdot \bar{Y}_I + c_1 \cdot Nrp = 0 \quad (\text{G.13})$$

$$-b \cdot \bar{X}_J + a \cdot \bar{Y}_J + c_2 \cdot Nrp = 0 \quad (\text{G.14})$$

$$a^2 + b^2 - 1 = 0 \quad (\text{G.15})$$

Isolando c_1 e c_2 da terceira e quarta equação e substituindo nas duas primeiras se obtém o sistema de três equações:

$$\begin{bmatrix} \bar{X}_I^2 - \bar{X}_I \cdot \bar{X}_I + \bar{Y}_J^2 - \bar{Y}_J \cdot \bar{Y}_J & \overline{XY}_I - \bar{X}_I \cdot \bar{Y}_I - \overline{XY}_J + \bar{X}_J \cdot \bar{Y}_J \\ \overline{XY}_I - \bar{X}_I \cdot \bar{Y}_I - \overline{XY}_J + \bar{X}_J \cdot \bar{Y}_J & \bar{Y}_I^2 - \bar{Y}_I \cdot \bar{Y}_I + \bar{X}_J^2 - \bar{X}_J \cdot \bar{X}_J \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (\text{G.16})$$

$$a^2 + b^2 - 1 = 0 \quad (\text{G.17})$$

A solução é ao autovetor correspondente ao menor autovalor com a restrição

$a^2 + b^2 - 1 = 0$. Finalmente se calculam c_1 e c_2 :

$$c_1 = \frac{a \cdot \bar{X}_I + b \cdot \bar{Y}_I}{Nrp}; c_2 = \frac{-b \cdot \bar{X}_J + a \cdot \bar{Y}_J}{Nrp}; \quad (\text{G.18})$$