



Allan Nogueira de Albuquerque

**Modelagem e simulação de uma
plataforma de Stewart controlada
usando sensores inerciais**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica do Departamento de Engenharia Mecânica da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Marco Antonio Meggiolaro

Rio de Janeiro
Agosto de 2012



Allan Nogueira de Albuquerque

**Modelagem e simulação de uma plataforma de
Stewart controlada usando sensores inerciais**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica do Departamento de Engenharia Mecânica do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Marco Antonio Meggiolaro

Orientador
Departamento de Engenharia Mecânica –
PUC-Rio

Prof. Mauro Speranza Neto

Departamento de Engenharia Mecânica –
PUC-Rio

Prof. Fernando Ribeiro da Silva

CEFET/RJ

Prof. José Eugênio Leal

Coordenador Setorial do Centro Técnico
Científico - PUC-Rio

Rio de Janeiro, 31 de Agosto de 2012

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Allan Nogueira de Albuquerque

É formado em Engenharia Mecânica pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (2009). Já atuou em inspeção veicular e na área de ensaios mecânicos no projeto de equipamentos e acessórios para ensaios e calibrações. Atualmente trabalha no desenvolvimento de veículos robóticos, atuando na concepção, testes e validação destes sistemas. Paralelamente, atua em pesquisa sobre mecanismos articulados para reprodução de movimentos.

Ficha Catalográfica

Albuquerque, Allan Nogueira de

Modelagem de simuladores de movimentos visando a aplicação de estratégias de controle não convencionais / Allan Nogueira de Albuquerque; orientador: Marco Antonio Meggiolaro. – 2012.

233 f.: il. (color.) ; 30 cm

Dissertação de Mestrado – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Mecânica, 2012.

Inclui referências bibliográficas.

1. Introdução; 2. Modelo de uma plataforma plana com três graus de liberdade; 3. Modelo de uma Plataforma Stewart; 4. Estratégias de controle; 5. Simulações para avaliação dos modelos desenvolvidos; 6. Conclusões e etapas futuras. I. Meggiolaro, Marco Antonio. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Mecânica. III. Título.

CDD:621

Dedicado à memória de meu pai.

"Como é estranho que esta única certeza e esta única comunhão não possam quase nada sobre os homens, e que haja aí nada mais distante do seu espírito que a ideia de sentir esta fraternidade da morte! Sinto-me feliz ao perceber que os homens se recusam absolutamente a querer pensar na morte. Eu gostaria muito de poder contribuir para lhes tornar o pensamento da vida ainda mil vezes mais digno de ser pensado." - Friedrich Nietzsche, em A Gaia Ciência.

Agradecimentos

Ao Prof. Marco Antonio Meggiolaro, orientador do projeto, pela amizade, pela orientação e apoio durante o desenvolvimento deste trabalho.

Ao Prof. Mauro Speranza Neto pela amizade e pelo imenso apoio técnico e didático ao longo de todo o desenvolvimento deste trabalho.

Ao CNPq e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

Aos colegas de trabalho na PUC-Rio Guilherme Pereira Mourão, pelo suporte técnico em toda parte eletrônica do projeto e Edson Gonçalves, pelo suporte na fabricação mecânica dos componentes do projeto.

Aos funcionários do Instituto Tecnológico pelo apoio técnico e administrativo e especialmente aos funcionários do Laboratório de Ensaios Mecânicos (LEM/ITUC).

Aos alunos de Pós-Graduação Marília Maurell Assad e João Luiz de Souza Ramos por toda a ajuda e companheirismo e a todos os alunos do Laboratório de Desenvolvimento de Controle (LDC/ECA).

Aos amigos e entes queridos, que de alguma forma, contribuíram para este trabalho.

À minha companheira, Juliana, e sua família por todo carinho, apoio e incentivo.

À minha mãe, Maria Eliete, e ao meu irmão Gustavo, que, além de todo o amor, me apoiaram e ajudaram nos momentos mais difíceis da vida.

Resumo

Albuquerque, Allan Nogueira; Meggiolaro, Marco Antonio (Orientador). **Modelagem e simulação de uma plataforma de Stewart controlada usando sensores inerciais.** Rio de Janeiro, 2012. 233p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Simuladores de movimentos são sistemas mecatrônicos que reproduzem as principais atitudes e movimentos de um veículo. Neste estudo serão analisados simuladores baseados em mecanismos com 3 e 6 graus de liberdade. No segundo caso, o mecanismo é capaz de reproduzir todos os ângulos de atitude (rolagem, arfagem e guinada) e todos os deslocamentos lineares (lateral, vertical e longitudinal) com limitações, porém com amplitude suficiente de modo a possibilitar os principais movimentos associados ao veículo. O uso de transdutores de deslocamento linear nestes mecanismos articulados introduzem elevados efeitos de inércia, além de aumentar a massa dos mesmos, diminuindo sua relação carga/peso e sua eficiência. Atualmente, o grande desenvolvimento de sensores do tipo unidade de medição inercial (IMU) aumentou a disponibilidade destes no mercado e reduziu muito seu custo. Como se trata de acelerômetros triaxiais em conjunto com girômetros também triaxiais, sensores como este podem ser usados para determinar a posição e a orientação no espaço de mecanismos com seis graus de liberdade, como a Plataforma Stewart. Neste trabalho será desenvolvida uma metodologia para modelagem da cinemática de mecanismos paralelos baseada nos derivativos de suas matrizes jacobianas. Esta metodologia é avaliada em um mecanismo paralelo plano de três graus de liberdade e em uma Plataforma Stewart. Com a metodologia de modelagem validada, é implementada uma estratégia de controle baseada no uso de um sensor tipo central inercial para o controle de posição, velocidade e aceleração destes mecanismos. Os resultados das simulações indicam a possibilidade do uso destes sensores nestes tipos de equipamentos e apontam para a necessidade de avaliar esta metodologia em testes experimentais.

Palavras-chave

Modelagem Analítica de Simuladores de Movimentos; Cinemáticas Inversas e Direta Analíticas de Manipuladores Paralelos; Plataforma de Stewart; Estratégias de Controle não Convencionais.

Abstract

Albuquerque, Allan Nogueira; Meggiolaro, Marco Antonio (Advisor). **Modeling and simulation of a Stewart platform controlled using inertial sensors.** Rio de Janeiro, 2012. 233p. MSc. Dissertation - Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Movement simulators are mechatronic systems that reproduce the main attitudes and movements of a vehicle. In this study are examined simulators based on 3 and 6 degrees of freedom mechanisms. In the second case, the mechanism is able to reproduce all the attitude angles (roll, pitch and yaw) and all the linear displacements (sway, heave and surge) with limitations, but with sufficient amplitude to enable the main movements associated with the vehicle. The use of linear displacement transducers in these articulated mechanisms introduce high inertia effects and increase the mass, decreasing the load/weight ratio and efficiency. Currently, the great development of the inertial central type sensors (IMU – Inertial measurement unit) increased the availability of these transducers on market and greatly reduced cost. Since this is a conjunct of triaxial accelerometers with triaxial gyrometers, sensors such as these ones can be used to determine the position and orientation in space of mechanisms with six degrees of freedom, such as the Stewart Platform. In this work it will be developed a methodology for modeling the kinematics of parallel mechanisms based on derivatives of their jacobian matrices. This methodology is evaluated in a planar parallel mechanism of three degrees of freedom and on a Stewart Platform. With the modeling methodology validated, a control strategy based on the use of an inertial unit type sensor for controlling the position, velocity and acceleration of these mechanisms is implemented. The simulations results indicate the possibility of using these sensors in these types of equipment and point to the need to evaluate this methodology in experimental tests.

Keywords

Movement Simulators Analytical Modeling; Analytical Inverse and Direct Kinematics of Parallel Manipulators; Stewart Platform; Non Conventional Control Strategies.

Sumário

Sumário das notações	22
1 Introdução	24
1.1 Objetivos	24
1.2 Motivação	24
1.3 Revisão bibliográfica	27
1.4 Organização do trabalho	32
2 Modelo de uma plataforma plana com três graus de liberdade	34
2.1 Graus de liberdade	34
2.2 Geometria inversa	38
2.3 Cinemática inversa	43
2.4 Cinemática direta	49
2.5 Condições de singularidade	54
2.6 Equilíbrio estático	58
2.6.1 Abordagem pelo Diagrama de Corpo Livre	58
2.6.2 Aplicação do Princípio do Trabalho Virtual	61
3 Modelo da Plataforma Stewart	63
3.1 Graus de liberdade	63
3.2 Geometria inversa	66
3.3 Cinemática inversa	71
3.4 Cinemática direta	77
3.5 Condições de singularidade	78
3.6 Equilíbrio estático	78
3.6.1 Abordagem pelo Diagrama de Corpo Livre	79
3.6.2 Aplicação do Princípio do Trabalho Virtual	81
4 Estratégia de controle	83
4.1 Dinâmica do sistema de atuação	84

4.2	Estratégia de controle do sistema de atuação	88
4.3	Estratégia de controle aplicada aos simuladores de movimento	93
5	Simulações para avaliação dos modelos desenvolvidos	96
5.1	Sistema de atuação	96
5.2	Plataforma plana com três graus de liberdade	103
5.2.1	Validação da geometria inversa	103
5.2.2	Validação da cinemática inversa	105
5.2.3	Validação da cinemática direta	110
5.2.4	Avaliação das condições de singularidade	115
5.2.5	Validação do modelo de equilíbrio estático	120
5.2.6	Análise das estratégias de controle	123
5.3	Plataforma Stewart	139
5.3.1	Validação da geometria Inversa	139
5.3.2	Validação da cinemática inversa	142
5.3.3	Validação da cinemática direta	146
5.3.4	Avaliação das condições de singularidade	151
5.3.5	Validação do modelo de equilíbrio estático	155
5.3.6	Análise das estratégias de controle	157
6	Conclusões e etapas futuras	169
6.1	Conclusões	169
6.2	Trabalhos em andamento e etapas futuras	170
	Referências bibliográficas	171
	Apêndice A Considerações sobre a cinemática e a dinâmica da Plataforma Stewart	175
A.1	Introdução	175
A.2	Análise da cinemática inversa	175
A.3	Soluções analíticas aproximadas da cinemática direta	179
A.4	Análise da rigidez	183
A.5	Dinâmica Inversa	187

Apêndice B Projeto e construção da Plataforma Stewart em escala	194
B.1 Introdução	194
B.2 Elementos mecânicos e transdutores	194
B.2.1 Elementos especificados	195
B.2.2 Elementos fabricados	199
B.3 Elementos pneumáticos	202
B.4 Montagem final	210
B.5 Aquisição de dados e controle	212
B.6 Calibração dos transdutores	214
B.6.1 Transdutor de deslocamento linear	215
B.6.2 Unidade de medição inercial	229
CD Anexo I Códigos usados nas simulações	230
I.1 Sistema de atuação	230
I.2 Plataforma plana com três graus de liberdade	230
I.2.1 Parâmetros (função principal)	230
I.2.2 Geometria inversa	230
I.2.3 Cinemática inversa	230
I.2.4 Cinemática direta	230
I.2.5 Análise das singularidades e controle	230
I.2.6 Gráficos e animações	230
I.2.7 Arquivos <i>Simulink</i> (.mdl)	230
I.3 Plataforma Stewart	230
I.3.1 Parâmetros (função principal)	230
I.3.2 Geometria inversa	230
I.3.3 Cinemática inversa	230
I.3.4 Cinemática direta	230
I.3.5 Análise das singularidades e controle	230
I.3.6 Gráficos e animações	230
I.3.7 Arquivos <i>Simulink</i> (.mdl)	230
CD Anexo II Controle de uma Plataforma Stewart via <i>SimMechanics</i>	231
II.1 Tutorial	231

II.2	Código usado nas simulações	231
CD Anexo III Catálogos dos elementos da Plataforma Stewart em escala		232
III.1	Componentes mecânicos	232
III.1.1	Junta universal	232
III.1.2	Junta esférica	232
III.2	Transdutores	232
III.2.1	Transdutor de deslocamento linear	232
III.2.2	Central inercial	232
III.3	Componentes pneumáticos	232
III.3.1	Atuador de dupla ação	232
III.3.2	Válvula bidirecional	232
III.3.3	Válvula proporcional	232
III.3.4	Compressor de ar	232
III.3.5	Regulador de pressão	232
III.4	Aquisição de dados e controle	232
III.4.1	NI 9476	232
III.4.2	NI 9205	232
III.4.3	NI 9264	232
CD Anexo		233

Lista de figuras

Figura 1.1: Plataforma Stewart em escala construída.	25
Figura 1.2: Simulador com dois graus de liberdade desenvolvido.	26
Figura 1.3: Simulador com seis graus de liberdade desenvolvido pela FESTO® com músculos pneumáticos.	27
Figura 1.4: Exemplos de mecanismos paralelos baseados na plataforma de Stewart. a) Simulador de voo; b) Robô montador.	28
Figura 1.5: Simulador de voo do Centro de Treinamento de Operações da Varig, no Rio de Janeiro.	29
Figura 1.6: a) Correção de fratura; b) Estrutura para ensaios biomecânicos.	29
Figura 1.7: Classificação de manipuladores paralelos de acordo com seus movimentos: a) plano; b) esférico; c) espacial.	30
Figura 1.8: Elementos de um sistema de acionamento pneumático.	31
Figura 2.1: Mecanismo paralelo plano com três graus de liberdade.	36
Figura 2.2: Mecanismo de cadeia fechada e seus parâmetros de Denavit-Hartenberg.	39
Figura 2.3: Plataforma plana com três graus de liberdade.	40
Figura 2.4: Forças e momentos que atuam na plataforma móvel do mecanismo plano.	59
Figura 3.1: Plataforma Stewart na configuração S-P-S.	64
Figura 3.2: Diagrama esquemático da Plataforma Stewart.	67
Figura 3.3: Ângulos de Euler das juntas universais.	70
Figura 3.4: Forças e momentos atuantes na Plataforma Stewart.	80
Figura 4.1: Esquema do sistema de atuação.	84
Figura 4.2: Diagrama de blocos do modelo do sistema de atuação.	85
Figura 4.3: Diagrama para simulação do sistema de atuação.	87
Figura 4.4: Sistema de atuação em malha aberta para entradas através do comando da válvula.	87
Figura 4.5: Sistema em malha aberta com saída de aceleração do modelo da válvula.	89
Figura 4.6: Entrada do tipo cossenóide.	90

Figura 4.7: Entrada em pulsos na aceleração.	91
Figura 4.8: Entrada em pulso suavizado na aceleração.	92
Figura 4.9: Sistema em malha fechada.	93
Figura 4.10: Esquema dos modelos cinemáticos da malha de controle.	94
Figura 4.11: Sistema em malha aberta com entrada dos erros no controlador.	94
Figura 4.12: Sistema em malha aberta para três atuadores.	94
Figura 4.13: Diagrama de blocos da malha de controle.	95
Figura 5.1: Diagrama de blocos do sistema de atuação em malha fechada.	98
Figura 5.2: Diagrama de blocos do sistema de atuação.	99
Figura 5.3: Deslocamento do atuador sem comando de válvula.	99
Figura 5.4: Velocidade do atuador sem comando de válvula.	100
Figura 5.5: Aceleração do atuador sem comando de válvula.	100
Figura 5.6: Deslocamento no sistema de atuação em malha fechada.	101
Figura 5.7: Velocidade no sistema de atuação em malha fechada.	102
Figura 5.8: Aceleração no sistema de atuação em malha fechada.	102
Figura 5.9: Geometria inversa da plataforma plana com três graus de liberdade.	103
Figura 5.10: Entrada usada na validação da geometria inversa.	104
Figura 5.11: a) Geometria inicial da plataforma plana com três graus de liberdade; b) Geometria da plataforma plana após 2 segundos.	104
Figura 5.12: Cinemática inversa da plataforma plana com três graus de liberdade.	105
Figura 5.13: Diagrama de blocos para validação da cinemática inversa da plataforma plana.	106
Figura 5.14: Estado inicial da plataforma plana pela cinemática inversa.	106
Figura 5.15: Estado final da plataforma plana pela cinemática inversa.	106
Figura 5.16: Obtenção das acelerações dos atuadores da plataforma plana.	107
Figura 5.17: Diagrama de blocos para obter as acelerações dos atuadores da plataforma plana.	107
Figura 5.18: Deslocamentos dos elos pela jacobiana inversa.	108
Figura 5.19: Deslocamentos dos elos pela derivada da jacobiana inversa.	108
Figura 5.20: Deslocamentos dos elos 1 e 2 pelos dois métodos.	109
Figura 5.21: Deslocamento do elo 3 pelos dois métodos.	109

Figura 5.22: Cinemática direta da plataforma plana com três graus de liberdade.	110
Figura 5.23: Diagrama de blocos para validação da cinemática direta da plataforma plana.	111
Figura 5.24: a) $z(t)$ como entrada da cinemática inversa; b) $z(t)$ como saída da cinemática direta.	111
Figura 5.25: a) $v_z(t)$ como entrada da cinemática inversa; b) $v_z(t)$ como saída da cinemática direta.	112
Figura 5.26: Obtenção das acelerações lineares e angulares da plataforma móvel.	113
Figura 5.27: Obtenção das acelerações da plataforma móvel.	113
Figura 5.28: $z(t)$ desejado e obtido pela derivada do jacobiano inverso.	114
Figura 5.29: $v_z(t)$ desejado e obtido pela derivada do jacobiano inverso.	114
Figura 5.30: Diagrama de blocos para obtenção dos números de condição.	115
Figura 5.31: Números de condição das matrizes jacobianas inversa e direta da plataforma plana.	116
Figura 5.32: Números de condição de reciprocidade das matrizes jacobianas inversa e direta da plataforma plana.	117
Figura 5.33: Números de condição de reciprocidade dos derivativos das jacobianas inversa e direta da plataforma plana.	117
Figura 5.34: Números de condição das matrizes jacobianas inversa e direta.	118
Figura 5.35: Números de condição de reciprocidade das matrizes jacobianas inversa e direta.	119
Figura 5.36: Números de condição de reciprocidade dos derivativos das jacobianas inversa e direta.	119
Figura 5.37: Equilíbrio de forças na plataforma móvel.	121
Figura 5.38: Configurações da plataforma plana para a avaliação dos carregamentos estáticos.	123
Figura 5.39: Diagrama de blocos para o sistema em malha fechada.	124
Figura 5.40: Funções de transferência da dinâmica dos atuadores.	124
Figura 5.41: Deslocamento vertical da plataforma móvel para entrada em cossenóide e ganhos iguais a 0,01.	125
Figura 5.42: Deslocamento dos atuadores para entrada em cossenóide e	

ganhos iguais a 0,01.	126
Figura 5.43: Erro de deslocamento vertical da plataforma móvel para entrada em cossenóide e ganhos iguais a 0,01.	126
Figura 5.44: Erros de deslocamento dos atuadores para entrada em cossenóide e ganhos iguais a 0,01.	127
Figura 5.45: Deslocamento vertical da plataforma móvel para entrada em cossenóide e ganhos iguais a 0,10.	127
Figura 5.46: Deslocamento dos atuadores para entrada em cossenóide e ganhos iguais a 0,10.	128
Figura 5.47: Erro de deslocamento vertical da plataforma móvel para entrada em cossenóide e ganhos iguais a 0,10.	128
Figura 5.48: Erros de deslocamento dos atuadores para entrada em cossenóide e ganhos iguais a 0,10.	129
Figura 5.49: Deslocamento vertical da plataforma móvel para entrada em cossenóide e ganhos iguais a 1,00.	129
Figura 5.50: Deslocamento dos atuadores para entrada em cossenóide e ganhos iguais a 1,00.	130
Figura 5.51: Erro de deslocamento vertical da plataforma móvel para entrada em cossenóide e ganhos iguais a 1,00.	130
Figura 5.52: Erros de deslocamento dos atuadores para entrada em cossenóide e ganhos iguais a 1,00.	131
Figura 5.53: Aceleração vertical da plataforma móvel.	132
Figura 5.54: Deslocamento vertical da plataforma móvel para entrada em pulsos e ganhos iguais a 1,00.	132
Figura 5.55: Deslocamento dos atuadores para entrada em pulsos e ganhos iguais a 1,00.	133
Figura 5.56: Erro de deslocamento vertical da plataforma móvel para entrada em pulsos e ganhos iguais a 1,00.	133
Figura 5.57: Erros de deslocamento dos atuadores para entrada em pulsos e ganhos iguais a 1,00.	134
Figura 5.58: Deslocamento vertical da plataforma móvel para entrada em pulsos e ganhos iguais a 10,0.	134
Figura 5.59: Deslocamento dos atuadores para entrada em pulsos e ganhos	

iguais a 10,0.	135
Figura 5.60: Erro de deslocamento vertical da plataforma móvel para entrada em pulsos e ganhos iguais a 10,0.	135
Figura 5.61: Erros de deslocamento dos atuadores para entrada em pulsos e ganhos iguais a 10,0.	136
Figura 5.62: Deslocamento vertical da plataforma móvel para entrada em pulsos e ganhos iguais a 100.	136
Figura 5.63: Deslocamento dos atuadores para entrada em pulsos e ganhos iguais a 100.	137
Figura 5.64: Erro de deslocamento vertical da plataforma móvel para entrada em pulsos e ganhos iguais a 100.	137
Figura 5.65: Erros de deslocamento dos atuadores para entrada em pulsos e ganhos iguais a 100.	138
Figura 5.66: Diagrama esquemático da cinemática inversa.	140
Figura 5.67: Configuração da Plataforma Stewart para entradas: $x = y = z = 20,0$ mm e $\varphi = \theta = \psi = 0,20$ rad.	141
Figura 5.68: a) Geometria inicial da Plataforma Stewart;	
b) Geometria da Plataforma Stewart após 2 segundos.	142
Figura 5.69: Estados inicial e final da Plataforma Stewart obtidos pela cinemática inversa.	143
Figura 5.70: Diagrama de blocos para obter as acelerações dos atuadores da Plataforma Stewart.	144
Figura 5.71: Deslocamentos dos membros pelos dois métodos.	145
Figura 5.72: Velocidade dos membros pelos dois métodos.	145
Figura 5.73: Aceleração dos membros da Plataforma Stewart.	146
Figura 5.74: Diagrama de blocos para validação da cinemática direta da plataforma plana.	147
Figura 5.75: Comparação de $z(t)$ como entrada da cinemática inversa com $z(t)$ como saída da cinemática direta na Plataforma Stewart.	147
Figura 5.76: Diagrama de blocos para obter as acelerações da plataforma móvel.	149
Figura 5.77: $z(t)$ desejado e obtido pela derivada da jacobiana inversa.	149
Figura 5.78: $v_z(t)$ desejado e obtido pela derivada da jacobiana inversa.	150

Figura 5.79: $a_z(t)$ desejado e obtido pela derivada da jacobiana inversa.	150
Figura 5.80: Diagrama de blocos para obtenção dos números de condição.	151
Figura 5.81: Números de condição das matrizes jacobianas inversa e direta da Plataforma Stewart.	152
Figura 5.82: Números de condição de reciprocidade das matrizes jacobianas inversa e direta da Plataforma Stewart.	152
Figura 5.83: Números de condição de reciprocidade dos derivativos das jacobianas inversa e direta da Plataforma Stewart.	153
Figura 5.84: Números de condição das matrizes jacobianas inversa e direta da Plataforma Stewart.	154
Figura 5.85: Números de condição de reciprocidade das matrizes jacobianas inversa e direta da Plataforma Stewart.	154
Figura 5.86: Números de condição de reciprocidade dos derivativos das jacobianas inversa e direta da Plataforma Stewart.	155
Figura 5.87: Configurações da Plataforma Stewart para a avaliação dos carregamentos estáticos.	157
Figura 5.88: Diagrama de blocos para o sistema em malha fechada.	158
Figura 5.89: Funções de transferência da dinâmica dos atuadores.	158
Figura 5.90: Deslocamento vertical da plataforma móvel para entrada em cossenóide e ganhos iguais a 0,10.	159
Figura 5.91: Deslocamento dos atuadores para entrada em cossenóide e ganhos iguais a 0,10.	160
Figura 5.92: Erro de deslocamento vertical da plataforma móvel para entrada em cossenóide e ganhos iguais a 0,10.	160
Figura 5.93: Erros de deslocamento dos atuadores para entrada em cossenóide e ganhos iguais a 0,10.	161
Figura 5.94: Deslocamento vertical da plataforma móvel para entrada em cossenóide e ganhos iguais a 1,00.	161
Figura 5.95: Deslocamento dos atuadores para entrada em cossenóide e ganhos iguais a 1,00.	162
Figura 5.96: Erro de deslocamento vertical da plataforma móvel para entrada em cossenóide e ganhos iguais a 1,00.	162
Figura 5.97: Erros de deslocamento dos atuadores para entrada em	

cossenóide e ganhos iguais a 1,00.	163
Figura 5.98: Deslocamento vertical da plataforma móvel para entrada em pulsos e ganhos iguais a 10,0.	164
Figura 5.99: Deslocamento dos atuadores para entrada em pulsos e ganhos iguais a 10,0.	164
Figura 5.100: Erro de deslocamento vertical da plataforma móvel para entrada em pulsos e ganhos iguais a 10,0.	165
Figura 5.101: Erros de deslocamento dos atuadores para entrada em pulsos e ganhos iguais a 10,0.	165
Figura 5.102: Deslocamento vertical da plataforma móvel para entrada em pulsos e ganhos iguais a 100.	166
Figura 5.103: Deslocamento dos atuadores para entrada em pulsos e ganhos iguais a 100.	166
Figura 5.104: Erro de deslocamento vertical da plataforma móvel para entrada em pulsos e ganhos iguais a 100.	167
Figura 5.105: Erros de deslocamento dos atuadores para entrada em pulsos e ganhos iguais a 100.	167
Figura A.1: Plataforma Stewart 3-3.	181
Figura A.2: Vista superior da Plataforma Stewart 3-3.	181
Figura A.3: Mecanismo equivalente.	182
Figura A.4: Esquema da Plataforma Stewart 3-3.	184
Figura A.5: Vista superior da Plataforma Stewart 3-3.	184
Figura A.6: Diagrama de Corpo Livre de um membro da plataforma.	189
Figura B.1: Atuador pneumático SMC C85 N16-50.	196
Figura B.2: Desenho em CAD do atuador SMC CD85 N16-50 R.	196
Figura B.3: Junta esférica 8412K11 (a) e seu desenho em CAD (b).	197
Figura B.4: Junta universal 6443K46 (a) e seu desenho em CAD (b).	197
Figura B.5: Transdutores de deslocamento linear PY2 – C - 50.	198
Figura B.6: Desenho em CAD do transdutor de deslocamento linear.	198
Figura B.7: Central inercial Sparkfun Atomic IMU.	199
Figura B.8: Desenho em CAD da central inercial Sparkfun Atomic IMU.	199
Figura B.9: Desenho em CAD da base fixa.	200
Figura B.10: Desenho em CAD da plataforma móvel.	200

Figura B.11: Montagem de um elo.	201
Figura B.12: Esquema do sistema pneumático.	202
Figura B.13: Esquema do sistema pneumático – arquitetura alternativa.	203
Figura B.14: Válvula reguladora de pressão.	204
Figura B.15: Válvula 5/3 vias com centro fechado.	205
Figura B.16: Circuito pneumático da primeira versão da Plataforma Stewart construída.	206
Figura B.17: (a) Válvula proporcional; (b) Curva corrente elétrica x vazão da válvula proporcional.	206
Figura B.18: Circuito pneumático do conjunto de válvulas.	207
Figura B.19: Esquema do circuito seguidor de corrente.	207
Figura B.20: Circuito seguidor de corrente.	208
Figura B.21: Aproximação da curva da vazão de saída da válvula proporcional.	208
Figura B.22: Aproximação da curva de perda de carga da válvula proporcional.	209
Figura B.23: Montagem dos componentes da Plataforma Stewart em CAD.	210
Figura B.24: Plataforma Stewart construída.	211
Figura B.25: Demonstração do uso da Plataforma Stewart construída como simulador de movimentos em escala.	211
Figura B.26: Esquema da montagem experimental do sistema de controle dos atuadores.	213
Figura B.27: Placas NI usadas no controle da plataforma (NI 9205 à esquerda e NI 9476 à direita).	214
Figura B.28: Máquina de Medição Universal do Comprimento.	215
Figura B.29: Montagem do transdutor de deslocamento no sistema de medição.	216
Figura B.30: Esquema da montagem do transdutor de deslocamento no sistema de medição.	217
Figura B.31: Pontos que constituem uma série de medição na obtenção da curva de calibração.	217
Figura B.32: Diagrama de blocos para leitura do valor indicado pelos transdutores de deslocamento.	218

Figura B.33: Painel de visualização do valor indicado pelos transdutores de deslocamento.	218
Figura B.34: Curva de calibração (transdutor PY-2 1).	220
Figura B.35: Curva de calibração (transdutor PY-2 2).	221
Figura B.36: Curva de calibração (transdutor PY-2 3).	222
Figura B.37: Curva de calibração (transdutor PY-2 4).	223
Figura B.38: Curva de calibração (transdutor PY-2 5).	224
Figura B.39: Curva de calibração (transdutor PY-2 6).	225

Lista de tabelas

Tabela 1.1: Classificações da Plataforma Stewart.	31
Tabela 2.1: Classificação do mecanismo plano paralelo.	38
Tabela 3.1: Classificação da Plataforma Stewart.	65
Tabela 5.1: Parâmetros do sistema de atuação.	97
Tabela 5.2: Configuração dos elos para entradas $x, y, z = 0,0$ mm e $\varphi, \theta, \psi = 0,00$ rad.	139
Tabela 5.3: Configuração dos elos da Plataforma Stewart para entradas: $x = y = z = 20,0$ mm e $\varphi = \theta = \psi = 0,20$ rad.	141
Tabela B.1: Tabela veritativa de entradas e saídas da válvula direcional.	209
Tabela B.2: Pontos obtidos na curva de calibração (transdutor PY-2 1).	219
Tabela B.3: Pontos obtidos na curva de calibração (transdutor PY-2 2).	220
Tabela B.4: Pontos obtidos na curva de calibração (transdutor PY-2 3).	221
Tabela B.5: Pontos obtidos na curva de calibração (transdutor PY-2 4).	222
Tabela B.6: Pontos obtidos na curva de calibração (transdutor PY-2 5).	223
Tabela B.7: Pontos obtidos na curva de calibração (transdutor PY-2 6).	224
Tabela B.8: Resultado da calibração (transdutor PY-2 1).	226
Tabela B.9: Resultado da calibração (transdutor PY-2 2).	226
Tabela B.10: Resultado da calibração (transdutor PY-2 3).	227
Tabela B.11: Resultado da calibração (transdutor PY-2 4).	227
Tabela B.12: Resultado da calibração (transdutor PY-2 5).	228
Tabela B.13: Resultado da calibração (transdutor PY-2 6).	228

Sumário das notações

Lista de símbolos

DOF,	Graus de liberdade (<i>degree of freedom</i>)
u ,	Coordenada horizontal (perpendicular ao plano vw) no sistema de referência B, mm
v ,	Coordenada horizontal (perpendicular ao plano uw) no sistema de referência B, mm
w ,	Coordenada vertical no sistema de referência B, mm
x ,	Coordenada horizontal (perpendicular ao plano yz) no sistema de referência A, mm
y ,	Coordenada horizontal (perpendicular ao plano xz) no sistema de referência A, mm
z ,	Coordenada vertical no sistema de referência A, mm; zero da Função de Transferência
s ,	Variável de Laplace, s^{-1}
K ,	Ganho do controlador
k ,	Constante associada às válvulas de comando
b ,	Coefficiente de atrito, kgf/s
p ,	Pressão, Pa
Q ,	Vazão volumétrica, mm^3/s
m ,	Massa, kg
g ,	Aceleração da gravidade, mm/s^2
t ,	Tempo, s

Símbolos gregos

φ ,	Ângulo de arfagem (<i>pitch</i>) da plataforma móvel, rad
θ ,	Ângulo de rolagem (<i>roll</i>) da plataforma móvel, rad
ψ ,	Ângulo de guinada (<i>yaw</i>) da plataforma móvel, rad
λ ,	Número de condicionamento da matriz

$r\lambda,$	Número de condição de reciprocidade da matriz
$\varepsilon,$	Sinal de erro
$\tau,$	Constante de tempo, s
$\omega,$	Frequência, rad/s
$\zeta,$	Fator de amortecimento

Subscritos

B,	Referente ao sistema de referência B
$d,$	Referente à trajetória desejada
$i,$	Relativo ao i -ésimo membro
$u,$	Referente à coordenada u
1,	Referente ao atuador/membro 1
2,	Referente ao atuador/membro 2
3,	Referente ao atuador/membro 3
4,	Referente ao atuador/membro 4
5,	Referente ao atuador/membro 5
6,	Referente ao atuador/membro 6
$\infty,$	Referente ao regime permanente
$pv,$	Relativo à entrada de pressão
$1g,$	Relativo à carga no sistema de atuação
$2g,$	Relativo à carga no sistema de atuação
$gv,$	Relativo à carga no sistema de atuação
$f,$	Referente à fonte de alimentação
V,	Referente ao comando da válvula
$a,$	Referente à aceleração
$v,$	Referente à velocidade
$p,$	Referente à posição
$n,$	Referente à frequência natural

Sobrescritos

A,	Referente ao sistema de referência A
----	--------------------------------------

1 Introdução

1.1 Objetivos

Com o intuito de desenvolver um simulador de movimentos, este trabalho tem o objetivo de estudar a implementação em mecanismos paralelos com três e seis graus de liberdade uma estratégia de controle baseada em métodos não convencionais.

Para tanto, o simulador em desenvolvimento será controlado via central inercial, ou seja, o controle não será exercido pela medição direta do deslocamento dos atuadores, elementos no qual o controle é exercido. As variáveis a serem mensuradas serão as acelerações e velocidades angulares da extremidade móvel do simulador, sendo que o controle é exercido sobre cada atuador responsável pela movimentação deste mecanismo.

Para facilitar o processo de modelagem, análise e implementação do controle, primeiramente toda a metodologia proposta será usada em um mecanismo paralelo plano de três graus de liberdades. Com a metodologia validada, a implementação seguirá com o uso do modelo da Plataforma Stewart.

1.2 Motivação

O autor deste trabalho já desenvolveu alguns trabalhos e pesquisas relacionadas ao tema proposto e a continuidade destes é a principal motivação para o trabalho que segue. Durante o período de Agosto de 2007 e Julho de 2009 o autor desenvolveu, como parte de seu projeto do Programa de Iniciação Científica da PUC-Rio e de seu Projeto de Graduação para obtenção do título de Engenheiro Mecânico nesta mesma Instituição, uma Plataforma Stewart em escala reduzida com atuação pneumática (ALBUQUERQUE, A. N., 2009; Figura 1.1). Uma

segunda versão, ainda em escala reduzida e com atuação pneumática, foi desenvolvida nos meses subsequentes (Apêndice B).



Figura 1.1: Plataforma Stewart em escala construída.

Ao longo dos 36 meses desta pesquisa foi desenvolvido, em um trabalho conjunto com alunos da Graduação em Engenharia de Controle e Automação, um simulador de movimentos com dois graus de liberdade com atuação via motores elétricos (Figura 1.2). Este simulador foi apresentado em eventos como o PUC por um Dia (2010) e o Michelin Challenge Bibendum (2010). Ele consiste de uma estrutura interna na qual ficam o banco do motorista, uma tela para exibição do *software* de simulação e os respectivos controles associados (volante, pedal, câmbio), acoplada com rolamentos axiais em uma estrutura intermediária, que por sua vez é acoplada (em um eixo transversal ao eixo de acoplamento anterior) a uma estrutura fixa ao chão. O movimento angular da estrutura interna em relação à estrutura intermediária é a arfagem (*pitch*) e o movimento angular da estrutura intermediária em relação a um referencial inercial (estrutura fixa ao chão) é a rolagem (*roll*). Com a combinação destes dois movimentos é possível realizar diversas atitudes associadas à pilotagem e assim, reproduzir algumas das sensações que o motorista sentirá ao dirigir em um veículo real.



Figura 1.2: Simulador com dois graus de liberdade desenvolvido.

O uso de transdutores de deslocamento linear em mecanismos como estes apresentados introduzem elevados efeitos de inércia, além de aumentar a massa dos mesmos, diminuindo sua relação carga/peso e sua eficiência. Atualmente, o grande desenvolvimento de sensores do tipo central inercial aumentou a disponibilidade destes no mercado e reduziu muito seu custo. Como se trata de um conjunto de acelerômetros triaxiais com girômetros também triaxiais, sensores como este podem ser usados para determinar a posição no espaço de mecanismo com seis graus de liberdade, como a Plataforma Stewart já construída.

O simulador de dois graus de liberdade e as Plataformas Stewart desenvolvidas (Figuras 1.1 e 1.2 e Apêndice B) servirão de base para a futura implementação das estratégias de controle estudadas neste trabalho. Outros projetos nesta área também serviram como motivação para o começo deste projeto, tais como o simulador de movimentos com seis graus de liberdade com atuação via músculos pneumáticos desenvolvido pela FESTO (Figura 1.3). A arquitetura deste mecanismo torna clara a noção de que o uso dos transdutores de deslocamento linear convencionais pode gerar complicações.



Figura 1.3: Simulador com seis graus de liberdade desenvolvido pela FESTO® com músculos pneumáticos.

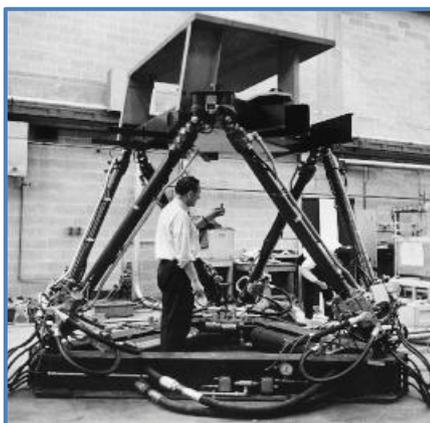
1.3 Revisão bibliográfica

O simulador baseado em uma Plataforma Stewart a ser desenvolvido é um sistema mecatrônico que reproduz as principais atitudes e movimentos de um veículo. Este mecanismo articulado, com 6 graus de liberdade, é capaz de reproduzir os três ângulos de atitude - rolagem, arfagem e guinada, e os deslocamentos lineares - lateral, vertical e longitudinal, com limitações, porém com amplitude suficiente de modo a possibilitar os principais movimentos associados ao veículo.

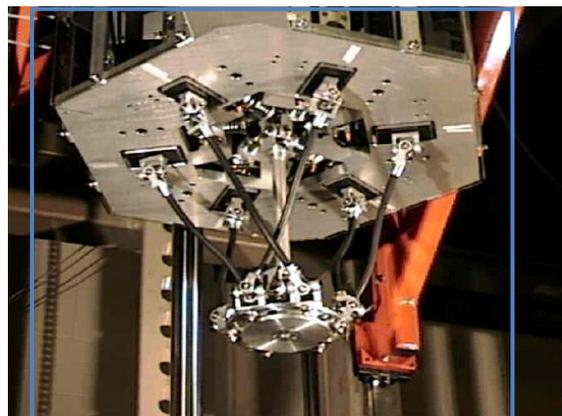
O projeto desta Plataforma Stewart consiste em um robô paralelo controlado através de servo-válvulas eletropneumáticas. Este tipo de plataforma foi originalmente desenvolvido em 1965 como um simulador de voo. Desde então, uma vasta variedade de aplicações se utilizam deste invento. Isto porque produz uma melhor atuação, maior rigidez, maior razão carga-peso e uma distribuição de carga mais uniforme. Basicamente, ela é usada no controle de posicionamento e é constituída de uma base fixa acoplada em seis pontos a um platô móvel na parte superior através de cilindros pneumáticos, ou seja, é uma estrutura articulada acionada por seis atuadores lineares (ALBUQUERQUE, A. N., 2009).

Estes sistemas paralelos são definidos como um dispositivo multifuncional e reprogramável projetado para mover e manipular materiais, partes ou ferramentas através de movimentos programados para a realização de uma variedade de tarefas especificadas. Um mecanismo paralelo é composto por uma cadeia cinemática fechada, na qual cadeias seriais separadas se conectam a uma plataforma fixa e, em sua extremidade oposta, se conectam a uma plataforma móvel. Também chamados de manipuladores, este tipo de sistema apresenta grandes vantagens quando comparado aos manipuladores seriais, como melhor estabilidade e precisão, capacidade de manipular cargas relativamente grandes, altas velocidades e acelerações e baixa força de atuação.

O desenho dos manipuladores paralelos se remonta há várias décadas atrás, em 1962, quando Gough e Withehall desenharam um sistema paralelo para ser usado em uma máquina de provas universais. Stewart em 1965 projetou uma plataforma para ser usada em simuladores de voo. Desde então vão se desenrolando inúmeros estudos por diversos pesquisadores. Entre os mais recentes se destacam Jean-Pierre Merlet e Lung-Wen Tsai. A Figura 1.4.a abaixo mostra o primeiro simulador de voo com uma estrutura de seis graus de liberdade e a Figura 1.4.b mostra um manipulador paralelo empregado na montagem de peças, também com seis graus de liberdade (TAPIA, B. C. e MÉNDEZ, S. J. T, 2009). Já a Figura 1.5 apresenta o simulador de voo no Centro de Treinamento de Operações da Varig, no Rio de Janeiro.



a)



b)

Figura 1.4: Exemplos de mecanismos paralelos baseados na plataforma de Stewart. a) Simulador de voo; b) Robô montador.

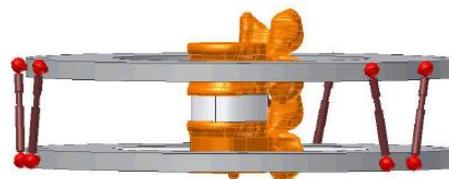


Figura 1.5: Simulador de voo do Centro de Treinamento de Operações da Varig, no Rio de Janeiro.

Pesquisas mais recentes descrevem o uso deste tipo de mecanismo paralelo em aplicações médicas, na correção de fraturas nos membros superiores e inferiores (TAYLOR, J.C., 2002) e na determinação das propriedades mecânicas dos materiais usados na confecção de elementos substitutos de segmentos da coluna humana (SERRANO, F., 2007), como mostram as Figuras 1.6.a e 1.6.b, respectivamente.



a)



b)

Figura 1.6: a) Correção de fratura; b) Estrutura para ensaios biomecânicos.

Os manipuladores paralelos podem ser classificados como planos, esféricos ou espaciais de acordo com as características geométricas e de movimento. Na Figura 1.7 pode-se distinguir esta classificação.

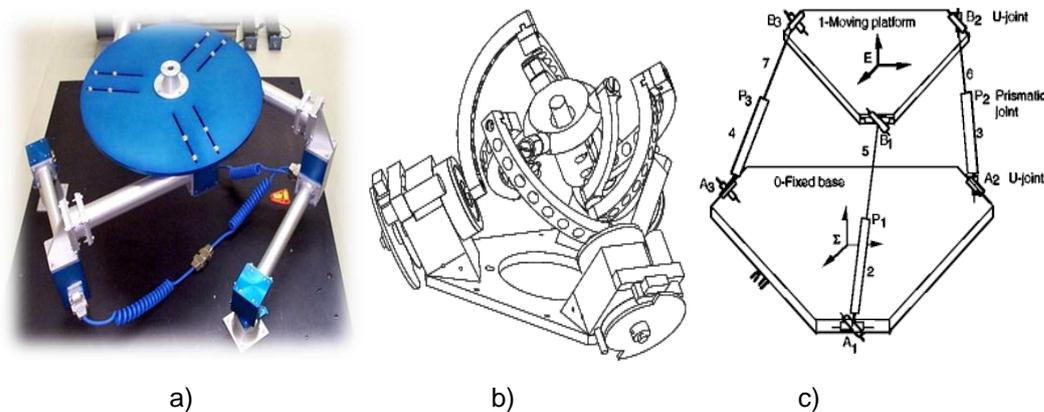


Figura 1.7: Classificação de manipuladores paralelos de acordo com seus movimentos: a) plano; b) esférico; c) espacial.

Também podem se classificar de acordo com suas características estruturais como simétricos e assimétricos. Um manipulador paralelo é chamado de simétrico se segue as seguintes condições: O número de encadeamentos (membros) deve ser igual ao número de graus de liberdade da plataforma móvel; o tipo e número das articulações (juntas) em todos os encadeamentos devem estar fixos em um padrão idêntico; o número e a localização das articulações e dos atuadores devem ser os mesmos. Quando as condições mencionadas não se cumprem, o manipulador é chamado assimétrico. Pode-se observar então que nos manipuladores paralelos simétricos o número de encadeamentos, m , é igual ao número de graus de liberdade F , que é igual ao número total de cadeias cinemáticas, $L + 1$ (incluindo a malha externa; TSAI, L. W., 1999). Isto pode se expressar como apresentado na Equação 1.1. A Tabela 1.1 mostra a classificação com relação a diversos aspectos do manipulador desenvolvido neste trabalho (mais detalhes no Apêndice B).

$$m = F = L + 1 \quad (1.1)$$

Tabela 1.1: Classificações da Plataforma Stewart.

Graus de liberdade	Manipulador de uso geral (6 graus de liberdade)
Estrutura cinemática	Manipulador paralelo (cadeia cinemática fechada)
Tecnologia de acionamento	Pneumática
Características de movimento	Manipulador espacial

Sistemas pneumáticos como os usados no desenvolvimento das plataformas em questão, são constituídos pelos elementos descritos na Figura 1.8 (NELLI SILVA, E. C., 2002).

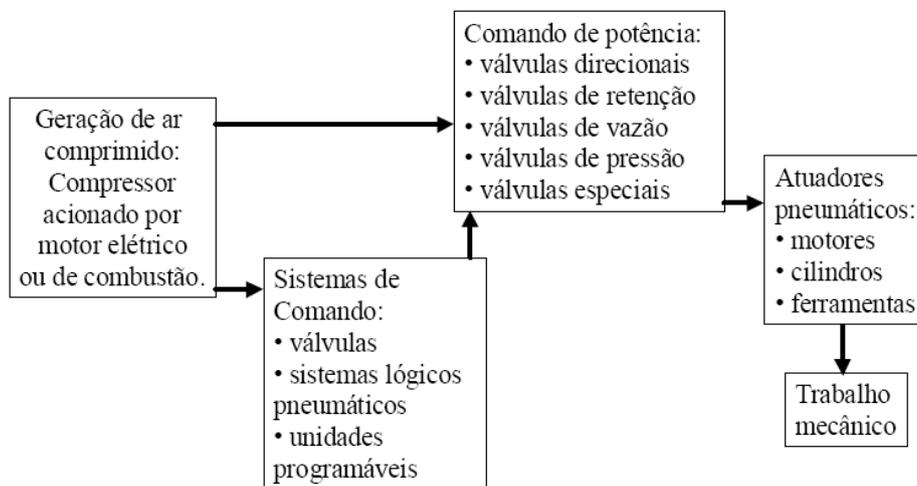


Figura 1.8: Elementos de um sistema de acionamento pneumático.

Os sistemas de comando são os responsáveis por controlar o atuador pneumático mediante a informação dos sensores. Pode consistir num microcomputador, por exemplo. Já o sistema de comando de potência converte os sinais recebidos do sistema de comando em sinais de níveis de energia para acionar os atuadores.

Entre as vantagens da utilização do ar comprimido, tem-se: facilidade de obtenção (volume “ilimitado”); não apresenta riscos de faísca em atmosfera explosiva; fácil armazenamento; não contamina o ambiente (sistema limpo e atóxico); não necessita de linhas de retorno (escape para a atmosfera), ao contrário de sistemas elétricos e hidráulicos; acionamentos podem ser sobrecarregados até a parada (NELLI SILVA, E. C., 2002).

No entanto, o ar apresenta vapor de água (umidade). Esse vapor pode se condensar ao longo da linha pneumática dependendo das condições de pressão e temperatura ao longo da linha. Se não houver um sistema para retirar a água, ela pode se acumular causando corrosão das tubulações. O ar apresenta também uma baixa viscosidade. Um fluido que tem baixa viscosidade pode escoar por pequenos orifícios e, portanto a chance de ocorrer vazamentos é muito grande. Assim, vazamentos de ar em linhas pneumáticas são muito comuns. Os equipamentos pneumáticos (principalmente as válvulas) são constituídos de mecanismos muito delicados e sensíveis e para que possam funcionar de modo confiável, com bom rendimento, é necessário assegurar determinadas exigências de qualidade do ar comprimido, entre elas: pressão, vazão, teor de água, teor de partículas sólidas e teor de óleo (NELLI SILVA, E. C., 2002).

As grandezas de pressão e vazão estão relacionadas diretamente com a força e velocidade, respectivamente, do atuador pneumático. Cada componente pneumático tem sua especificação própria de pressão e vazão de operação. Para atender a essas especificações é necessária suficiente vazão no compressor, correta pressão na rede e tubulação de distribuição corretamente dimensionada em função da vazão. Já água, óleo e impurezas têm grande influência sobre a durabilidade e confiabilidade de componentes pneumáticos. O óleo em particular é usado para lubrificar os mecanismos dos sistemas pneumáticos. Dependendo da aplicação as exigências do ar com relação à água, óleo e impurezas são diferentes (NELLI SILVA, E. C., 2002).

1.4 Organização do trabalho

O Capítulo 2 apresenta os modelos cinemáticos inverso e direto analíticos de uma plataforma plana de três graus de liberdade e o detalhamento da metodologia empregada, que servirá de base para a modelagem da Plataforma Stewart. Já o Capítulo 3 apresenta o modelo cinemático inverso analítico e o método numérico para solução do modelo direto da Plataforma Stewart.

O Capítulo 4 mostra a dinâmica de um atuador pneumático e como será a estratégia de controle empregada a fim de exercer os controles de posição e

velocidade dos dois tipos de mecanismo estudados. O Capítulo 5 apresenta o resultado das simulações computacionais realizadas para a predição do comportamento do sistema e validação dos modelos apresentados nos Capítulos 2, 3 e 4.

Baseado nos resultados apresentados no Capítulo 5, o Capítulo 6 apresenta as devidas conclusões e indica quais trabalhos ainda precisam ser executados para dar seguimento ao estudo realizado nesta Dissertação de Mestrado.

2

Modelo de uma plataforma plana com três graus de liberdade

Neste Capítulo será apresentada analiticamente a geometria e a cinemática inversa e direta de uma plataforma plana com três graus de liberdade.

2.1 Graus de liberdade

Um mecanismo ou manipulador mecânico é constituído de diversos elos conectados por juntas. O número de graus de liberdade de um mecanismo depende do número de elos e juntas e dos tipos de juntas empregadas na construção do mesmo. Neste trabalho, todos os elos serão considerados como corpos rígidos em seus modelos.

Do ponto de vista cinemático, dois ou mais membros conectados de forma que não haja movimento relativo entre eles são considerados como um elo. Em um mecanismo ou manipulador mecânico os elos são conectados em pares. A conexão entre eles é chamada de junta. Uma junta provê algumas restrições ao movimento relativo entre os dois membros. Estas restrições dependem do tipo de junta empregada para fazer a união entre os elos. No mecanismo paralelo de três graus de liberdade apresentado são empregados dois tipos de juntas: juntas rotativas e juntas prismáticas (TSAI, L. W., 1999).

Juntas rotativas (R) permitem que os dois elementos acoplados a ela tenham uma rotação, um em relação ao outro, em torno de um eixo definido pela geometria da junta. Estas juntas impõem cinco restrições de movimento aos elos e é então uma junta de um grau de liberdade. Uma junta prismática (P) permite que os dois elementos unidos deslizem um em relação ao outro ao longo de um eixo

definido pela geometria da junta. Impõe cinco restrições ao movimento, formando uma junta com um grau de liberdade (TSAI, L. W., 1999).

O número de graus de liberdade de um mecanismo consiste no número de parâmetros independentes ou entradas necessárias para especificar a configuração completa do mecanismo. Exceto em alguns casos especiais, o Critério de Grübler (1917) define o número de graus de liberdade de um mecanismo (TSAI, L. W., 1999). Este é definido como

$$F = \Lambda(n - j - 1) + \sum_{i=1}^j f_i - f_p \quad (2.1)$$

na qual

F é o número de graus de liberdade do mecanismo;

f_i é o número de graus de movimento relativo associados à junta i ;

f_p é o número de graus de liberdade passivos do mecanismo;

j é o número de juntas do mecanismo;

j_f é o número de juntas com f graus de liberdade;

n é o número de elos do mecanismo;

Λ é o número de graus de liberdade do espaço no qual o mecanismo irá atuar (é igual a 3 em subsistemas esféricos ou planares e igual a 6 em subsistemas espaciais).

A Figura 2.1 mostra um mecanismo paralelo no qual uma plataforma móvel é conectada a uma base fixa com três membros extensíveis por juntas rotativas. Cada membro é constituído por dois elos conectados por uma junta prismática. Esta construção é denominada R-P-R (TSAI, L. W., 1999). Nesta configuração há um grau de liberdade passivo associado a cada membro. Assim, tem-se $\Lambda = 3$ (mecanismo planar), $n = 8$, $j_1 = 3$ (juntas prismáticas), $j_3 = 6$ (juntas rotativas) e $f_p = 0$. O valor dos graus de liberdade do manipulador é dado por $F = 3(8 - 9 - 1) + (3 + 6) - 0 = 3$. Estes três graus de liberdade achados estão associados à translação nas duas direções do plano vetorial (x e z) e à rotação ao redor do eixo y (θ).

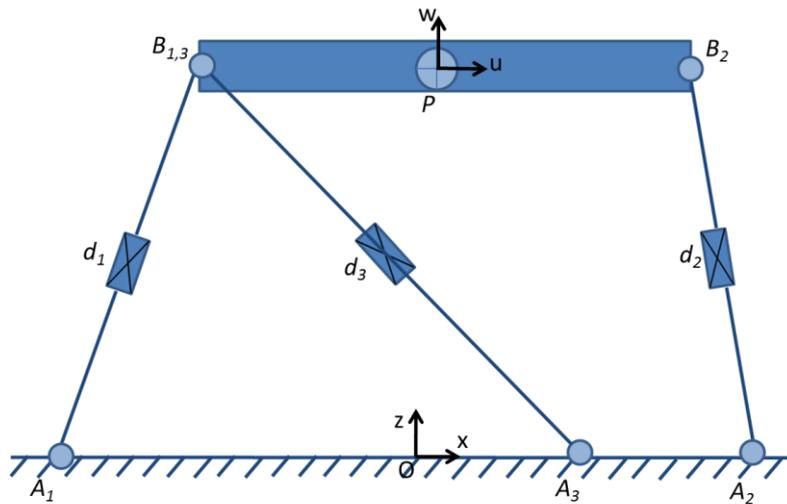


Figura 2.1: Mecanismo paralelo plano com três graus de liberdade.

O número de malhas independentes em uma cadeia cinemática é dado pela relação

$$L = j - n + 1 \tag{2.2}$$

A Equação 2.2, conhecida como *Equação de Euler* indica que este número de malhas independentes excede a diferença entre o número de juntas e o número de elos por um (TSAI, L. W., 1999). Combinando esta com a Equação 2.1 e eliminando o termo f_p da relação, tem-se

$$\sum f_i = F + \Lambda L \tag{2.3}$$

A Equação 2.3 é conhecida como o *critério da mobilidade de malha* e também é usada para prever o número de malhas independentes em uma cadeia cinemática. No mecanismo em estudo tem-se $\Lambda = 3$, $n = 8$, $j = 9$. Assim, existem $L = 9 - 8 + 1 = 2$ malhas independentes. O lado direito da Equação 2.3 leva a $F + \Lambda L = 3 + 6 \times 1 = 9$, enquanto que o lado esquerdo nos dá $\sum f_i = 1 \times 6 + 3 = 9$. A diferença é nula devido à inexistência de graus de liberdade passivos (valor de f_p).

Definindo a conectividade C_k de um membro como o número de graus de liberdade associados com todas as juntas do encadeamento, tem-se

$$\sum_{k=1}^m C_k = \sum_{i=1}^j f_i \quad (2.4)$$

na qual j é o número de juntas no mecanismo. Substituindo a Equação 2.3 na Equação 2.4, eliminando L e usando a Equação 1.1, obtém-se

$$\sum_{k=1}^m C_k = (\Lambda + 1)F - \lambda \quad (2.5)$$

Além disso, a conectividade de cada membro não deve ser maior que o parâmetro de movimento (graus de liberdade do ambiente de trabalho do manipulador) e menor que o número de graus de liberdade da plataforma móvel (TSAI, L. W., 1999). Assim, tem-se

$$\Lambda \geq C_k \geq F \quad (2.6)$$

As Equações 2.5 e 2.6 são usadas na enumeração e classificação dos manipuladores paralelos. Em manipuladores paralelos planos substitui-se $\Lambda = 3$ (TSAI, L. W., 1999) e assim, obtém-se

$$\sum_{k=1}^m C_k = 4F - 3 \quad (2.7)$$

$$3 \geq C_k \geq F \quad (2.8)$$

Resolvendo as Equações 2.7 e 2.8 simultaneamente para valores inteiros positivos de C_k , $k = 1, 2, 3, \dots$, pode-se classificar este manipulador paralelo de acordo com seus graus de liberdade e conectividade (TSAI, L. W., 1999), como mostra a Tabela 2.1.

Tabela 2.1: Classificação do mecanismo plano paralelo.

Graus de liberdade (F)	Número de malhas (L)	Somatório dos graus de liberdade de todas as juntas ($\sum f_i$)	Conectividade (C_k) para $k = [1,6]$
3	2	9	3,3,3,3,3,3

2.2 Geometria inversa

Um dos métodos que podem ser usados na análise da geometria e da cinemática dos manipuladores paralelos é o método matricial de Denavit-Hartenberg (H. ASADA, 1986). Em mecanismos com malhas cinemáticas fechadas, podem ser definidos sistemas de coordenadas cartesianas em cada elo, de acordo com a notação de Denavit-Hartenberg, como mostra a Figura 2.2. Nestes casos, o sistema de coordenadas da extremidade do manipulador coincide com o sistema de coordenadas da base, em cada malha. Nesta notação, juntas universais (Figura B.4) podem ser modeladas como duas juntas rotativas que se interceptam e juntas esféricas (Figura B.3) como três (TSAI, L. W., 1999).

Realizando as mudanças de coordenadas sucessivamente, as matrizes correspondentes a cada transformação são multiplicadas. Quando todas as mudanças são feitas, parte-se do sistema inicial (x_0, y_0, z_0) , dá-se a volta pela malha e então se retorna ao sistema (x_0, y_0, z_0) . Quando isto ocorre, a matriz resultante de transformação é dada por ${}^0A_1 {}^1A_2 \dots {}^{n-2}A_{n-1} {}^{n-1}A_n$. Porém, esta transformação é uma matriz identidade, uma vez que ela retorna ao sistema original (TSAI, L. W., 1999). Logo, pode-se escrever

$${}^0A_1 {}^1A_2 \dots {}^{n-2}A_{n-1} {}^{n-1}A_n = I \quad (2.9)$$

na qual I é uma matriz identidade 4×4 .

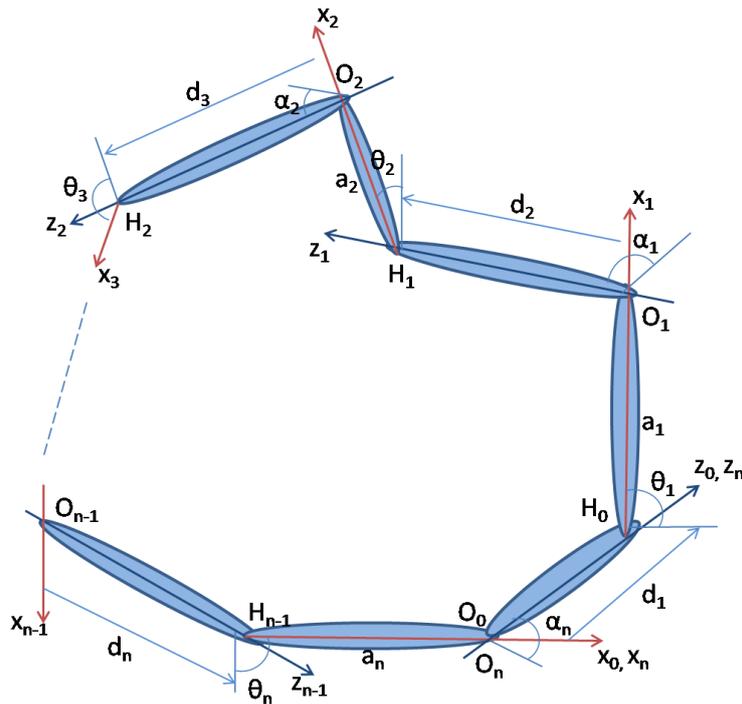


Figura 2.2: Mecanismo de cadeia fechada e seus parâmetros de Denavit-Hartenberg.

Para um mecanismo com múltiplas malhas, forma-se o equacionamento dado acima para cada malha independente do mecanismo a fim de obter um conjunto de equações de restrições. Apesar de este ser um método bem geral, ele se torna complicado à medida que o número de malhas fechadas na cadeia cinemática aumenta. Por esta razão, em manipuladores paralelos é mais conveniente empregar o método geométrico para a análise da cinemática. Geralmente, nestes casos, são determinadas equações de malha vetorial para cada membro e as variáveis das juntas passivas são eliminadas entre estas equações (TSAI, L. W., 1999).

A Figura 2.3 mostra um manipulador paralelo com configuração 3RPR. Três membros se conectam a plataforma móvel à base fixa por juntas rotativas nos B_i e A_i , $i = 1, 2$ e 3 .

Usando o sistema de coordenadas mostrado na Figura 2.2, adiciona-se um referencial $A(x, z)$ fixado à base da plataforma e outro, $B(u, w)$ acoplado à plataforma móvel. Outro sistema de referências $C(x_i, z_i)$ é fixado à cada junta rotativa, tendo assim, sua origem no ponto A_i (sendo i referente à i -ésima junta rotativa; $i = 1, 2$ e 3). O eixo z_i deste sistema aponta de A_i para B_i (direção do

atuador i). Por conveniência, a origem do sistema B é localizada no centro de massa da plataforma móvel. A localização da plataforma móvel pode ser descrita pela posição do vetor $\mathbf{p} = [p_x, p_z]^T = [x_d, z_d]^T$ e da matriz de rotação ${}^A R_B$. Sendo u e w os eixos do sistema de coordenadas móvel, então a matriz de rotação pode ser escrita como apresentado na Equação 2.10.

$${}^A R_B = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

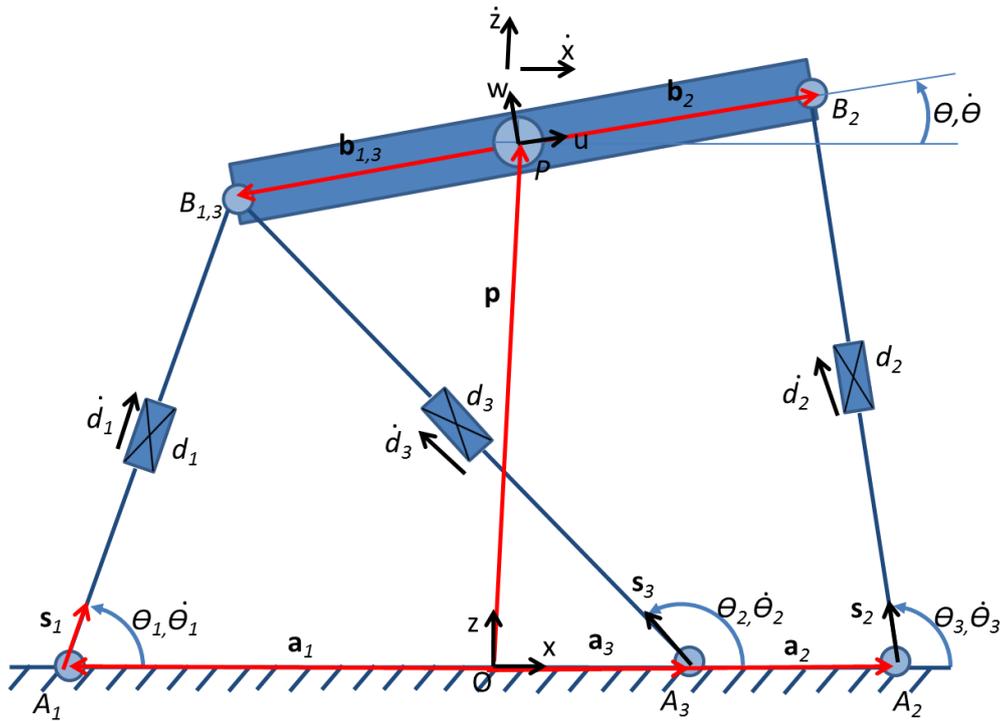


Figura 2.3: Plataforma plana com três graus de liberdade.

Sendo $\mathbf{a}_i = [a_{ix}, a_{iz}]^T$ e ${}^B \mathbf{b}_j = [b_{ju}, b_{jw}]^T$ as posições vetoriais dos pontos A_i e B_j nos sistemas coordenados A e B (com i de 1 a 3), respectivamente, pode-se escrever uma equação de malha para o i -ésimo membro do manipulador (Equação 2.11),

$$\overline{A_i B_i} = \mathbf{p} + {}^A R_B {}^B \mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i \quad (2.11)$$

na qual $[b_{ix}, b_{iz}]^T$ é o vetor \mathbf{b}_i descrito no referencial fixo. O comprimento do i -ésimo membro é obtido pelo produto escalar do vetor ${}^A R_B {}^B \mathbf{b}_i$ com ele mesmo, como mostra a Equação 2.12.

$$d_i^2 = [\mathbf{p} + {}^A R_B {}^B \mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i]^T \cdot [\mathbf{p} + {}^A R_B {}^B \mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i] \quad (2.12)$$

Lembrando que ${}^B \mathbf{b}_i$ e \mathbf{a}_i são vetores constantes definidos pela geometria do manipulador. Neste caso, se o vetor \mathbf{p} e a matriz de transformação ${}^A R_B$ do sistema B em relação ao A são dados, a solução do problema da cinemática inversa se resume a

$$d_i = \pm \sqrt{\mathbf{p}^T \mathbf{p} + {}^B \mathbf{b}_i^T {}^B \mathbf{b}_i + \mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_i + 2\mathbf{p}^T {}^A R_B {}^B \mathbf{b}_i - 2\mathbf{p}^T \mathbf{a}_i - 2[{}^A R_B {}^B \mathbf{b}_i]^T \mathbf{a}_i} \quad (2.13)$$

As Equações 2.14 a 2.16 apresentam os resultados analíticos para os vetores \mathbf{d}_i .

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_1 = \overline{A_1 B_1} &= \begin{bmatrix} x_d \\ z_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1u} \\ b_{1w} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{1x} \\ a_{1z} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_d + b_{1u} \cos \theta - b_{1w} \text{sen } \theta - a_{1x} \\ z_d + b_{1u} \text{sen } \theta + b_{1w} \cos \theta - a_{1z} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_2 = \overline{A_2 B_2} &= \begin{bmatrix} x_d \\ z_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{2u} \\ b_{2w} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{2x} \\ a_{2z} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_d + b_{2u} \cos \theta - b_{2w} \text{sen } \theta - a_{2x} \\ z_d + b_{2u} \text{sen } \theta + b_{2w} \cos \theta - a_{2z} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_3 = \overline{A_3 B_3} &= \begin{bmatrix} x_d \\ z_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{3u} \\ b_{3w} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{3x} \\ a_{3z} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_d + b_{3u} \cos \theta - b_{3w} \text{sen } \theta - a_{3x} \\ z_d + b_{3u} \text{sen } \theta + b_{3w} \cos \theta - a_{3z} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.16)$$

As Equações 2.17 a 2.22 apresentam o desenvolvimento e o resultado dos comprimentos dos elos a partir das entradas descritas.

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{d}_1\|^2 &= \begin{bmatrix} x_d + b_{1u} \cos \theta - b_{1w} \sin \theta - a_{1x} \\ z_d + b_{1u} \sin \theta + b_{1w} \cos \theta - a_{1z} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_d + b_{1u} \cos \theta - b_{1w} \sin \theta - a_{1x} \\ z_d + b_{1u} \sin \theta + b_{1w} \cos \theta - a_{1z} \end{bmatrix} \\
&= (x_d + b_{1u} \cos \theta - b_{1w} \sin \theta - a_{1x})^2 \\
&\quad + (z_d + b_{1u} \sin \theta + b_{1w} \cos \theta - a_{1z})^2 = \\
&= (x_d^2 + x_d b_{1u} \cos \theta - x_d b_{1w} \sin \theta - x_d a_{1x} + x_d b_{1u} \cos \theta + b_{1u}^2 \cos^2 \theta \\
&\quad - b_{1u} b_{1w} \cos \theta \sin \theta - a_{1x} b_{1u} \cos \theta - x_d b_{1w} \sin \theta \\
&\quad - b_{1u} b_{1w} \cos \theta \sin \theta + b_{1w}^2 \sin^2 \theta + a_{1x} b_{1w} \sin \theta - x_d a_{1x} \\
&\quad - a_{1x} b_{1u} \cos \theta + a_{1x} b_{1w} \sin \theta + a_{1x}^2) \\
&\quad + (z_d^2 + z_d b_{1u} \sin \theta + z_d b_{1w} \cos \theta - z_d a_{1z} + z_d b_{1u} \sin \theta \\
&\quad + b_{1u}^2 \sin^2 \theta + b_{1u} b_{1w} \cos \theta \sin \theta - a_{1z} b_{1u} \sin \theta + z_d b_{1w} \cos \theta \\
&\quad + b_{1u} b_{1w} \cos \theta \sin \theta + b_{1w}^2 \cos^2 \theta - a_{1z} b_{1w} \cos \theta - z_d a_{1z} \\
&\quad - a_{1z} b_{1u} \sin \theta - a_{1z} b_{1w} \cos \theta + a_{1z}^2) \\
&= x_d^2 + 2x_d(b_{1u} \cos \theta - b_{1w} \sin \theta - a_{1x}) + b_{1u}^2 + 2a_{1x}(b_{1w} \sin \theta - b_{1u} \cos \theta) \\
&\quad + b_{1w}^2 + a_{1x}^2 + z_d^2 + 2z_d(b_{1w} \cos \theta + b_{1u} \sin \theta - a_{1z}) \\
&\quad + 2a_{1z}(-b_{1u} \sin \theta - b_{1z} \cos \theta) + a_{1z}^2
\end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}
d_1 &= \\
&= \sqrt{x_d^2 + z_d^2 + b_{1u}^2 + b_{1w}^2 + a_{1x}^2 + a_{1z}^2 + b_{1u}[(2x_d - 2a_{1x}) \cos \theta + (2z_d - 2a_{1z}) \sin \theta] + \\
&\quad b_{1w}[(2z_d - 2a_{1z}) \cos \theta + (-2x_d + 2a_{1x}) \sin \theta] - 2x_d a_{1x} - 2z_d a_{1z}}
\end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\|\mathbf{d}_2\|^2 = \begin{bmatrix} x_d + b_{2u} \cos \theta - b_{2w} \sin \theta - a_{2x} \\ z_d + b_{2u} \sin \theta + b_{2w} \cos \theta - a_{2z} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_d + b_{2u} \cos \theta - b_{2w} \sin \theta - a_{2x} \\ z_d + b_{2u} \sin \theta + b_{2w} \cos \theta - a_{2z} \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}
d_2 &= \\
&= \sqrt{x_d^2 + z_d^2 + b_{2u}^2 + b_{2w}^2 + a_{2x}^2 + a_{2z}^2 + b_{2u}[(2x_d - 2a_{2x}) \cos \theta + (2z_d - 2a_{2z}) \sin \theta] + \\
&\quad b_{2w}[(2z_d - 2a_{2z}) \cos \theta + (-2x_d + 2a_{2x}) \sin \theta] - 2x_d a_{2x} - 2z_d a_{2z}}
\end{aligned} \tag{2.20}$$

$$\|\mathbf{d}_3\|^2 = \begin{bmatrix} x_d + b_{3u} \cos \theta - b_{3w} \sin \theta - a_{3x} \\ z_d + b_{3u} \sin \theta + b_{3w} \cos \theta - a_{3z} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_d + b_{3u} \cos \theta - b_{3w} \sin \theta - a_{3x} \\ z_d + b_{3u} \sin \theta + b_{3w} \cos \theta - a_{3z} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

$$d_3 = \sqrt{x_d^2 + z_d^2 + b_{3u}^2 + b_{3w}^2 + a_{3x}^2 + a_{3z}^2 + b_{3u}[(2x_d - 2a_{3x}) \cos \theta + (2z_d - 2a_{3z}) \sin \theta] + b_{3w}[(2z_d - 2a_{3z}) \cos \theta + (-2x_d + 2a_{3x}) \sin \theta] - 2x_d a_{3x} - 2z_d a_{3z}} \quad (2.22)$$

2.3 Cinemática inversa

Para o caso deste manipulador, o método da cadeia de vetores de velocidade é mais simples. Geralmente, o vetor velocidade de um ponto é formulado a partir de duas direções diferentes de uma cadeia fechada. Cada cadeia fechada consiste em uma base fixa, uma plataforma móvel e todos os elos de um membro. As velocidades das juntas passivas (não atuadas) em cada membro são eliminadas pelo produto escalar da equação da cadeia de vetores de velocidade com o vetor apropriado normal a todos os vetores das velocidades das juntas passivas. Finalmente, as equações resultantes são agregadas na matriz jacobiana (TSAI, L. W., 1999).

Por consistência, define-se o estado de velocidades da plataforma móvel da jacobiana convencional como um vetor de três dimensões com a velocidade linear de um ponto, seguido pela velocidade angular da plataforma móvel.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_p \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Para este manipulador o vetor de entrada é dado por $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{\mathbf{d}}_1, \dot{\mathbf{d}}_2, \dot{\mathbf{d}}_3]^T$ e o vetor de saída pode ser descrito pela velocidade do centroide P e a velocidade angular da plataforma móvel (Equação 2.23). A partir da definição da geometria

inversa, será apresentado o procedimento para obtenção da cinemática inversa. Reescrevendo a Equação 2.11, tem-se

$$\overline{OP} + \overline{PB}_i = \overline{OA}_i + \overline{A}_i\overline{B}_i \quad \therefore \mathbf{p} + \mathbf{b}_i = \mathbf{d}_i + \mathbf{a}_i \quad (2.24)$$

Aplicando o diferencial em relação ao tempo, obtém-se

$$\mathbf{v}_p + \boldsymbol{\omega}_B \times \mathbf{b}_i = d_i \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{s}_i + \dot{d}_i \mathbf{s}_i \quad (2.25)$$

na qual \mathbf{b}_i e \mathbf{s}_i representam o vetor \overline{PB}_i e um vetor unitário ao longo de $\overline{A}_i\overline{B}_i$, respectivamente. $\boldsymbol{\omega}_i$ denota a velocidade angular do i -ésimo membro em relação ao sistema fixo A . As Equações 2.26 e 2.27 apresentam o detalhamento dos termos da Equação 2.25, que é apresentada em sua forma expandida na Equação 2.28.

$$\boldsymbol{\omega}_B \times \mathbf{b}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{ix} \\ b_{iz} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta} b_{iz} \\ \dot{\theta} b_{ix} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

$$\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{s}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_i \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} s_{ix} \\ s_{iz} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_i s_{iz} \\ \dot{\theta}_i s_{ix} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_d \\ \dot{z}_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\dot{\theta} b_{iz} \\ \dot{\theta} b_{ix} \end{bmatrix} = d_i \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_i s_{iz} \\ \dot{\theta}_i s_{ix} \end{bmatrix} + \dot{d}_i \begin{bmatrix} s_{ix} \\ s_{iz} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Para eliminar $\boldsymbol{\omega}_i$, multiplica-se os dois lados da Equação 2.25 por \mathbf{s}_i , obtendo

$$\mathbf{s}_i \cdot \mathbf{v}_p + \mathbf{s}_i (\boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{b}_i) = d_i \mathbf{s}_i (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{s}_i) + \dot{d}_i \mathbf{s}_i \mathbf{s}_i \quad (2.29)$$

Sendo que $\mathbf{s}_i \mathbf{s}_i = 1$ (produto escalar de dois vetores unitários paralelos), $\mathbf{s}_i(\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{s}_i) = 0$ (produto escalar de dois vetores perpendiculares) e $\mathbf{s}_i(\boldsymbol{\omega}_P \times \mathbf{b}_i) = (\mathbf{b}_i \times \mathbf{s}_i) \cdot \boldsymbol{\omega}_P$ ($\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$). Assim, tem-se

$$\mathbf{s}_i \cdot \mathbf{v}_p + (\mathbf{b}_i \times \mathbf{s}_i) \cdot \boldsymbol{\omega}_B = \dot{d}_i \quad (2.30)$$

$$\mathbf{s}_i \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_d \\ \dot{z}_d \end{bmatrix} + (\mathbf{b}_i \times \mathbf{s}_i) \cdot \dot{\theta} = \dot{d}_i \quad (2.31)$$

Os termos da esquerda estão associados às velocidades da plataforma e formam a matriz J_x (Equação 2.31). Já à direita, estão os termos associados à velocidade das juntas, que formam J_q (Equação 2.32).

$$J_x^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1^T & (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{s}_1)^T \\ \mathbf{s}_2^T & (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{s}_2)^T \\ \mathbf{s}_3^T & (\mathbf{b}_3 \times \mathbf{s}_3)^T \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

$$J_q^{-1} = I_{3 \times 3} \quad (2.32)$$

Assim, obtém-se a relação entre as variáveis que descrevem a velocidade linear e a angular da plataforma móvel e as velocidades dos elos da plataforma plana ($\dot{\mathbf{q}} = J^{-1} \dot{\mathbf{x}}$). Com esta relação, monta-se a matriz jacobiana Inversa (por se tratar da cinemática inversa) deste manipulador (Equação 2.33).

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1^T & (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{s}_1)^T \\ \mathbf{s}_2^T & (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{s}_2)^T \\ \mathbf{s}_3^T & (\mathbf{b}_3 \times \mathbf{s}_3)^T \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

As Equações 2.34 a 2.36 apresentam o desmembramento dos termos \mathbf{s}_i^T .

$$\mathbf{s}_1^T = \frac{\overline{A_1 B_1}^T}{d_1} = \begin{bmatrix} \frac{d_1 \cos \theta_1}{d_1} & \frac{d_1 \sin \theta_1}{d_1} \end{bmatrix} = [\cos \theta_1 \quad \sin \theta_1] \quad (2.34)$$

$$\mathbf{s}_2^T = \frac{\overline{A_2 B_2}^T}{d_2} = \begin{bmatrix} \frac{d_2 \cos \theta_2}{d_2} & \frac{d_2 \sin \theta_2}{d_2} \end{bmatrix} = [\cos \theta_2 \quad \sin \theta_2] \quad (2.35)$$

$$\mathbf{s}_3^T = \frac{\overline{A_3 B_1}^T}{d_3} = \begin{bmatrix} \frac{d_3 \cos \theta_3}{d_3} & \frac{d_3 \sin \theta_3}{d_3} \end{bmatrix} = [\cos \theta_3 \quad \sin \theta_3] \quad (2.36)$$

O produto vetorial $\mathbf{b}_i \times \mathbf{s}_i$ é obtido transformando o primeiro vetor em uma matriz antissimétrica 3 x 3 denominada matriz til (WEBER, H. I., 2009). A Equação 2.37 apresenta o desdobramento deste produto vetorial. Já as Equações 2.38 e 2.39 apresentam o módulo do resultado. A Equação 2.40 apresenta a matriz jacobiana com seus termos explicitados.

$$\mathbf{b}_i \times \mathbf{s}_i = \tilde{\mathbf{b}}_i \mathbf{s}_i = \begin{bmatrix} 0 & -b_{iw} & 0 \\ b_{iw} & 0 & -b_{iu} \\ 0 & b_{iu} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{iu} \\ s_{iv} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{iw} s_{iv} \\ b_{iw} s_{iu} \\ b_{iu} s_{iv} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

$$\|\mathbf{b}_i \times \mathbf{s}_i\| = \tilde{\mathbf{b}}_i \mathbf{s}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \|\mathbf{b}_i\| \\ 0 & \|\mathbf{b}_i\| & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta_i - \theta) \\ \sin(\theta_i - \theta) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \|\mathbf{b}_i\| \sin(\theta_i - \theta) \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Como $\|\mathbf{b}_i\| = b_{iu}$, tem-se a Equação 2.39 (com $i = 1, 2$ e 3). Com isso, a matriz jacobiana inversa é dada pela Equação 2.40.

$$\mathbf{b}_i \times \mathbf{s}_i = b_{iu} \sin(\theta_i - \theta) \quad (2.39)$$

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial d_1}{\partial x} & \frac{\partial d_1}{\partial z} & \frac{\partial d_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial d_2}{\partial x} & \frac{\partial d_2}{\partial z} & \frac{\partial d_2}{\partial \theta} \\ \frac{\partial d_3}{\partial x} & \frac{\partial d_3}{\partial z} & \frac{\partial d_3}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & b_{1u} \sin(\theta_1 - \theta) \\ \cos \theta_2 & \sin \theta_2 & b_{2u} \sin(\theta_2 - \theta) \\ \cos \theta_3 & \sin \theta_3 & b_{3u} \sin(\theta_3 - \theta) \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

nas quais θ_1 , θ_2 e θ_3 são dados pelas Equações 2.41 a 2.43.

$$\theta_1 = \tan^{-1} \left[\frac{b_{1z} - a_{1z}}{b_{1x} - a_{1x}} \right] = \tan^{-1} \left[\frac{z_d + b_{1u} \sin \theta + b_{1w} \cos \theta - a_{1z}}{x_d + b_{1u} \cos \theta - b_{1w} \sin \theta - a_{1x}} \right] \quad (2.41)$$

$$\theta_2 = \pi + \tan^{-1} \left[\frac{b_{2z} - a_{2z}}{b_{2x} - a_{2x}} \right] = \pi + \tan^{-1} \left[\frac{z_d + b_{2u} \sin \theta + b_{2w} \cos \theta - a_{2z}}{x_d + b_{2u} \cos \theta - b_{2w} \sin \theta - a_{2x}} \right] \quad (2.42)$$

$$\theta_3 = \pi + \tan^{-1} \left[\frac{b_{3z} - a_{3z}}{b_{3x} - a_{3x}} \right] = \pi + \tan^{-1} \left[\frac{z_d + b_{3u} \sin \theta + b_{3w} \cos \theta - a_{3z}}{x_d + b_{3u} \cos \theta - b_{3w} \sin \theta - a_{3x}} \right] \quad (2.43)$$

A Equação 2.44 descreve a relação do jacobiano inverso com as variáveis de entrada e saída. Derivando esta expressão com relação ao tempo, obtém-se a Equação 2.45 (CRAIG, J. J., 1989).

$$\dot{\mathbf{q}} = J^{-1} \dot{\mathbf{x}} \quad (2.44)$$

$$\ddot{\mathbf{q}} = J^{-1} \ddot{\mathbf{x}} + \dot{J}^{-1} \dot{\mathbf{x}} \quad (2.45)$$

Lembrando que

$$\dot{J}^{-1} = \frac{\partial J^{-1}}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} \quad (2.46)$$

Assim, tem-se

$$\ddot{\mathbf{q}} = \frac{\partial J^{-1}}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} + J^{-1} \ddot{\mathbf{x}} \quad (2.47)$$

Com a expressão dada na Equação 2.47 obtém-se as acelerações lineares dos elos do mecanismo dadas as velocidades e acelerações, lineares e angulares (associadas à translação e rotação, respectivamente), da plataforma móvel. Para o sistema plano em questão, J^{-1} fica como apresentado na Equação 2.48,

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} -\text{sen } \theta_1 \dot{\theta}_1 & \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 & b_{1u} \cos(\theta_1 - \theta) \cdot (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}) \\ -\text{sen } \theta_2 \dot{\theta}_2 & \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 & b_{2u} \cos(\theta_2 - \theta) \cdot (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}) \\ -\text{sen } \theta_3 \dot{\theta}_3 & \cos \theta_3 \dot{\theta}_3 & b_{3u} \cos(\theta_3 - \theta) \cdot (\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}) \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

na qual $\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_2$ e $\dot{\theta}_3$ são dados pelas Equações 2.49 a 2.51. Nestas Equações,

$$z + b_{1u} \text{sen} \theta + b_{1w} \text{cos} \theta - a_{1z} = \theta_{1num},$$

$$x + b_{1u} \text{cos} \theta - b_{1w} \text{sen} \theta - a_{1z} = \theta_{1den},$$

$$z + b_{2u} \text{sen} \theta + b_{2w} \text{cos} \theta - a_{2z} = \theta_{2num},$$

$$x + b_{2u} \text{cos} \theta - b_{2w} \text{sen} \theta - a_{2z} = \theta_{2den},$$

$$z + b_{3u} \text{sen} \theta + b_{3w} \text{cos} \theta - a_{3z} = \theta_{3num} \text{ e}$$

$$x + b_{3u} \text{cos} \theta - b_{3w} \text{sen} \theta - a_{3z} = \theta_{3den}.$$

$$\dot{\theta}_1 = \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{\theta_{1num}}{\theta_{1den}} \right)^2} \right) \cdot \left(\frac{\theta_{1den}(\dot{z} + b_{1u} \text{c} \theta \dot{\theta} - b_{1w} \text{s} \theta \dot{\theta}) - \theta_{1num}(\dot{x} - b_{1u} \text{s} \theta \dot{\theta} - b_{1w} \text{c} \theta \dot{\theta})}{\theta_{1den}^2} \right) \quad (2.49)$$

$$\dot{\theta}_2 = \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{\theta_{2num}}{\theta_{2den}} \right)^2} \right) \cdot \left(\frac{\theta_{2den}(\dot{z} + b_{2u} \text{c} \theta \dot{\theta} - b_{2w} \text{s} \theta \dot{\theta}) - \theta_{2num}(\dot{x} - b_{2u} \text{s} \theta \dot{\theta} - b_{2w} \text{c} \theta \dot{\theta})}{\theta_{2den}^2} \right) \quad (2.50)$$

$$\dot{\theta}_2 = \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{\theta_{3num}}{\theta_{3den}} \right)^2} \right) \cdot \left(\frac{\theta_{3den}(\dot{z} + b_{3u} c \theta \dot{\theta} - b_{3w} s \theta \dot{\theta}) - \theta_{3num}(\dot{x} - b_{3u} s \theta \dot{\theta} - b_{3w} c \theta \dot{\theta})}{\theta_{3den}^2} \right) \quad (2.51)$$

2.4 Cinemática direta

O problema da cinemática direta consiste em encontrar a posição (vetor \mathbf{p}) e orientação final (matriz de rotação ${}^A R_B$) de um mecanismo a partir dos ângulos (ou deslocamentos lineares, no caso de juntas prismáticas) de entrada.

A relação apresentada na Equação 2.52 descreve o procedimento para a obtenção da matriz jacobiana direta da plataforma através da inversão da jacobiana inversa.

$$J = (J^{-1})^{-1} = \frac{1}{|J^{-1}|} \cdot [C(J^{-1})]^T = \frac{1}{|J^{-1}|} \cdot Adj(J^{-1}) \quad (2.52)$$

na qual $|J^{-1}|$ é a expressão do determinante da jacobiana inversa (Equação 2.53) e $C(J^{-1})^T$ é a transposta da matriz dos cofatores, que é igual à $Adj(J^{-1})$, a matriz adjunta da jacobiana inversa.

$$\begin{aligned} |J^{-1}| = & -\cos \theta_1 \sin \theta_2 b_{3u} \sin(\theta - \theta_3) + \cos \theta_1 b_{2u} \sin(\theta - \theta_2) \sin \theta_3 \\ & + \cos \theta_2 \sin \theta_1 b_{3u} \sin(\theta - \theta_3) + \cos \theta_2 b_{1u} \sin(\theta_1 - \theta) \sin \theta_3 \\ & - \cos \theta_3 \sin \theta_1 b_{2u} \sin(\theta - \theta_2) - \cos \theta_3 b_{1u} \sin(\theta_1 - \theta) \sin \theta_2 \end{aligned} \quad (2.53)$$

As Equações 2.54 a 2.63 apresentam a matriz adjunta da jacobiana inversa e seus respectivos termos.

$$[C(J^{-1})]^T = \begin{bmatrix} [C(J^{-1})]_{11}^T & [C(J^{-1})]_{12}^T & [C(J^{-1})]_{13}^T \\ [C(J^{-1})]_{21}^T & [C(J^{-1})]_{22}^T & [C(J^{-1})]_{23}^T \\ [C(J^{-1})]_{31}^T & [C(J^{-1})]_{32}^T & [C(J^{-1})]_{33}^T \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

$$[C(J^{-1})]_{11}^T = -\sin \theta_2 b_{3u} \sin(\theta - \theta_3) + b_{2u} \sin(\theta - \theta_2) \sin \theta_3 \quad (2.55)$$

$$[C(J^{-1})]_{12}^T = \sin \theta_1 b_{3u} \sin(\theta - \theta_3) + b_{1u} \sin(\theta_1 - \theta) \sin \theta_3 \quad (2.56)$$

$$[C(J^{-1})]_{13}^T = -\sin \theta_1 b_{2u} \sin(\theta - \theta_2) - b_{1u} \sin(\theta_1 - \theta) \sin \theta_2 \quad (2.57)$$

$$[C(J^{-1})]_{21}^T = \cos \theta_2 b_{3u} \sin(\theta - \theta_3) - b_{2u} \sin(\theta - \theta_2) \cos \theta_3 \quad (2.58)$$

$$[C(J^{-1})]_{22}^T = -\cos \theta_1 b_{3u} \sin(\theta - \theta_3) - b_{1u} \sin(\theta_1 - \theta) \cos \theta_3 \quad (2.59)$$

$$[C(J^{-1})]_{23}^T = \cos \theta_1 b_{2u} \sin(\theta - \theta_2) + \cos \theta_2 b_{1u} \sin(\theta_1 - \theta) \quad (2.60)$$

$$[C(J^{-1})]_{31}^T = \cos \theta_2 \sin \theta_3 - \sin \theta_2 \cos \theta_3 \quad (2.61)$$

$$[C(J^{-1})]_{32}^T = -\cos \theta_1 \sin \theta_3 + \sin \theta_1 \cos \theta_3 \quad (2.62)$$

$$[C(J^{-1})]_{33}^T = \cos \theta_1 \sin \theta_2 - \cos \theta_2 \sin \theta_1 \quad (2.63)$$

Dividindo por $|J^I|$ obtém-se a matriz jacobiana direta da plataforma plana (Equações 2.64 a 2.73).

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial d_1} & \frac{\partial x}{\partial d_2} & \frac{\partial x}{\partial d_3} \\ \frac{\partial z}{\partial d_1} & \frac{\partial z}{\partial d_2} & \frac{\partial z}{\partial d_3} \\ \frac{\partial \theta}{\partial d_1} & \frac{\partial \theta}{\partial d_2} & \frac{\partial \theta}{\partial d_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

$$J_{11} = \frac{-\operatorname{sen} \theta_2 b_{3u} \operatorname{sen}(\theta - \theta_3) + b_{2u} \operatorname{sen}(\theta - \theta_2) \operatorname{sen} \theta_3}{|J^{-1}|} \quad (2.65)$$

$$J_{12} = \frac{\operatorname{sen} \theta_1 b_{3u} \operatorname{sen}(\theta - \theta_3) + b_{1u} \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta) \operatorname{sen} \theta_3}{|J^{-1}|} \quad (2.66)$$

$$J_{13} = \frac{-\operatorname{sen} \theta_1 b_{2u} \operatorname{sen}(\theta - \theta_2) - b_{1u} \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta) \operatorname{sen} \theta_2}{|J^{-1}|} \quad (2.67)$$

$$J_{21} = \frac{\cos \theta_2 b_{3u} \operatorname{sen}(\theta - \theta_3) - b_{2u} \operatorname{sen}(\theta - \theta_2) \cos \theta_3}{|J^{-1}|} \quad (2.68)$$

$$J_{22} = \frac{-\cos \theta_1 b_{3u} \operatorname{sen}(\theta - \theta_3) - b_{1u} \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta) \cos \theta_3}{|J^{-1}|} \quad (2.69)$$

$$J_{23} = \frac{\cos \theta_1 b_{2u} \operatorname{sen}(\theta - \theta_2) + \cos \theta_2 b_{1u} \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta)}{|J^{-1}|} \quad (2.70)$$

$$J_{31} = \frac{\cos \theta_2 \operatorname{sen} \theta_3 - \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_3}{|J^{-1}|} \quad (2.71)$$

$$J_{32} = \frac{-\cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_3 + \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_3}{|J^{-1}|} \quad (2.72)$$

$$J_{33} = \frac{\cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 - \cos \theta_2 \operatorname{sen} \theta_1}{|J^{-1}|} \quad (2.73)$$

A Equação 2.74 descreve a relação do jacobiano direto com as variáveis de entrada e saída. Derivando esta expressão com relação ao tempo, obtém-se a Equação 2.75.

$$\dot{\mathbf{x}} = J\dot{\mathbf{q}} \quad (2.74)$$

$$\ddot{\mathbf{x}} = \dot{J}\dot{\mathbf{q}} + J\ddot{\mathbf{q}} \quad (2.75)$$

Da expressão do jacobiano direto obtida nas Equações 2.64 a 2.73 observa-se que esta matriz continua tendo como entradas a posição e a orientação da plataforma móvel, ou seja, o vetor \mathbf{x} . Assim, sua derivada no tempo será escrita como

$$\dot{\mathbf{j}} = \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} \quad (2.76)$$

Assim, tem-se

$$\ddot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{j} \ddot{\mathbf{q}} \quad (2.77)$$

Com a expressão dada na Equação 2.77 obtém-se as acelerações lineares e angulares (associadas à translação e rotação, respectivamente) da plataforma móvel dadas as velocidades e acelerações lineares dos elos do mecanismo. A partir da Equação 2.75, isolando $\ddot{\mathbf{q}}$, obtém-se outra relação entre as acelerações dos atuadores e as acelerações da plataforma móvel (Equação 2.78).

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1} \ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{J}^{-1} \dot{\mathbf{j}} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1} \ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{J}^{-1} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (2.78)$$

Seguindo a mesma linha e usando como base a Equação 2.47 chega-se a

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{J} \ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{J} \dot{\mathbf{J}}^{-1} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J} \ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{J} \frac{\partial \mathbf{J}^{-1}}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} \quad (2.79)$$

Para a plataforma plana em estudo, a derivada no tempo da matriz jacobiana direta (Equação 2.76) é representada pela Equação 2.80. A Equação 2.81 apresenta a solução de cada termo.

$$j = \begin{bmatrix} \dot{J}_{11} & \dot{J}_{12} & \dot{J}_{13} \\ \dot{J}_{21} & \dot{J}_{22} & \dot{J}_{23} \\ \dot{J}_{31} & \dot{J}_{32} & \dot{J}_{33} \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

$$\dot{J}_{nm} = \frac{|J^{-1}| [C(J^{-1})]^T_{nm} - [C(J^{-1})]^T_{nm} |J^{-1}|}{|J^{-1}|^2} \quad (2.81)$$

As derivadas do determinante e dos termos da matriz adjunta do jacobiano são apresentadas nas Equações 2.82 a 2.91. Lembrando que $\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_2$ e $\dot{\theta}_3$ são dados pelas Equações 2.49 a 2.51, tem-se

$$\begin{aligned} |J^{-1}| &= \dot{\theta}_1 [b_{1u} \cos(\theta_1 - \theta) \sin(\theta_2 - \theta_3) \\ &\quad - b_{2u} \sin(\theta - \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_3) + b_{3u} \sin(\theta - \theta_3) \cos(\theta_1 - \theta_2)] \\ &\quad + \dot{\theta}_2 [-b_{1u} \sin(\theta_1 - \theta) \cos(\theta_2 - \theta_3) \\ &\quad + b_{2u} \cos(\theta - \theta_2) \sin(\theta_3 - \theta_1) - b_{3u} \sin(\theta - \theta_3) \cos(\theta_1 - \theta_2)] \\ &\quad + \dot{\theta}_3 [b_{1u} \sin(\theta_1 - \theta) \cos(\theta_2 - \theta_3) \\ &\quad + b_{2u} \sin(\theta - \theta_2) \cos(\theta_3 - \theta_1) - b_{3u} \cos(\theta - \theta_3) \sin(\theta_1 - \theta_2)] \\ &\quad + \dot{\theta} [b_{1u} \cos(\theta_1 - \theta) \sin(\theta_2 - \theta_3) \\ &\quad + b_{2u} \cos(\theta - \theta_2) \sin(\theta_1 - \theta_3) - b_{3u} \cos(\theta - \theta_3) \sin(\theta_2 - \theta_1)] \end{aligned} \quad (2.82)$$

$$\begin{aligned} [C(J^{-1})]^T_{11} &= -\cos \theta_2 \dot{\theta}_2 b_{3u} \sin(\theta - \theta_3) - \sin \theta_2 b_{3u} \cos(\theta - \theta_3) (\dot{\theta} - \dot{\theta}_3) \\ &\quad + b_{2u} \cos(\theta - \theta_2) (\dot{\theta} - \dot{\theta}_2) \sin \theta_3 + b_{2u} \sin(\theta - \theta_2) \cos \theta_3 \dot{\theta}_3 \end{aligned} \quad (2.83)$$

$$\begin{aligned} [C(J^{-1})]^T_{12} &= \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 b_{3u} \sin(\theta - \theta_3) + \sin \theta_1 b_{3u} \cos(\theta - \theta_3) (\dot{\theta} - \dot{\theta}_3) \\ &\quad + b_{1u} \cos(\theta_1 - \theta) (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}) \sin \theta_3 + b_{1u} \sin(\theta_1 - \theta) \cos \theta_3 \dot{\theta}_3 \end{aligned} \quad (2.84)$$

$$\begin{aligned} [C(J^{-1})]^T_{13} &= -\cos \theta_1 \dot{\theta}_1 b_{2u} \sin(\theta - \theta_2) - \sin \theta_1 b_{2u} \cos(\theta - \theta_2) (\dot{\theta} - \dot{\theta}_2) \\ &\quad - b_{1u} \cos(\theta_1 - \theta) (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}) \sin \theta_2 - b_{1u} \sin(\theta_1 - \theta) \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 \end{aligned}$$

(2.85)

$$\begin{aligned}
[C(J^{-1})]_{21}^T &= -\text{sen } \theta_2 \dot{\theta}_2 b_{3u} \text{sen}(\theta - \theta_3) + \cos \theta_2 b_{3u} \cos(\theta - \theta_3) (\dot{\theta} - \dot{\theta}_3) \\
&\quad - b_{2u} \cos(\theta - \theta_2) (\dot{\theta} - \dot{\theta}_2) \cos \theta_3 + b_{2u} \text{sen}(\theta - \theta_2) \text{sen } \theta_3 \dot{\theta}_3
\end{aligned}
\tag{2.86}$$

$$\begin{aligned}
[C(J^{-1})]_{22}^T &= \text{sen } \theta_1 \dot{\theta}_1 b_{3u} \text{sen}(\theta - \theta_3) - \cos \theta_1 b_{3u} \cos(\theta - \theta_3) (\dot{\theta} - \dot{\theta}_3) \\
&\quad - b_{1u} \cos(\theta_1 - \theta) (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}) \cos \theta_3 + b_{1u} \text{sen}(\theta_1 - \theta) \text{sen } \theta_3 \dot{\theta}_3
\end{aligned}
\tag{2.87}$$

$$\begin{aligned}
[C(J^{-1})]_{23}^T &= -\text{sen } \theta_1 \dot{\theta}_1 b_{2u} \text{sen}(\theta - \theta_2) + \cos \theta_1 b_{2u} \cos(\theta - \theta_2) (\dot{\theta} - \dot{\theta}_2) \\
&\quad - \text{sen } \theta_2 \dot{\theta}_2 b_{1u} \text{sen}(\theta_1 - \theta) + \cos \theta_2 b_{1u} \cos(\theta_1 - \theta) (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta})
\end{aligned}
\tag{2.88}$$

$$\begin{aligned}
[C(J^{-1})]_{31}^T &= -\text{sen } \theta_2 \dot{\theta}_2 \text{sen } \theta_3 + \cos \theta_2 \cos \theta_3 \dot{\theta}_3 - \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_3 \\
&\quad + \text{sen } \theta_2 \text{sen } \theta_3 \dot{\theta}_3
\end{aligned}
\tag{2.89}$$

$$\begin{aligned}
[C(J^{-1})]_{32}^T &= \text{sen } \theta_1 \dot{\theta}_1 \text{sen } \theta_3 - \cos \theta_1 \cos \theta_3 \dot{\theta}_3 + \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_3 \\
&\quad - \text{sen } \theta_1 \text{sen } \theta_3 \dot{\theta}_3
\end{aligned}
\tag{2.90}$$

$$\begin{aligned}
[C(J^{-1})]_{33}^T &= -\text{sen } \theta_1 \dot{\theta}_1 \text{sen } \theta_2 + \cos \theta_1 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 + \text{sen } \theta_2 \dot{\theta}_2 \text{sen } \theta_1 \\
&\quad - \cos \theta_2 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1
\end{aligned}
\tag{2.91}$$

2.5 Condições de singularidade

Para realizar diversas tarefas, o movimento de cada junta do manipulador deve ser cuidadosamente coordenado. Existem dois tipos de problemas de

coordenação, chamados problemas diretos e inversos de velocidade. No problema direto de velocidade, as variações de entrada das juntas são dadas e o objetivo é encontrar o estado de velocidades da plataforma móvel. No problema inverso, o estado de velocidades é dado e as velocidades de entrada das juntas requeridas para produzir esta velocidade desejada têm que ser encontradas. A matriz jacobiana é definida como a matriz que transforma as velocidades das juntas no espaço dos atuadores no estado de velocidades no espaço compreendido pela plataforma móvel.

A matriz jacobiana é útil também em outras aplicações. Em algumas configurações do mecanismo a matriz jacobiana pode perder seu posto (*rank*) completo. Estas condições são chamadas de singulares. Numa condição singular um mecanismo paralelo pode ganhar ou perder graus de liberdade. Uma importante limitação deste tipo de mecanismo é que as configurações de singularidade podem existir dentro de seu espaço de trabalho, no qual este ganha um ou mais graus de liberdade, perdendo completamente sua rigidez. Dependendo de qual matriz seja singular (jacobiana direta ou jacobiana inversa) o mecanismo pode estar em uma configuração singular da cinemática direta, inversa ou até de ambas (TSAI, L. W., 1999).

A análise da jacobiana de manipuladores paralelos é um problema muito mais difícil do que o de manipuladores seriais porque existem diversos elos que formam certo número de cadeias fechadas.

Sendo as variáveis das juntas denotadas pelo vetor \mathbf{q} e a localização da plataforma móvel descrita pelo vetor \mathbf{x} , então as restrições cinemáticas impostas pelos membros podem ser escritas de forma geral como

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (2.92)$$

na qual \mathbf{f} é uma função implícita n -dimensional de \mathbf{q} e \mathbf{x} e $\mathbf{0}$ é um vetor de zeros n -dimensional (TSAI, L. W., 1999).

Derivando a Equação 2.92 em relação ao tempo, obtém-se a relação entre as velocidades de entrada das juntas e as velocidades de saída da plataforma móvel como segue

$$J_x \dot{\mathbf{x}} = J_q \dot{\mathbf{q}} \quad (2.93)$$

na qual

$$J_x = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \quad \text{e} \quad J_q = -\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}}$$

A derivação acima leva a duas matrizes jacobianas separadas. Portanto, a matriz jacobiana global, J , pode ser escrita como

$$\dot{\mathbf{q}} = J^{-1} \dot{\mathbf{x}} \quad (2.94)$$

na qual $J^{-1} = J_q^{-1} J_x$. Devido à existência de duas matrizes jacobianas (inversa e direta), um manipulador paralelo é dito em uma configuração singular quando J , J^l ou ambos são singulares. Assim podem-se identificar três tipos de singularidade (TSAI, L. W., 1999):

1. *Singularidade da cinemática inversa*: Uma singularidade da cinemática inversa ocorre quando o determinante de J^l é zero.

$$|J^{-1}| = 0 \quad (2.95)$$

$$\begin{aligned} & -\cos \theta_1 \sin \theta_2 b_{3u} \sin(\theta - \theta_3) + \cos \theta_1 b_{2u} \sin(\theta - \theta_2) \sin \theta_3 + \\ & \cos \theta_2 \sin \theta_1 b_{3u} \sin(\theta - \theta_3) + \cos \theta_2 b_{1u} \sin(\theta_1 - \theta) \sin \theta_3 - \\ & \cos \theta_3 \sin \theta_1 b_{2u} \sin(\theta - \theta_2) - \cos \theta_3 b_{1u} \sin(\theta_1 - \theta) \sin \theta_2 = 0 \end{aligned} \quad (2.96)$$

Quando J^l é singular e o espaço nulo de J^l não é vazio, existem alguns vetores $\dot{\mathbf{q}}$ não-nulos que resultam em vetores $\dot{\mathbf{x}}$ iguais a zero. Movimentos infinitesimais da plataforma móvel em certas direções não podem ser realizados. Portanto, o mecanismo perde um ou mais graus de liberdade.

2. *Singularidade da cinemática direta*: Uma singularidade da cinemática direta ocorre quando o determinante de J é zero.

$$|J| = 0 \quad (2.97)$$

Assumindo a presença de tal condição singular, com o espaço nulo de J não vazio, existem alguns vetores $\dot{\mathbf{x}}$ não nulos que resultam em vetores $\dot{\mathbf{q}}$ iguais a zero. Isto é, a plataforma móvel pode possuir movimento infinitesimal em algumas direções enquanto os atuadores estão completamente bloqueados. Portanto, a plataforma móvel ganha um ou mais graus de liberdade. Em outras palavras, em uma configuração singular da cinemática direta, o manipulador não consegue resistir a forças e momentos em algumas direções. Condições de singularidade da cinemática direta ocorrem normalmente quando diferentes ramos das soluções da cinemática direta se encontram.

3. *Singularidades combinadas*: Uma singularidade combinada ocorre quando os determinantes de J e J^l são ambos iguais a zero. Geralmente, este tipo de singularidade ocorre apenas em certos manipuladores com uma arquitetura cinemática peculiar. A plataforma móvel pode sofrer movimentos infinitesimais enquanto todos os atuadores estão travados. Por outro lado, também pode se manter estacionária enquanto que os atuadores realizam movimentos infinitesimais.

Uma avaliação de singularidades no manipulador pode ser feita pelo uso do número de condição λ dado por

$$\lambda(J^{-1}) = \|J^{-1}\| \cdot \|J\| \quad (2.98)$$

na qual $\|\cdot\|$ é a norma-2 da matriz. Quanto mais próximo λ for de 1, melhor condicionada é a matriz. Outro número importante neste tipo de avaliação é o número de condição de reciprocidade ($r\lambda$; Equação 2.99), que é sempre menor ou igual a 1.

$$r\lambda(J^{-1}) = \frac{1}{\text{norma1}(J^{-1}) \cdot \text{norma1}(J)} \quad (2.99)$$

Da mesma forma que λ , quanto mais próximo de 1, melhor condicionada é a matriz. Porém, quanto mais próximo este número estiver de zero, mais próximo o mecanismo se encontra de uma condição de singularidade. Este último é um

método mais eficiente, porém menos confiável, de estimar a condição de uma matriz. (STAMPER, R. E., *et al*, 1997).

O mesmo tipo de análise poder ser feito para as matrizes dos derivativos das jacobianas inversa (J^{-1}) e direta (J). Esta análise das singularidades dos derivativos da jacobiana é comumente usada no estudo da rigidez destes mecanismos, como por exemplo, na modificação da rigidez ativa em determinada direção do espaço (SIMAAN, N., *et al*, 2003).

2.6 Equilíbrio estático

A análise do equilíbrio estático deste mecanismo visa determinar as condições nas quais o atuador permanece em repouso dada uma pressão de alimentação p_f na entrada das válvulas de comando dos atuadores como descrito na Seção 4.1, onde será discutida a dinâmica dos atuadores usados neste mecanismo. Os valores dos carregamentos nos atuadores obtidos a partir deste modelo de equilíbrio estático (Seções 5.2.5 e 5.3.5) serão usados nas simulações da dinâmica e controle do sistema de atuação e dos simuladores de movimentos (Seções 5.1, 5.2.6 e 5.3.6).

Devido à existência de diversos encadeamentos fechados, o método recursivo de análise, muito usado em manipuladores seriais, já não se aplica. Em geral, é necessário derivar as equações de equilíbrio de força e momento para cada elo e então resolver as equações simultaneamente. No entanto, se apenas as forças e/ou torques dos atuadores forem de interesse, pode-se aplicar o princípio do trabalho virtual (TSAI, L. W., 1999).

2.6.1 Abordagem pelo Diagrama de Corpo Livre

Um manipulador paralelo consiste de diversos membros formados por elos binários. A análise pode ser muito simplificada se for levado em consideração o fato de que estes elos binários suportarão apenas esforços de tração ou compressão. Por exemplo, se nenhum carregamento externo é aplicado a um elo binário de um mecanismo planar, o elo estará sujeito apenas à tração ou

compressão ao longo da linha que passa pelas duas juntas rotativas. Similarmente, se nenhum carregamento externo é aplicado a uma cadeia de um elo binário rotativo-rotativo em um mecanismo plano, o elo estará sujeito apenas à tração e compressão ao longo da linha que passa através dos centros das duas esferas.

Considerando o mecanismo paralelo mostrado na Figura 2.4, tem-se que O é a origem do sistema fixo (x, z) localizado no centroide da base fixa com seu eixo x na linha dos pontos de acoplamento, A_i , com $i = 1$ a 3. A origem P do sistema de referência móvel (u, w) está localizada no centroide da plataforma móvel, com seu eixo u na linha dos acoplamentos B_i , com $i = 1$ a 3. Nesta análise serão desprezados os efeitos da gravidade. Precisam-se encontrar as forças f_1s_1 , f_2s_2 e f_3s_3 dos atuadores requeridas para realizar uma força de saída $\mathbf{f} = [f_u, f_w]^T$ e um momento $\mathbf{n} = \mathbf{M}_P$ no centroide da plataforma móvel.

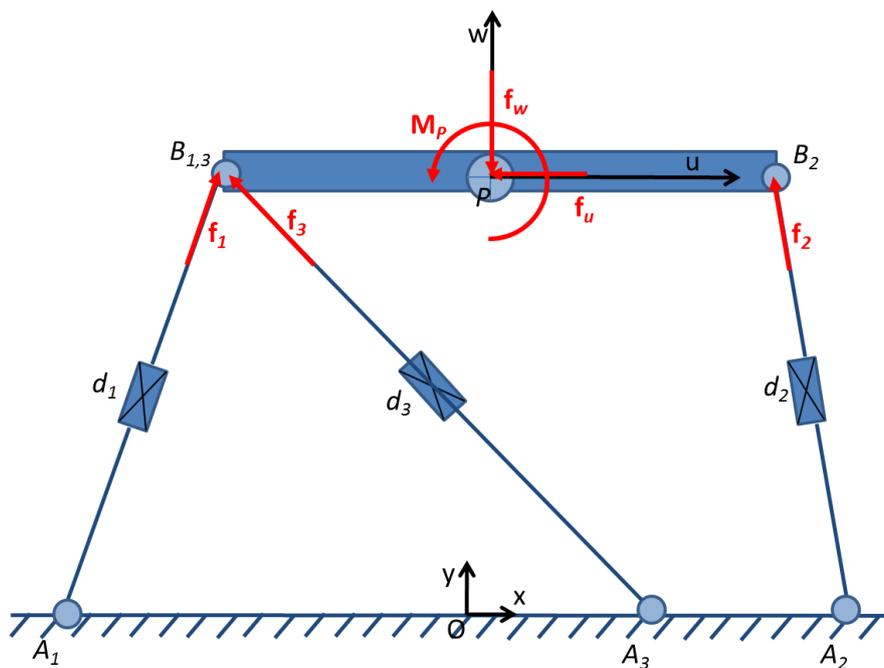


Figura 2.4: Forças e momentos que atuam na plataforma móvel do mecanismo plano.

As forças e momentos associados às restrições de cada junta prismática podem ser considerados como internos ao membro. Por causa da construção esférica-esférica, nenhum momento é transmitido ao membro. Além disso, as forças de reação em cada junta esférica apontam ao longo da linha A_iB_i definida

pelos centros das duas esferas. Portanto, as forças atuando na plataforma móvel por cada membro podem ser escritas como

$$\mathbf{f}_i = f_i \mathbf{s}_i \quad (2.100)$$

para $i = 1, 2, 3$ e na qual o subscrito i representa o i -ésimo membro, f_i denota a magnitude de \mathbf{f}_i e \mathbf{s}_i é o vetor unitário que aponta da junta esférica da base para a junta esférica da plataforma móvel do i -ésimo membro, ou seja, $\mathbf{s}_i = \mathbf{d}_i/d_i$.

Somando todas as forças que atuam na plataforma móvel e os momentos destas forças sobre o centroide P , obtém-se

$$\sum_{i=1}^3 f_i \mathbf{s}_i = \mathbf{f} \quad (2.101)$$

$$\sum_{i=1}^3 f_i \mathbf{b}_i \times \mathbf{s}_i = \mathbf{n} \quad (2.102)$$

na qual $\mathbf{b}_i = \overline{PB_i}$. As Equações 2.101 e 2.102 representam seis equações escalares em f_i que podem ser escritas na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_u \\ \mathbf{f}_w \\ \mathbf{M}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 & \mathbf{s}_2 & \mathbf{s}_3 \\ \mathbf{b}_1 \times \mathbf{s}_1 & \mathbf{b}_2 \times \mathbf{s}_2 & \mathbf{b}_3 \times \mathbf{s}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \quad (2.103)$$

A Equação 2.103 representa a transformação entre as forças de saída da plataforma móvel e as forças lineares dos atuadores. Os vetores \mathbf{b}_i e \mathbf{s}_i são obtidos na análise cinemática. Uma vez dadas as forças nos atuadores, as forças na plataforma móvel podem ser calculadas diretamente pela Equação 2.103. Em contrapartida, se as forças na plataforma móvel são dadas, podem-se achar as forças nos atuadores correspondentes pela transformação inversa desta equação.

2.6.2 Aplicação do Princípio do Trabalho Virtual

Existem dois tipos de juntas em um manipulador paralelo: juntas passivas e ativas. Assumindo que estas estão livres de atrito e que os efeitos da gravidade são insignificantes, as forças de reação nas juntas passivas não contribuem para o trabalho virtual (TSAI, L. W., 1999).

Seja $\mathbf{F} = [\mathbf{f}, \mathbf{n}]^T$ o vetor que representa as forças e momentos de saída na plataforma móvel, $\boldsymbol{\tau} = [f_1, f_2, f_3]^T$ o vetor que representa as forças e torques nas juntas ativas, $\delta\mathbf{q} = [\delta q_1, \delta q_2, \delta q_3]^T$ o vetor que representa o deslocamento virtual associado às juntas ativas e $\delta\mathbf{x} = [\delta x, \delta z, \delta\theta]^T$ o vetor que representa os deslocamentos virtuais associados à plataforma móvel, então o trabalho virtual de todas as forças ativas pode ser escrito como

$$\boldsymbol{\tau}^T \delta\mathbf{q} - \mathbf{F}^T \delta\mathbf{x} = 0 \quad (2.104)$$

Entretanto, os deslocamentos virtuais $\delta\mathbf{q}$ e $\delta\mathbf{x}$ se relacionam pela matriz jacobiana inversa pela relação $\delta\mathbf{q} = J\delta\mathbf{x}$, na qual $J^{-1} = J_q^{-1}J_x$. Substituindo esta relação na Equação 2.104, tem-se

$$(\boldsymbol{\tau}^T J^{-1} - \mathbf{F}^T) \delta\mathbf{x} = 0 \quad (2.105)$$

Uma vez que a Equação 2.105 vale para qualquer deslocamento virtual $\delta\mathbf{x}$, pode-se concluir que

$$\boldsymbol{\tau}^T J^{-1} - \mathbf{F}^T = 0 \quad (2.106)$$

Fazendo a transposta da Equação 2.106, obtém-se

$$\mathbf{F} = J^{-1T} \boldsymbol{\tau} \quad (2.107)$$

A Equação 2.107 dá as forças de saída da plataforma móvel em termos dos torques e/ou forças das juntas ativas, ou vice-versa, por vias da transformação inversa. Sabendo que a jacobiana geral da Plataforma Stewart é dada por

$$J^{-1} = J_q^{-1} J_x = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1^T & (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{s}_1)^T \\ \mathbf{s}_2^T & (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{s}_2)^T \\ \mathbf{s}_3^T & (\mathbf{b}_3 \times \mathbf{s}_3)^T \end{bmatrix} \quad (2.108)$$

Substituindo a Equação 2.107 na Equação 2.108, obtém-se a expressão que representa a transformação entre as forças de saída da plataforma móvel e as forças lineares dos atuadores, assim como foi obtido no Item 2.6.1 pelo Diagrama de Corpo Livre

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_u \\ \mathbf{f}_w \\ \mathbf{M}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 & \mathbf{s}_2 & \mathbf{s}_3 \\ \mathbf{b}_1 \times \mathbf{s}_1 & \mathbf{b}_2 \times \mathbf{s}_2 & \mathbf{b}_3 \times \mathbf{s}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

Invertendo a relação da Equação 2.107, obtém-se a expressão que representa a transformação entre as forças lineares dos atuadores e as forças de saída da plataforma móvel (Equações 2.109 e 2.110, respectivamente).

$$\boldsymbol{\tau} = J^T \mathbf{F} \quad (2.109)$$

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = J^T \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} \quad (2.110)$$

3 Modelo da Plataforma Stewart

Grande parte dos manipuladores paralelos de seis graus de liberdade já estudados consiste de seis membros extensíveis. Estes manipuladores paralelos possuem a vantagem de ter uma alta rigidez, baixa inércia e uma grande capacidade de carga. Contudo, têm um reduzido espaço de trabalho, além de comumente gerarem mais dificuldades em seus projetos. Suas cinemáticas diretas são um grande problema. Apenas em algumas formas especiais da Plataforma de Stewart-Gough foram encontradas soluções analíticas fechadas para sua cinemática direta. Nestas soluções, normalmente são empregados pares de juntas esféricas concêntricas na configuração geométrica da plataforma. Porém, esta configuração apresenta inúmeros problemas de fabricação, tornando-a ainda inviável.

Neste Capítulo será apresentada de maneira formal a cinemática inversa da Plataforma Stewart. Contudo, como se trata de um manipulador paralelo, sua cinemática direta não possui solução analítica. Por esta razão, neste documento serão apresentadas formas de obtê-la usando algumas aproximações e métodos numéricos. Os problemas para encontrar a solução da dinâmica direta são semelhantes aos da cinemática direta.

3.1 Graus de liberdade

Na Plataforma Stewart analisada nesta Seção são empregados três tipos de juntas: juntas cardânicas ou universais (que são constituídas de duas juntas rotativas), juntas esféricas e juntas prismáticas (TSAI, L. W., 1999).

Uma junta universal (U) é essencialmente a combinação de duas juntas rotativas que se interceptam, formando assim uma junta de dois graus de

liberdade. Uma junta esférica (S) permite que um elemento gire livremente em relação a outro em torno do centro de uma esfera em todas as orientações possíveis. Não há translação entre os elementos ligados. Assim, a junta esférica impõe três restrições ao movimento destes elementos, formando assim uma junta com três graus de liberdade (TSAI, L. W., 1999).

A Figura 3.1 mostra a Plataforma Stewart, um mecanismo espacial no qual uma plataforma móvel é conectada a uma base fixa com seis membros extensíveis por juntas esféricas. Pode ser usada uma combinação de juntas esféricas e universais também. Neste exemplo serão avaliados os efeitos da escolha de cada configuração. Cada membro é constituído por dois elos conectados por uma junta prismática. Esta construção é denominada S-P-S (TSAI, L. W., 1999). Nesta configuração há um grau de liberdade passivo associado a cada membro. Assim, usando a Equação 2.1, tem-se $A = 6$, $n = 14$, $j_1 = 6$ (juntas prismáticas), $j_3 = 12$ (juntas esféricas) e $f_p = 6$. O valor dos graus de liberdade do manipulador é dado por $F = 6(14 - 18 - 1) + (12 \times 3 + 6) - 6 = 6$. Estes seis graus de liberdade estão associados à translação nas três direções do espaço vetorial (x , y e z ou *surge*, *sway* e *heave*) e à rotação ao redor destes três eixos (ϕ , θ e ψ ou *roll*, *pitch* e *yaw*).

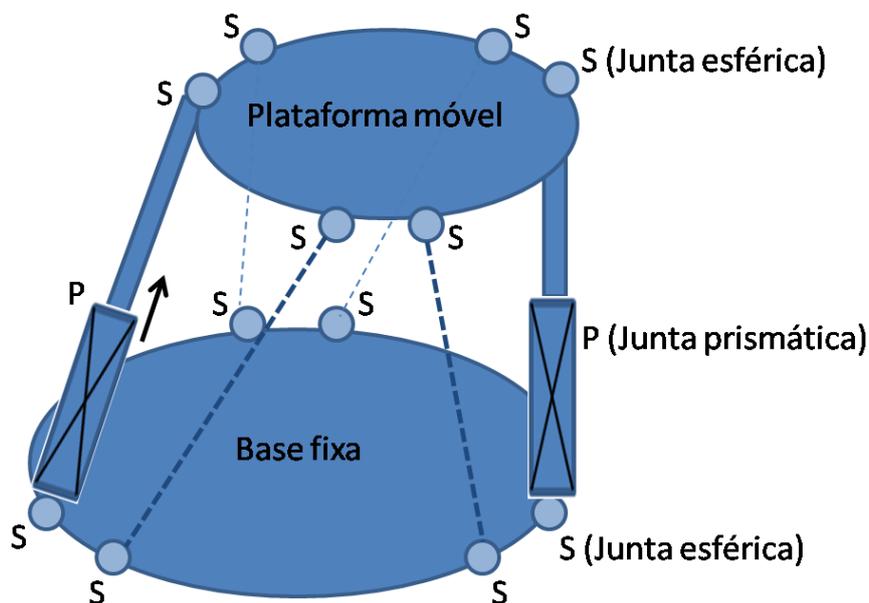


Figura 3.1: Plataforma Stewart na configuração S-P-S.

Os 6 graus de liberdade passivos são oriundos da configuração S-P-S. Se, ao invés de se usar 12 juntas esféricas, forem usadas 6 esféricas e 6 juntas universais, formando uma configuração U-P-S, estes graus de liberdade passivos são eliminados. Estes graus de liberdade estão associados à rotação do membro formado pelos elos separados por cada junta prismática ao redor do eixo formado pela própria direção deste membro. Em um sistema físico real, esta rotação pode ocasionar problemas devido à disposição das mangueiras e cabos que são conectados ao atuador, que constitui a junta prismática e seus respectivos elos (TSAI, L. W., 1999).

Aplicando a Equação 2.3 na Plataforma Stewart com configuração S-P-S, tem-se $A = 6$, $n = 14$, $j = 18$. Assim, existem $L = 18 - 14 + 1 = 5$ malhas independentes. O lado direito da Equação 2.3 leva a $F + AL = 6 + 6 \times 5 = 36$, enquanto que o lado esquerdo nos dá $\sum f_i = 3 \times 12 + 6 = 42$. A diferença é devido à existência de seis graus de liberdade passivos (valor de f_p ; TSAI, L. W., 1999).

Em manipuladores paralelos espaciais, como é o caso da Plataforma Stewart em estudo, substitui-se $A = 6$ nas Equações 2.5 e 2.6 e assim obtém-se

$$\sum_{k=1}^m C_k = 7F - 6 \quad (3.1)$$

e

$$6 \geq C_k \geq F \quad (3.2)$$

Resolvendo as Equações 3.1 e 3.2 simultaneamente para valores inteiros positivos de C_k , $k = 1, 2, 3, \dots$, pode-se classificar este manipulador paralelo de acordo com seus graus de liberdade e conectividade (TSAI, L. W., 1999), como mostra a Tabela 3.1.

Tabela 3.1: Classificação da Plataforma Stewart.

Graus de liberdade (F)	Número de malhas (L)	Somatório dos graus de liberdade de todas as juntas ($\sum f_i$)	Conectividade (C_k) para $k = [1,6]$
6	5	36	6,6,6,6,6,6

3.2 Geometria inversa

A Figura 3.2 mostra um manipulador paralelo com configuração 6 S-P-S conhecido como Plataforma Stewart-Gough. Seis membros idênticos conectam a plataforma móvel à base fixa por juntas esféricas nos pontos B_i e A_i , com $i = 1, 2, 3, 4, 5$ e 6 .

Usando o sistema de coordenadas mostrado na Figura 3.2, adiciona-se um referencial $A(x, y, z)$ fixado à base da plataforma e outro, $B(u, v, w)$ acoplado à plataforma móvel. Outro sistema de referências $C(x_i, y_i, z_i)$ é fixado à cada junta universal, tendo assim, sua origem no ponto A_i (sendo i referente à i -ésima junta universal; $i = 1, 2, \dots, 6$). O eixo z_i deste sistema aponta de A_i para B_i (direção do atuador i), o eixo y_i é paralelo ao produto interno dos dois vetores unitários definidos ao longo dos eixos z_i e z (Figura 3.2) e o eixo x_i é então obtido pela regra da mão direita. Por conveniência, a origem do sistema B é localizada no centro de massa da plataforma móvel (na direção de P). A localização da plataforma móvel pode ser descrita pela posição do vetor \mathbf{p} e da matriz de rotação ${}^A R_B$ (WANG, Y., 2009). Sendo \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{w} , três vetores unitários definidos ao longo dos eixos u , v e w do sistema de coordenadas móvel, então a matriz de rotação pode ser escrita como

$${}^A R_B = \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Note que os elementos de ${}^A R_B$ devem satisfazer as condições de ortogonalidade das Equações 3.4 a 3.9.

$$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 1 \quad (3.4)$$

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = 1 \quad (3.5)$$

$$w_x^2 + w_y^2 + w_z^2 = 1 \quad (3.6)$$

$$u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z = 0 \quad (3.7)$$

$$u_x w_x + u_y w_y + u_z w_z = 0 \quad (3.8)$$

$$v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z = 0 \quad (3.9)$$

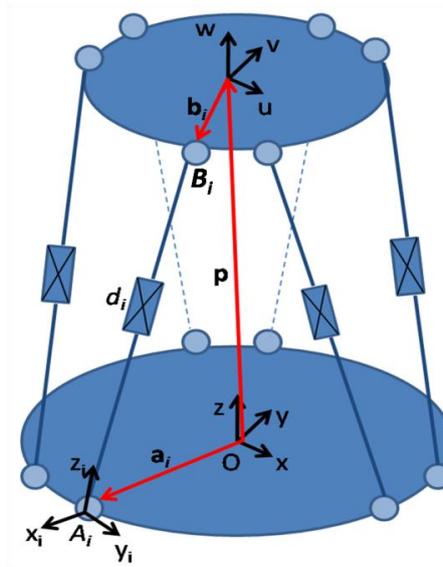


Figura 3.2: Diagrama esquemático da Plataforma Stewart.

Esta matriz de rotação (Equação 3.3) é definida pelos ângulos de guinada, rolagem e arfagem (*yaw*, *roll* e *pitch*), nomeados ψ (rotação ao redor do eixo z), seguido pela rotação θ ao redor do eixo y e uma rotação ϕ ao redor do eixo x , ou seja, ${}^A R_B = R_z(\psi)R_y(\theta)R_x(\phi)$ (VARGAS, M. V., 2009). Assim, a matriz de rotação pode ser escrita

$${}^A R_B = \begin{bmatrix} c\psi c\theta & c\psi s\theta s\phi - c\phi s\psi & c\psi c\phi s\theta + s\psi s\phi \\ c\theta s\psi & c\psi c\phi + s\psi s\theta s\phi & c\phi s\psi s\theta - c\psi s\phi \\ -s\theta & c\theta s\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

na qual $\begin{cases} s. = \text{sen}(.). \\ c. = \text{cos}(.). \end{cases}$

Sendo $\mathbf{a}_i = [a_{ix}, a_{iy}, a_{iz}]^T$ e ${}^B \mathbf{b}_i = [b_{iu}, b_{iv}, b_{iw}]^T$ as posições vetoriais dos pontos A_i e B_i nos sistemas coordenados A e B , respectivamente, pode-se escrever uma equação de malha para o i -ésimo membro do manipulador, como segue

$$\overline{A_i B_i} = \mathbf{p} + {}^A R_B {}^B \mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i \quad (3.11)$$

O comprimento do i -ésimo membro é obtido pelo produto escalar do vetor $A_i B_i$ com ele mesmo, como segue

$$d_i^2 = [\mathbf{p} + {}^A R_B {}^B \mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i]^T [\mathbf{p} + {}^A R_B {}^B \mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i] \quad \text{para } i = 1, 2, 3, 4, 5, 6. \quad (3.12)$$

Lembrando que ${}^B \mathbf{b}_i$ e \mathbf{a}_i são vetores constantes definidos pela geometria do manipulador. Neste caso, se o vetor \mathbf{p} e a matriz de transformação ${}^A R_B$ do sistema B em relação ao A são dados, a solução do problema da cinemática inversa se resume a

$$d_i = \pm \sqrt{\mathbf{p}^T \mathbf{p} + {}^B \mathbf{b}_i^T {}^B \mathbf{b}_i + \mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_i + 2\mathbf{p}^T {}^A R_B {}^B \mathbf{b}_i - 2\mathbf{p}^T \mathbf{a}_i - 2[{}^A R_B {}^B \mathbf{b}_i]^T \mathbf{a}_i} \quad \text{para } i = 1, 2, 3, 4, 5, 6. \quad (3.13)$$

A Equação 3.14 apresenta o resultado analítico para os vetores \mathbf{d}_i .

$$\mathbf{d}_i = \overline{A_i B_i} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c\psi c\theta & c\psi s\theta s\phi - c\phi s\psi & c\psi c\phi s\theta + s\psi s\phi \\ c\theta s\psi & c\psi c\phi + s\psi s\theta s\phi & c\phi s\psi s\theta - c\psi s\phi \\ -s\theta & c\theta s\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{iu} \\ b_{iv} \\ b_{iw} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{ix} \\ a_{iy} \\ a_{iz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + b_{iu} c\psi c\theta + b_{iv} (c\psi s\theta s\phi - c\phi s\psi) + b_{iw} (c\psi c\phi s\theta + s\psi s\phi) - a_{ix} \\ y + b_{iu} c\theta s\psi + b_{iv} (c\psi c\phi + s\psi s\theta s\phi) + b_{iw} (c\phi s\psi s\theta - c\psi s\phi) - a_{iy} \\ z - b_{iu} s\theta + b_{iv} c\theta s\phi + b_{iw} c\theta c\phi - a_{iz} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Portanto, para cada posição dada da plataforma móvel, existem duas possíveis soluções para cada membro. No entanto, as soluções que acarretam em comprimentos negativos dos membros são fisicamente não viáveis. Quando a solução de d_i se torna um número complexo, a posição da plataforma móvel não é alcançável (TSAI, L. W., 1999).

Como mostrado na Figura 3.2, pode-se escrever uma equação vetorial para cada junta como sendo

$$\mathbf{a}_i + d_i \mathbf{s}_i = \mathbf{p} + \mathbf{b}_i \quad (3.15)$$

na qual

$\mathbf{a}_i = [a_{ix} \quad a_{iy} \quad a_{iz}]^T$ é o vetor posição da junta A_i em relação ao sistema fixo A ;

$\mathbf{b}_i = [b_{ix} \quad b_{iy} \quad b_{iz}]^T$ é o vetor posição da junta B_i em relação ao sistema fixo A ;

\mathbf{s}_i é o vetor unitário que aponta de A_i para B_i ;

$$d_i = \|\mathbf{p} + \mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i\|, i = 1, \dots, 6.$$

Resolvendo para \mathbf{s}_i , tem-se

$$\mathbf{s}_i = (\mathbf{p} + \mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i)/d_i \quad (3.16)$$

Uma vez cada junta conectada à base fixa é do tipo universal, sua orientação em relação à base fixa pode ser descrita por dois ângulos de Euler (TSAI, L. W., 1999). Como mostrado na Figura 3.3, o sistema de coordenadas local da i -ésima junta pode ser representado como uma rotação ϕ_i sobre z_i resultando no sistema (x_i, y_i, z_i) seguido por outra rotação θ_i sobre o eixo y_i previamente rotacionado. Assim, a matriz de rotação de cada junta fica como apresentado na Equação 3.17.

$${}^A R_i = \begin{bmatrix} c\phi_i c\theta_i & -s\phi_i & c\phi_i s\theta_i \\ s\phi_i c\theta_i & c\phi_i & s\phi_i s\theta_i \\ -s\theta_i & 0 & c\theta_i \end{bmatrix}, i = 1, \dots, 6. \quad (3.17)$$

Sendo \mathbf{s}_i , a terceira coluna de ${}^A R_i$, tem-se

$$\mathbf{s}_i = \begin{bmatrix} c\phi_i s\theta_i \\ s\phi_i s\theta_i \\ c\theta_i \end{bmatrix}, i = 1, \dots, 6. \quad (3.18)$$

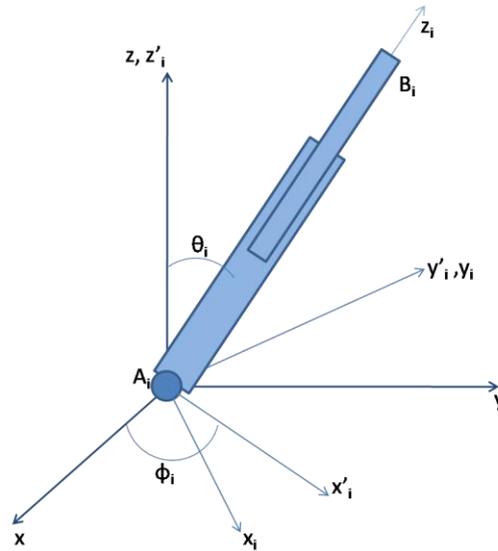


Figura 3.3: Ângulos de Euler das juntas universais.

Resolvendo a Equação 3.18 para θ_i e ϕ_i

$$c\theta_i = s_{iz} \tag{3.19}$$

$$s\theta_i = \sqrt{s_{ix}^2 + s_{iy}^2} \tag{3.20}$$

$$s\phi_i = s_{iy}/s\theta_i \tag{3.21}$$

$$c\phi_i = s_{ix}/s\theta_i \tag{3.22}$$

nas quais s_{ix} , s_{iy} e s_{iz} são as coordenadas x , y e z de s_i . Continuando,

$$\theta_i = a \tan(\sqrt{s_{ix}^2 + s_{iy}^2} / s_{iz}) \tag{3.23}$$

$$\phi_i = a \tan(s_{iy}/s_{ix}) \tag{3.24}$$

Estas equações determinam a direção e os ângulos de Euler da i -ésima junta em termos da posição da plataforma móvel. Desta forma, podem-se calcular os comprimentos iniciais d_i de cada elo, além dos ângulos iniciais das juntas θ_i e ϕ_i (WANG, Y., 2009).

3.3 Cinemática inversa

Para o caso deste manipulador, o método da cadeia de vetores de velocidade é mais simples. Geralmente, o vetor velocidade de um ponto é formulado a partir de duas direções diferentes de uma cadeia fechada. Cada cadeia fechada consiste em uma base fixa, uma plataforma móvel e todos os elos de um membro. As velocidades das juntas passivas (não atuadas) em cada membro são eliminadas pelo produto escalar da equação da cadeia de vetores de velocidade com o vetor apropriado normal a todos os vetores das velocidades das juntas passivas. Finalmente, as equações resultantes são agregadas na matriz jacobiana (TSAI, L. W., 1999).

Por consistência, define-se o estado de velocidades da plataforma móvel da jacobiana convencional como um vetor de seis dimensões com a velocidade linear de um ponto, seguido pela velocidade angular da plataforma móvel

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_p \\ \boldsymbol{\omega}_p \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Para este manipulador o vetor de entrada é dado por $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{\mathbf{d}}_1, \dot{\mathbf{d}}_2, \dots, \dot{\mathbf{d}}_6]^T$ e o vetor de saída pode ser descrito pela velocidade do centroide P e a velocidade angular da plataforma móvel (Equação 3.25).

A partir da definição da geometria inversa, será apresentado o procedimento para obtenção da cinemática inversa. Reescrevendo a Equação 3.11, tem-se

$$\overline{OP} + \overline{PB}_i = \overline{OA}_i + \overline{A}_iB_i \therefore \mathbf{p} + \mathbf{b}_i = \mathbf{d}_i + \mathbf{a}_i \quad (3.26)$$

Aplicando o diferencial em relação ao tempo

$$\mathbf{v}_p + \boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{b}_i = d_i \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{s}_i + \dot{d}_i \mathbf{s}_i \quad (3.27)$$

na qual \mathbf{b}_i e \mathbf{s}_i representam o vetor $\overline{PB_i}$ e um vetor unitário ao longo de $\overline{A_iB_i}$, respectivamente. $\boldsymbol{\omega}_i$ denota a velocidade angular do i -ésimo membro em relação ao sistema fixo A . Para eliminar $\boldsymbol{\omega}_i$, multiplica-se os dois lados da Equação 3.27 por \mathbf{s}_i (Equação 3.28).

$$\mathbf{s}_i \cdot \mathbf{v}_P + \mathbf{s}_i(\boldsymbol{\omega}_P \times \mathbf{b}_i) = d_i \mathbf{s}_i(\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{s}_i) + \dot{d}_i \mathbf{s}_i \mathbf{s}_i \quad (3.28)$$

Sendo que $\mathbf{s}_i \mathbf{s}_i = 1$ (produto escalar de dois vetores unitários paralelos), $\mathbf{s}_i(\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{s}_i) = 0$ (produto escalar de dois vetores perpendiculares) e $\mathbf{s}_i(\boldsymbol{\omega}_P \times \mathbf{b}_i) = (\mathbf{b}_i \times \mathbf{s}_i) \cdot \boldsymbol{\omega}_P$ ($\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$). Assim,

$$\mathbf{s}_i \cdot \mathbf{v}_P + (\mathbf{b}_i \times \mathbf{s}_i) \cdot \boldsymbol{\omega}_P = \dot{d}_i \quad (3.29)$$

$$\mathbf{s}_i \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_d \\ \dot{y}_d \\ \dot{z}_d \end{bmatrix} + (\mathbf{b}_i \times \mathbf{s}_i) \cdot \boldsymbol{\omega}_P = \dot{d}_i \quad (3.30)$$

Os termos da esquerda estão associados às velocidades da plataforma e formam a matriz J_x (Equação 3.31). Já à direita, estão os termos associados à velocidade das juntas, que formam J_q (Equação 3.32).

$$J_x = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1^T & (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{s}_1)^T \\ \mathbf{s}_2^T & (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{s}_2)^T \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{s}_6^T & (\mathbf{b}_6 \times \mathbf{s}_6)^T \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

$$J_q^{-1} = I_{6 \times 6} \quad (3.32)$$

Assim, obtém-se a relação entre as variáveis que descrevem a velocidade linear e a angular da plataforma móvel e as velocidades dos elos da plataforma plana ($\dot{\mathbf{q}} = J^{-1} \dot{\mathbf{x}}$). Com esta relação, monta-se a matriz jacobiana inversa (por se tratar da cinemática inversa) deste manipulador (Equação 3.33).

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial d_1}{\partial x} & \frac{\partial d_1}{\partial y} & \frac{\partial d_1}{\partial z} & \frac{\partial d_1}{\partial \phi} & \frac{\partial d_1}{\partial \theta} & \frac{\partial d_1}{\partial \psi} \\ \frac{\partial d_2}{\partial x} & \frac{\partial d_2}{\partial y} & \frac{\partial d_2}{\partial z} & \frac{\partial d_2}{\partial \phi} & \frac{\partial d_2}{\partial \theta} & \frac{\partial d_2}{\partial \psi} \\ \frac{\partial d_3}{\partial x} & \frac{\partial d_3}{\partial y} & \frac{\partial d_3}{\partial z} & \frac{\partial d_3}{\partial \phi} & \frac{\partial d_3}{\partial \theta} & \frac{\partial d_3}{\partial \psi} \\ \frac{\partial d_4}{\partial x} & \frac{\partial d_4}{\partial y} & \frac{\partial d_4}{\partial z} & \frac{\partial d_4}{\partial \phi} & \frac{\partial d_4}{\partial \theta} & \frac{\partial d_4}{\partial \psi} \\ \frac{\partial d_5}{\partial x} & \frac{\partial d_5}{\partial y} & \frac{\partial d_5}{\partial z} & \frac{\partial d_5}{\partial \phi} & \frac{\partial d_5}{\partial \theta} & \frac{\partial d_5}{\partial \psi} \\ \frac{\partial d_6}{\partial x} & \frac{\partial d_6}{\partial y} & \frac{\partial d_6}{\partial z} & \frac{\partial d_6}{\partial \phi} & \frac{\partial d_6}{\partial \theta} & \frac{\partial d_6}{\partial \psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1^T & (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{s}_1)^T \\ \mathbf{s}_2^T & (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{s}_2)^T \\ \mathbf{s}_3^T & (\mathbf{b}_3 \times \mathbf{s}_3)^T \\ \mathbf{s}_4^T & (\mathbf{b}_4 \times \mathbf{s}_4)^T \\ \mathbf{s}_5^T & (\mathbf{b}_5 \times \mathbf{s}_5)^T \\ \mathbf{s}_6^T & (\mathbf{b}_6 \times \mathbf{s}_6)^T \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

$$\mathbf{s}_i^T = \frac{\mathbf{d}_i^T}{\|\mathbf{d}_i\|} = \frac{\begin{bmatrix} x + b_{iu}c\psi c\theta + b_{iv}(c\psi s\theta s\phi - c\phi s\psi) + b_{iw}(c\psi c\phi s\theta + s\psi s\phi) - a_{ix} \\ y + b_{iu}c\theta s\psi + b_{iv}(c\psi c\phi + s\psi s\theta s\phi) + b_{iw}(c\phi s\psi s\theta - c\psi s\phi) - a_{iy} \\ z - b_{iu}s\theta + b_{iv}c\theta s\phi + b_{iw}c\theta c\phi - a_{iz} \end{bmatrix}^T}{\|\mathbf{d}_i\|} \quad (3.34)$$

A Equação 3.35 apresenta o resultado do produto vetorial $\mathbf{b}_i \times \mathbf{s}_i$ para a Plataforma Stewart. Já a Equação 3.36 mostra sua matriz jacobiana inversa analítica.

$$\mathbf{b}_i \times \mathbf{s}_i = \tilde{\mathbf{b}}_i \mathbf{s}_i = \begin{bmatrix} 0 & -b_{iw} & b_{iv} \\ b_{iw} & 0 & -b_{iu} \\ -b_{iv} & b_{iu} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\phi_i s\theta_i \\ s\phi_i s\theta_i \\ c\theta_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{iv}c\theta_i - b_{iw}s\phi_i s\theta_i \\ b_{iw}c\phi_i s\theta_i - b_{iu}c\theta_i \\ b_{iu}s\phi_i s\theta_i - b_{iv}c\phi_i s\theta_i \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} c\phi_1 s\theta_1 & s\phi_1 s\theta_1 & c\theta_1 & b_{1v}c\theta_1 - b_{1w}s\phi_1 s\theta_1 & b_{1w}c\phi_1 s\theta_1 - b_{1u}c\theta_1 & b_{1u}s\phi_1 s\theta_1 - b_{1v}c\phi_1 s\theta_1 \\ c\phi_2 s\theta_2 & s\phi_2 s\theta_2 & c\theta_2 & b_{2v}c\theta_2 - b_{2w}s\phi_2 s\theta_2 & b_{2w}c\phi_2 s\theta_2 - b_{2u}c\theta_2 & b_{2u}s\phi_2 s\theta_2 - b_{2v}c\phi_2 s\theta_2 \\ c\phi_3 s\theta_3 & s\phi_3 s\theta_3 & c\theta_3 & b_{3v}c\theta_3 - b_{3w}s\phi_3 s\theta_3 & b_{3w}c\phi_3 s\theta_3 - b_{3u}c\theta_3 & b_{3u}s\phi_3 s\theta_3 - b_{3v}c\phi_3 s\theta_3 \\ c\phi_4 s\theta_4 & s\phi_4 s\theta_4 & c\theta_4 & b_{4v}c\theta_4 - b_{4w}s\phi_4 s\theta_4 & b_{4w}c\phi_4 s\theta_4 - b_{4u}c\theta_4 & b_{4u}s\phi_4 s\theta_4 - b_{4v}c\phi_4 s\theta_4 \\ c\phi_5 s\theta_5 & s\phi_5 s\theta_5 & c\theta_5 & b_{5v}c\theta_5 - b_{5w}s\phi_5 s\theta_5 & b_{5w}c\phi_5 s\theta_5 - b_{5u}c\theta_5 & b_{5u}s\phi_5 s\theta_5 - b_{5v}c\phi_5 s\theta_5 \\ c\phi_6 s\theta_6 & s\phi_6 s\theta_6 & c\theta_6 & b_{6v}c\theta_6 - b_{6w}s\phi_6 s\theta_6 & b_{6w}c\phi_6 s\theta_6 - b_{6u}c\theta_6 & b_{6u}s\phi_6 s\theta_6 - b_{6v}c\phi_6 s\theta_6 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

A velocidade angular da plataforma móvel, $\boldsymbol{\omega}_p$, escrita em termos dos ângulos de Euler e dos vetores unitários \mathbf{w} , \mathbf{v}' e \mathbf{w}'' é dado pela Equação 3.37.

$$\boldsymbol{\omega}_p = \dot{\phi}\mathbf{w} + \dot{\theta}\mathbf{v}' + \dot{\psi}\mathbf{w}'' \quad (3.37)$$

Na equação 3.37 os vetores \mathbf{w} , \mathbf{v}' e \mathbf{w}'' não são ortogonais (TSAI, L. W., 1999). Expressando-os em relação ao sistema de referência A , obtém-se

$$\boldsymbol{\omega}_p = \begin{bmatrix} \dot{\psi}c\phi s\theta - \dot{\theta}s\phi \\ \dot{\psi}s\phi s\theta - \dot{\theta}c\phi \\ \dot{\psi}c\theta - \dot{\phi} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

A velocidade do ponto B_i (Equação 3.39), chamada de \mathbf{v}_{bi} , pode ser encontrada derivando o lado esquerdo da Equação 3.26.

$$\mathbf{v}_{bi} = \mathbf{v}_p + \boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{b}_i \quad (3.39)$$

Escrevendo \mathbf{v}_{bi} em relação ao sistema de referência do i -ésimo membro, tem-se

$${}^i\mathbf{v}_{bi} = {}^iR_A \mathbf{v}_{bi} \quad (3.40)$$

na qual ${}^i\mathbf{v}_{bi} = [{}^i v_{bix}, {}^i v_{biy}, {}^i v_{biz}]^T$ e ${}^iR_A = {}^A R_i^T$.

A velocidade de B_i também pode ser escrita em termos da velocidade angular do i -ésimo membro realizando a derivada do lado esquerdo da Equação 3.26 em A_i (TSAI, L. W., 1999).

$${}^i\mathbf{v}_{bi} = d_i {}^i\boldsymbol{\omega}_i \times {}^i\mathbf{s}_i + \dot{d}_i {}^i\mathbf{s}_i \quad (3.41)$$

Realizando a multiplicação escalar dos dois lados da Equação 3.41 por ${}^i\mathbf{s}_i$, tem-se

$$\dot{d}_i = {}^i v_{biz} \quad (3.42)$$

Uma vez que cada um dos membros não gira em torno de seu eixo longitudinal, $\boldsymbol{\omega}_i^T \mathbf{s}_i = 0$. Da mesma forma obtém-se a velocidade angular do membro i (TSAI, L. W., 1999).

$${}^i \boldsymbol{\omega}_i = \frac{1}{d_i} ({}^i \mathbf{s}_i \times {}^i \mathbf{v}_{bi}) = \frac{1}{d_i} \begin{bmatrix} -{}^i v_{biy} \\ {}^i v_{bix} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Assim, detalhando \mathbf{v}_{bi} , tem-se

$$\mathbf{v}_{bi} = \mathbf{v}_p + \boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{b}_i = \begin{bmatrix} \dot{x} - b_{iy} \dot{\phi} - c\phi b_{iz} \dot{\theta} + (s\phi s\theta b_{iz} - c\theta b_{iy}) \dot{\psi} \\ \dot{y} - b_{ix} \dot{\phi} + s\phi b_{iz} \dot{\theta} + (c\theta b_{ix} - c\phi s\theta b_{iz}) \dot{\psi} \\ \dot{z} + (c\phi b_{ix} - s\phi b_{iy}) \dot{\theta} + (c\phi s\theta b_{iy} - s\phi s\theta b_{ix}) \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

Assim, calcula-se ${}^i \mathbf{v}_{bi}$ multiplicando \mathbf{v}_{bi} por ${}^i R_A$ (Equação 3.40). Suas componentes ${}^i v_{bix}$, ${}^i v_{biy}$ e ${}^i v_{biz}$ resultarão através das Equações 3.42 e 3.43 em $\dot{\phi}_i$, $\dot{\theta}_i$ e \dot{d}_i , respectivamente.

Para a Plataforma Stewart, a derivada no tempo da matriz jacobiana inversa é representada pela Equação 3.45. As Equações 3.46 a 3.51 apresentam a solução de cada termo,

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} J_{11}^{-1} & J_{12}^{-1} & J_{13}^{-1} & J_{14}^{-1} & J_{15}^{-1} & J_{16}^{-1} \\ J_{21}^{-1} & J_{22}^{-1} & J_{23}^{-1} & J_{24}^{-1} & J_{25}^{-1} & J_{26}^{-1} \\ J_{31}^{-1} & J_{32}^{-1} & J_{33}^{-1} & J_{34}^{-1} & J_{35}^{-1} & J_{36}^{-1} \\ J_{41}^{-1} & J_{42}^{-1} & J_{43}^{-1} & J_{44}^{-1} & J_{45}^{-1} & J_{46}^{-1} \\ J_{51}^{-1} & J_{52}^{-1} & J_{53}^{-1} & J_{54}^{-1} & J_{55}^{-1} & J_{56}^{-1} \\ J_{61}^{-1} & J_{62}^{-1} & J_{63}^{-1} & J_{64}^{-1} & J_{65}^{-1} & J_{66}^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

$$J_{i1}^{-1} = -sen\phi_i \dot{\phi}_i sen\theta_i + cos\phi_i cos\theta_i \dot{\theta}_i \quad (3.46)$$

$$J_{i2}^{\dot{-}1} = \cos\phi_i \dot{\phi}_i \text{sen}\theta_i + \text{sen}\phi_i \cos\theta_i \dot{\theta}_i \quad (3.47)$$

$$J_{i3}^{\dot{-}1} = -\text{sen}\theta_i \dot{\theta}_i \quad (3.48)$$

$$J_{i4}^{\dot{-}1} = b_{iv} \text{sen}\theta_i \dot{\theta}_i - b_{iw} (\cos\phi_i \dot{\phi}_i \text{sen}\theta_i + \text{sen}\phi_i \cos\theta_i \dot{\theta}_i) \quad (3.49)$$

$$J_{i5}^{\dot{-}1} = b_{iw} (\text{sen}\phi_i \dot{\phi}_i \text{sen}\theta_i + \cos\phi_i \cos\theta_i \dot{\theta}_i) - b_{iu} \text{sen}\theta_i \dot{\theta}_i \quad (3.50)$$

$$J_{i6}^{\dot{-}1} = b_{iu} (\cos\phi_i \dot{\phi}_i \text{sen}\theta_i + \text{sen}\phi_i \cos\theta_i \dot{\theta}_i) - b_{iv} (-\text{sen}\phi_i \dot{\phi}_i \text{sen}\theta_i + \cos\phi_i \cos\theta_i \dot{\theta}_i) \quad (3.51)$$

nas quais $\dot{\theta}_i$, e $\dot{\phi}_i$ podem ser escritos também pelas Equações 3.52 e 3.53. Já a derivada do vetor unitário que descreve a orientação de cada elo, descrita pelos elementos s_{ix} , s_{iy} e s_{iz} , é dada pelas Equações 3.54.

$$\dot{\theta}_i = \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{s_{ix}^2 + s_{iy}^2}}{s_{iz}} \right)^2} \right) \cdot \left(\frac{s_{iz} s_{ix} \dot{s}_{ix} + s_{iz} s_{iy} \dot{s}_{iy} - (s_{ix}^2 + s_{iy}^2) \dot{s}_{iz}}{s_{iz}^2 \sqrt{s_{ix}^2 + s_{iy}^2}} \right) \quad (3.52)$$

$$\dot{\phi}_i = \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{s_{iy}}{s_{ix}} \right)^2} \right) \cdot \left(\frac{s_{ix} \dot{s}_{iy} - s_{iy} \dot{s}_{ix}}{s_{ix}^2} \right) \quad (3.53)$$

$$\dot{\mathbf{s}}_i = \begin{bmatrix} s_{ix} \\ s_{iy} \\ s_{iz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\text{sen}\phi_i \dot{\phi}_i \text{sen}\theta_i + \cos\phi_i \cos\theta_i \dot{\theta}_i \\ \cos\phi_i \dot{\phi}_i \text{sen}\theta_i + \text{sen}\phi_i \cos\theta_i \dot{\theta}_i \\ -\text{sen}\theta_i \dot{\theta}_i \end{bmatrix} \quad \text{com } i = 1, \dots, 6. \quad (3.54)$$

A derivada no tempo do vetor unitário \mathbf{s}_i também pode ser escrita em função diretamente das variáveis de posição e orientação da plataforma móvel, como mostra a Equação 3.55. As componentes da derivada no tempo do vetor \mathbf{d}_i são apresentadas nas Equações 3.56 a 3.58.

$$\mathbf{s}_i = \frac{d(\mathbf{d}_i/d_i)}{dt} = \frac{\dot{\mathbf{d}}_i d_i - \mathbf{d}_i \dot{d}_i}{d_i^2} \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} \dot{d}_{ix} = \dot{x} - b_{iu}(s\theta c\psi\dot{\theta} + c\theta s\psi\dot{\psi}) + b_{iv}((c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi)\dot{\phi} + s\phi c\theta c\psi\dot{\theta} - \\ (s\phi s\theta s\psi + c\phi c\psi)\dot{\psi}) + b_{iw}((-s\phi s\theta c\psi + c\phi s\psi)\dot{\phi} - c\phi c\theta c\psi\dot{\theta} + \\ (c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi)\dot{\psi}) \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} \dot{d}_{iy} = \dot{y} + b_{iu}(-s\theta s\psi\dot{\theta} + c\theta c\psi\dot{\psi}) + b_{iv}((c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi)\dot{\phi} + \\ s\phi c\theta s\psi\dot{\theta} - (s\phi s\theta c\psi - c\phi s\psi)\dot{\psi}) + b_{iw}((-s\phi s\theta s\psi - c\phi c\psi)\dot{\phi} + c\phi c\theta s\psi\dot{\theta} + \\ (c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi)\dot{\psi}) \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\dot{d}_{iz} = \dot{z} - b_{iu}c\theta\dot{\theta} + b_{iv}(-s\phi s\theta\dot{\theta} + c\phi c\theta\dot{\phi}) - b_{iw}(c\phi s\theta\dot{\theta} + s\phi c\theta\dot{\phi}) \quad (3.58)$$

3.4 Cinemática direta

O problema da cinemática direta consiste em encontrar a posição (vetor \mathbf{p}) e orientação final (matriz de rotação ${}^A R_B$) de um mecanismo a partir dos ângulos (ou deslocamentos lineares, no caso de juntas prismáticas) de entrada. A formulação deste problema leva a um sistema de equações algébricas não lineares acoplado (BOUDREAU, R. *et al*, 1994). Usualmente, não há uma solução fechada para este problema no caso deste mecanismo paralelo. Métodos por iteração

numérica (como o de Newton-Raphson, por exemplo) e soluções polinomiais vêm sendo desenvolvidas (TSAI, L. W., 1999). Entretanto, neste trabalho não serão usados métodos numéricos como os supracitados.

A matriz jacobiana direta (e sua derivada) será obtida numericamente a partir da solução da jacobiana inversa a cada passo da simulação. As relações subsequentes da cinemática direta se mantêm (Equações 2.75 e 2.77).

3.5 Condições de singularidade

Assim como descrito na Seção 2.5, em algumas configurações do mecanismo a matriz jacobiana pode perder seu posto (*rank*) completo. Nestas condições singulares um mecanismo paralelo pode ganhar ou perder graus de liberdade. Dependendo de qual matriz seja singular (jacobiana direta ou jacobiana inversa) o mecanismo pode estar em uma configuração singular da cinemática direta, inversa ou até de ambas (TSAI, L. W., 1999).

Como a obtenção analítica da expressão do determinante da jacobiana, tanto da direta quanto da inversa, é muito extensa para este mecanismo, a avaliação das singularidades (Seção 5.2.4) será determinada através de um método numérico para resolver as normas na Equação 2.98 e obter o número de condição λ . Da mesma forma será feito o cálculo do número de condição de reciprocidade, $r\lambda$ (Equação 2.99).

3.6 Equilíbrio estático

A análise do equilíbrio estático deste mecanismo visa determinar as condições nas quais o atuador permanece em equilíbrio dada uma pressão de alimentação p_f na entrada das válvulas de comando dos atuadores como descrito na Seção 4.1, onde será discutida a dinâmica dos atuadores usados neste mecanismo.

Assim como já discutido na Seção 2.6, serão derivadas as equações de equilíbrio de força e momento para cada elo e então estas equações serão resolvidas simultaneamente (TSAI, L. W., 1999).

3.6.1 Abordagem pelo Diagrama de Corpo Livre

Considerando a Plataforma Stewart mostrada nas Figuras 3.2 e 3.4, tem-se que O é a origem do sistema fixo (x, y, z) localizado no centroide da base fixa com os eixos x e y no plano dos pontos de acoplamento, A_i , com $i = 1$ a 6. A origem P do sistema de referência móvel (u, v, w) está localizada no centroide da plataforma móvel, com seus eixos u e v no plano dos acoplamentos B_i , com $i = 1$ a 6. Nesta análise serão desprezados os efeitos da gravidade. Precisa-se encontrar as forças f_1, f_2, \dots, f_6 dos atuadores requeridas para realizar uma força de saída \mathbf{f} e um momento \mathbf{n} no centroide da plataforma móvel.

As forças e momentos associados às restrições de cada junta prismática podem ser considerados como internos ao membro. Por causa da construção esférica-esférica, nenhum momento é transmitido ao membro. Além disso, as forças de reação em cada junta esférica apontam ao longo da linha A_iB_i definida pelos centros das duas esferas. Portanto, as forças atuando na plataforma móvel por cada membro podem ser escritas como

$$\mathbf{f}_i = f_i \mathbf{s}_i \quad (3.59)$$

para $i = 1, 2, \dots, 6$ e na qual o subscrito i representa o i -ésimo membro, f_i denota a magnitude de \mathbf{f}_i e \mathbf{s}_i é o vetor unitário que aponta da junta esférica da base para a junta esférica da plataforma móvel do i -ésimo membro, ou seja, $\mathbf{s}_i = \mathbf{d}_i/d_i$.

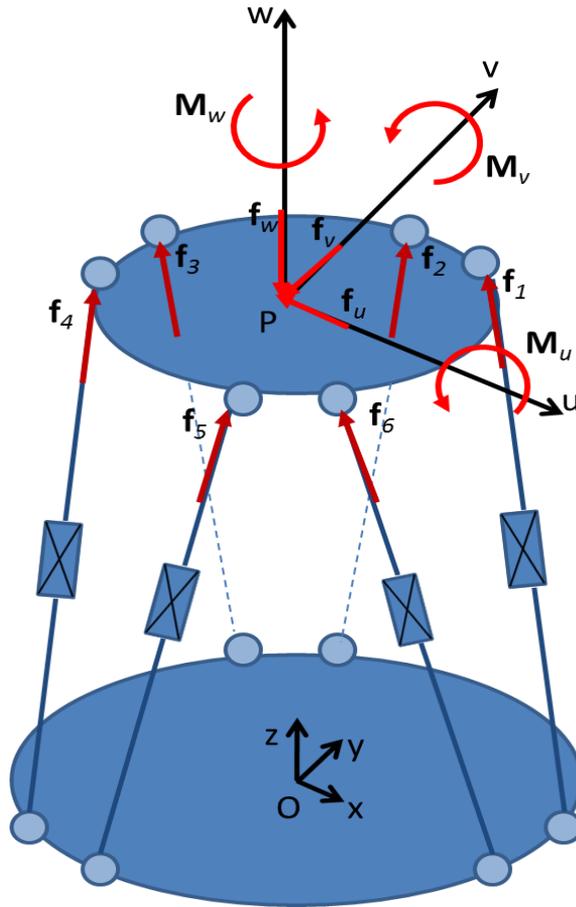


Figura 3.4: Forças e momentos atuantes na Plataforma Stewart.

Somando todas as forças que atuam na plataforma móvel e os momentos destas forças sobre o centroide P , obtém-se

$$\sum_{i=1}^6 f_i \mathbf{s}_i = \mathbf{f} \tag{3.60}$$

$$\sum_{i=1}^6 f_i \mathbf{b}_i \times \mathbf{s}_i = \mathbf{n} \tag{3.61}$$

nas quais $\mathbf{b}_i = \overline{PB}_i$. As Equações 3.60 e 3.61 representam seis equações escalares em f_i que podem ser escritas na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_u \\ \mathbf{f}_v \\ \mathbf{f}_w \\ \mathbf{M}_u \\ \mathbf{M}_v \\ \mathbf{M}_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 & \mathbf{s}_2 & \cdots & \mathbf{s}_6 \\ \mathbf{b}_1 \times \mathbf{s}_1 & \mathbf{b}_2 \times \mathbf{s}_2 & \cdots & \mathbf{b}_6 \times \mathbf{s}_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_6 \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

3.6.2 Aplicação do Princípio do Trabalho Virtual

Seja $\mathbf{F} = [\mathbf{f}, \mathbf{n}]^T$ o vetor que representa as forças e momentos de saída na plataforma móvel, $\boldsymbol{\tau} = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T$ o vetor que representa as forças e torques nas juntas ativas, $\delta\mathbf{q} = [\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n]^T$ o vetor que representa o deslocamento virtual associado às juntas ativas e $\delta\mathbf{x} = [\delta x, \delta y, \dots, \delta\psi]^T$ o vetor que representa os deslocamentos virtuais associados à plataforma móvel.

A Equação 2.107 dá as forças de saída da plataforma móvel em termos dos torques e/ou forças das juntas ativas, ou vice-versa, por vias da transformação inversa. Sabendo que a jacobiana inversa da Plataforma Stewart é dada por

$$J^{-1} = J_q^{-1} J_x = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1^T & (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{s}_1)^T \\ \mathbf{s}_2^T & (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{s}_2)^T \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{s}_6^T & (\mathbf{b}_6 \times \mathbf{s}_6)^T \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

Substituindo a Equação 3.63 na Equação 2.107, obtém-se a expressão que representa a transformação entre as forças de saída da plataforma móvel e as forças lineares dos atuadores (Equação 3.64), assim como foi obtido no Item 3.6.1 pelo Diagrama de Corpo Livre.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 & \mathbf{s}_2 & \cdots & \mathbf{s}_6 \\ \mathbf{b}_1 \times \mathbf{s}_1 & \mathbf{b}_2 \times \mathbf{s}_2 & \cdots & \mathbf{b}_6 \times \mathbf{s}_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_6 \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

Invertendo a relação da Equação 3.64, obtém-se a expressão que representa a transformação entre as forças lineares dos atuadores e as forças de saída da plataforma móvel (Equação 3.65).

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_6 \end{bmatrix} = J^T \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

4 Estratégia de controle

Neste Capítulo será apresentada a estratégia de controle que poderá ser usada no controle de posição, velocidade e aceleração de simuladores baseados em mecanismos articulados tais como a plataforma plana de três graus de liberdade e a Plataforma Stewart apresentados nos Capítulos 2 e 3, respectivamente.

Uma estratégia convencional consistiria no controle do simulador usando sensores de deslocamento linear, que podem ser do tipo resistivo (potenciométrico) ou indutivo (LVDT). Neste tipo de controle, é feita a medição direta de cada deslocamento do atuador linear da plataforma, ou seja, a variável medida é justamente a variável diretamente controlável. Porém, apesar de ser uma estratégia mais simples, esta possui alguns pontos negativos, tais como o custo dos transdutores, pois no caso de uma Plataforma Stewart (que tem seis atuadores) são usados seis sensores de deslocamento linear. Outro ponto importante é a carga gerada no sistema, pois os transdutores devem ficar acoplados aos atuadores, o que diminui a eficiência do equipamento.

Por causa destas dificuldades geradas pela abordagem convencional, foi elaborada uma estratégia não convencional baseada no uso de uma central inercial. Nesta estratégia, um único equipamento (descrito com mais detalhes na Seção B.2.1) é usado para realizar as medições das velocidades angulares e acelerações lineares (nos três eixos) de um ponto da plataforma móvel do simulador. Assim, não é feita a medida direta das variáveis controláveis do sistema, pois estas estão relacionadas ao deslocamento linear dos atuadores da plataforma.

4.1 Dinâmica do sistema de atuação

Nesta Seção será apresentado o modelo do sistema de atuação consistido de um atuador linear de dupla ação pneumático. Este sistema relaciona as vazões de entrada nas câmaras do atuador com as pressões e, conseqüentemente, as forças de saída no atuador. A Figura 4.1 apresenta o esquema sugerido do sistema.

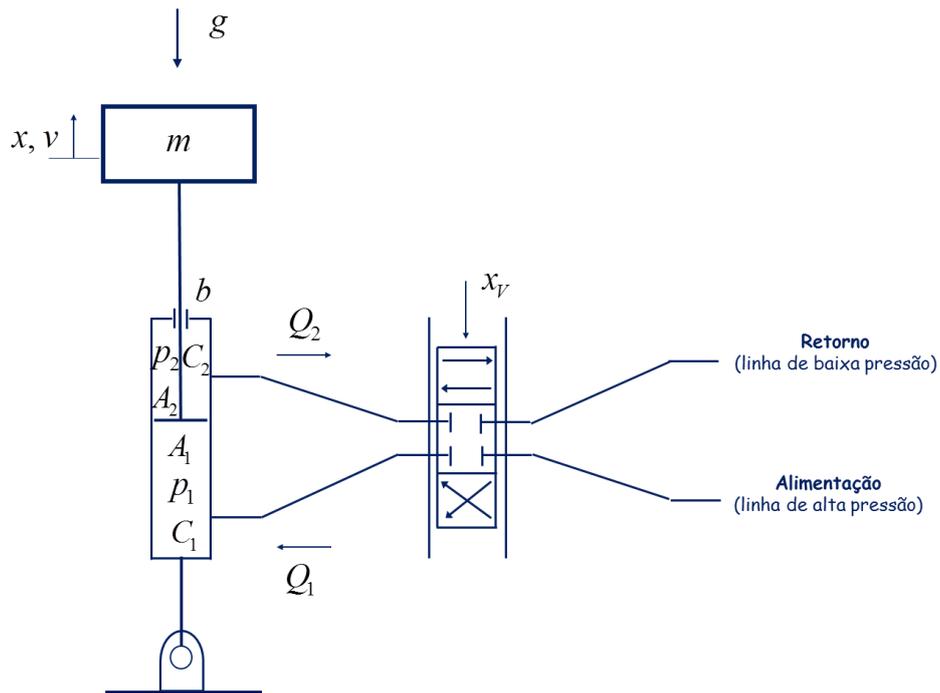


Figura 4.1: Esquema do sistema de atuação.

O sistema de Equações 4.1 descreve a relação entre as entradas de vazão e as variações de pressão e a relação entre as pressões na câmara e a aceleração do pistão do atuador (KARNOPP, D. C., *et al*, 2006),

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = \frac{1}{C_1}(Q_1 - A_1 v) \\ \dot{p}_2 = \frac{1}{C_2}(A_2 v - Q_2) \\ \dot{v} = \frac{1}{m}(A_1 p_1 - A_2 p_2 - b v - m g) \end{cases} \quad (4.1)$$

nas quais p_i é a pressão na câmara, C_i é a capacitância fluida, A_i é a área da superfície do pistão com normal paralela à direção do movimento do pistão, Q_i é a vazão volumétrica da (ou para a) câmara i , m é a massa associada à carga no atuador, b é o coeficiente de atrito do pistão com o cilindro, v é a velocidade linear do pistão, x é a sua posição e g é a aceleração da gravidade, sendo $i = 1$ referente à câmara inferior e $i = 2$ referente à câmara superior.

Já o sistema de Equações 4.2 é o modelo das válvulas de controle (OGATA, K., 2009) que descreve o comportamento das vazões em cada entrada do cilindro dadas as pressões na câmara e a pressão na fonte,

$$\begin{cases} Q_1 = k_x x_v - k_p (p_1 - p_f) \\ Q_2 = k_x x_v + k_p (p_2 - p_f) \end{cases} \quad (4.2)$$

nas quais p_f é a pressão na fonte (saída do compressor), k_x e k_p são constantes da válvula que podem ser obtidos experimentalmente ou da folha de dados do fabricante e x_v é o sinal de comando. A Figura 4.2 apresenta o diagrama de blocos do modelo do sistema de atuação baseado nas Equações 4.1 e 4.2.

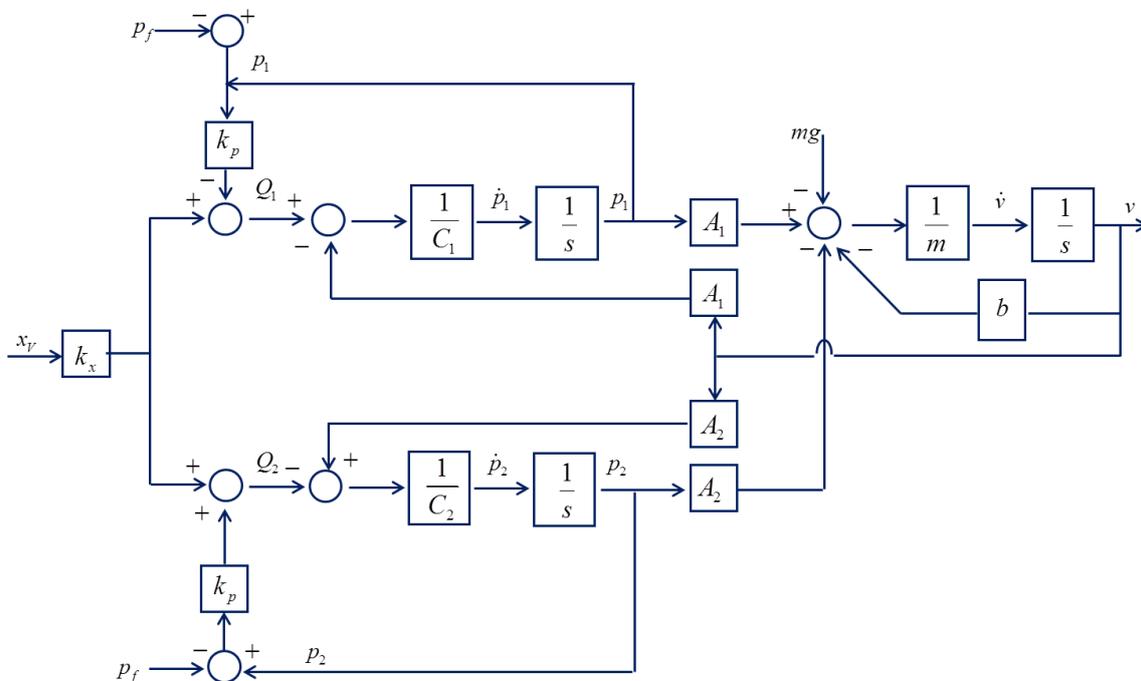


Figura 4.2: Diagrama de blocos do modelo do sistema de atuação.

Reescrevendo as Equações 4.1 e 4.2 em termos de Laplace, colocando-as em termos de p_1 , p_2 e v , unindo-as e isolando $v(s)$, tem-se as funções de transferência da dinâmica do atuador (Equação 4.3), cujos termos $D(s)$, $N_{xv}(s)$, $N_{pv}(s)$ e $N_{gv}(s)$ são mostrados nas Equações 4.4 a 4.7. A Equação 4.8 apresenta $v(s)$ em sua forma completa explicitando os zeros de primeira ordem, a constante de tempo, o fator de amortecimento e a frequência natural do sistema.

$$v(s) = \frac{N_{xv}(s)}{D(s)} x_v(s) + \frac{N_{pv}(s)}{D(s)} p_f(s) - \frac{N_{gv}(s)}{D(s)} mg \quad (4.3)$$

$$D(s) = (ms + b)(C_1s + k_p)(C_2s + k_p) + A_1^2(C_2s + k_p) + A_2^2(C_1s + k_p) \quad (4.4)$$

$$N_{xv}(s) = ((A_1C_2 + A_2C_1)s + (A_1 + A_2)k_p)k_x \quad (4.5)$$

$$N_{pv}(s) = ((A_1C_2 - A_2C_1)s + (A_1 - A_2)k_p)k_p \quad (4.6)$$

$$N_{gv}(s) = (C_1s + k_p)(C_2s + k_p) \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} v(s) = & \frac{k_{xv}(s + z_{xv})}{(\tau s + 1)(s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2)} x_v(s) \\ & + \frac{k_{pv}(s + z_{pv})}{(\tau s + 1)(s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2)} p_f(s) \\ & - \frac{k_{gv}(s + z_{1g})(s + z_{2g})}{(\tau s + 1)(s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2)} mg \end{aligned} \quad (4.8)$$

O termo mg nestas equações representa a carga no sistema de atuação. Os parâmetros k_{pv} , z_{pv} , p_f , k_{gv} , z_{1g} e z_{2g} foram obtidos a partir da combinação das Equações 4.1 e 4.2. Os efeitos dinâmicos de massa e inércia das duas plataformas analisadas neste trabalho não serão incluídos no equacionamento (mais detalhes sobre a dinâmica da Plataforma Stewart no Apêndice A). Será usado este modelo

simplificado no qual mg é o valor médio associado à carga em cada atuador em uma condição estática da plataforma móvel (mais detalhes sobre o processo de obtenção destes carregamentos nas seções 2.6, 3.6, 5.2.5 e 5.3.5). Além de facilitar a análise do sistema de controle, o uso desta simplificação ajuda a verificar a influência de erros de modelagem do sistema na resposta final do controle. Integrando a saída em velocidade ($v(s)$) a partir da Equação 4.8 para obtenção do deslocamento do atuador, monta-se o diagrama da malha aberta do sistema de atuação (Figura 4.3).

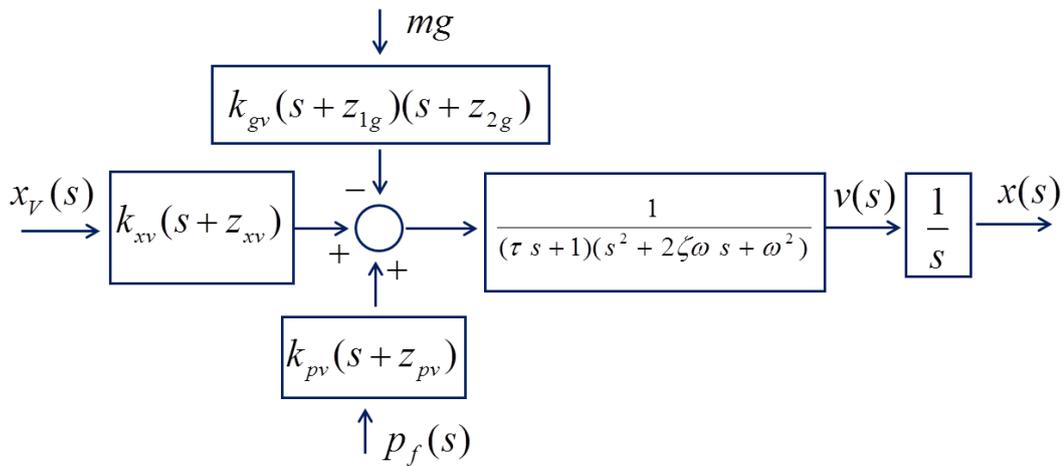


Figura 4.3: Diagrama para simulação do sistema de atuação.

Usando a função de transferência $v(s)/x_v(s)$, pode-se rearranjar este diagrama de forma que a saída dependa apenas do comando da válvula de controle (Figura 4.4). Para tanto, usa-se a entrada v_∞ , que representa a condição inicial de velocidade, em função da pressão da fonte (p_f) e do peso próprio (mg), em regime permanente.

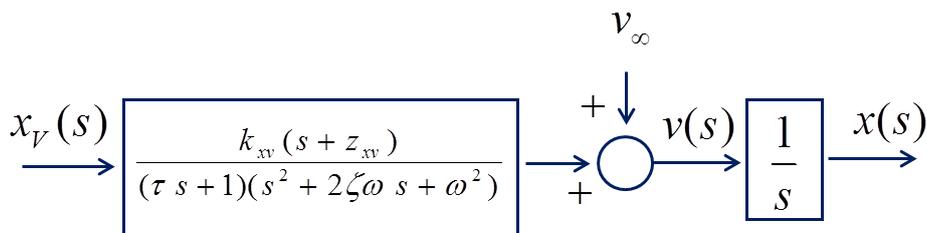


Figura 4.4: Sistema de atuação em malha aberta para entradas através do comando da válvula.

Na verdade, v_∞ é a velocidade em regime permanente do pistão em uma condição na qual se tem uma entrada de pressão e uma determinada carga no mesmo supondo estas entradas como degrau. A Equação 4.9 apresenta a determinação do valor de v_∞ a partir de entradas em degrau em p_f e mg . Para uma entrada $x_v(s) = 0$, aplicando o Teorema do Valor Final, tem-se

$$v_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{k_{pv}(s + z_{pv})}{(\tau s + 1)(s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2)} \frac{p_f}{s} - \frac{k_{gv}(s + z_{1g})(s + z_{2g})}{(\tau s + 1)(s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2)} \frac{mg}{s} \right] \quad (4.9)$$

Calculado este limite, a Equação 4.10 dá o valor de v_∞ em regime permanente para valores dados de k_{pv} , z_{pv} , p_f , k_{gv} , z_{1g} , z_{2g} , p_f e mg .

$$v_\infty = \left[\frac{k_{pv}z_{pv}}{\omega^2} p_f - \frac{k_{gv}z_{1g}z_{2g}}{\omega^2} mg \right] \quad (4.10)$$

4.2 Estratégia de controle do sistema de atuação

A estratégia de controle proposta consiste no emprego da aceleração desejada de entrada, obtida a partir de um perfil de deslocamento desejado, como tratado a seguir. Isto será feito porque os transdutores adotados serão os acelerômetros da central inercial (IMU). De modo a validar a estratégia proposta inicialmente, será avaliada seu uso em apenas um atuador para depois aplicá-la nos simuladores de movimento. Assim, refazendo o diagrama da Figura 4.4 adicionando um s no numerador (um zero em zero) o esquema fica como o apresentado na Figura 4.5. Desta forma aproveita-se o sinal de saída da aceleração para realimentação.

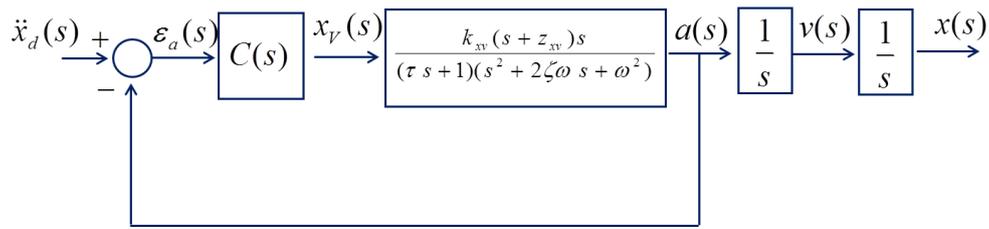


Figura 4.5: Sistema em malha aberta com saída de aceleração do modelo da válvula.

A Função de Transferência $a(s)/\ddot{x}_d(s)$ desta malha em aceleração com controlador proporcional é apresentada na Equação 4.11.

$$\frac{a(s)}{\ddot{x}_d(s)} = \frac{k k_{xv} (s + z_{xv}) s}{(\tau s + 1)(s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2) + k k_{xv} (s + z_{xv}) s} \quad (4.11)$$

A avaliação completa deste modelo dinâmico requer uma análise mais rigorosa usando a Teoria de Controle Clássica (OGATA, K., 2009). As simulações apresentadas no Capítulo 5 mostram a validade do emprego deste modelo para os perfis de aceleração que serão descritos a seguir.

Uma entrada típica para avaliar o comportamento do sistema de atuação e dos mecanismos sujeitos a esta estratégia de controle seria uma entrada em senóide (cossenóide, neste caso). A Figura 4.6 apresenta a forma no tempo deste tipo de entrada (Equações 4.12), tanto em posição quanto em aceleração.

$$\begin{aligned} x(t) &= A(1 - \cos \omega t) \\ \dot{x}(t) &= A\omega \operatorname{sen} \omega t \\ \ddot{x}(t) &= A\omega^2 \cos \omega t \end{aligned} \quad (4.12)$$

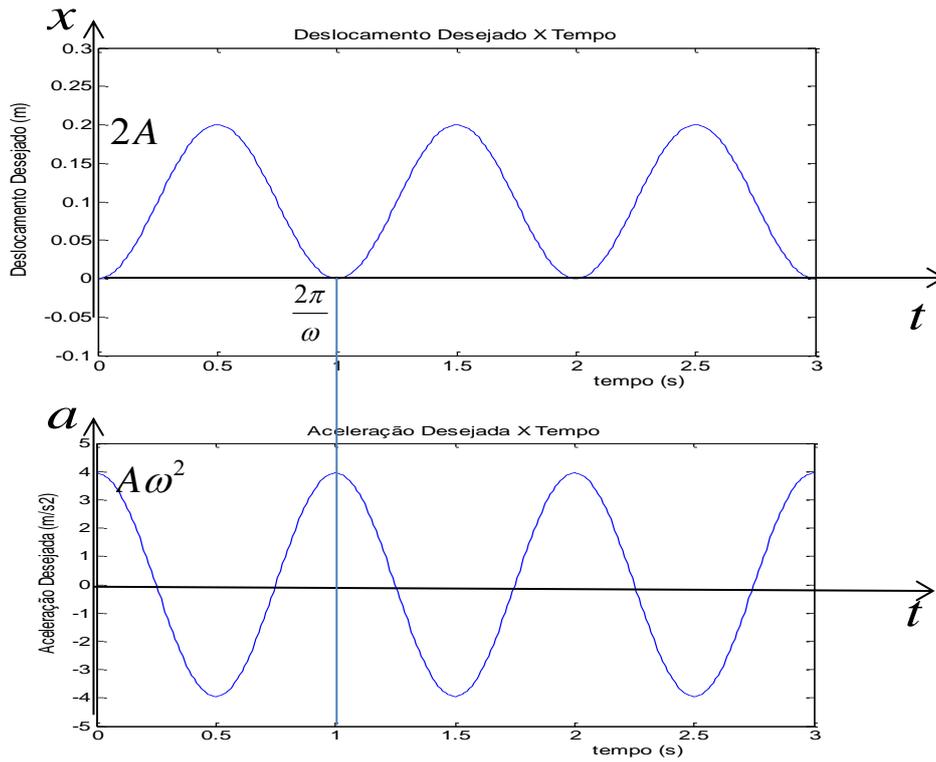


Figura 4.6: Entrada do tipo cossenóide.

Outra entrada interessante para avaliar a capacidade do sistema ir de uma posição desejada à outra e determinar os erros de sobrevalor (*overshoot*), fatores de amortecimento e tempos de resposta é a entrada em degrau na aceleração, que gera um ‘degrau suavizado’ na posição. A Figura 4.7 apresenta a forma no tempo desta entrada (Equações 4.13).

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}(t) &= a_0, & 0 \leq t \leq t_0/2 \\
 \ddot{x}(t) &= -a_0, & t_0/2 \leq t \leq t_0 \\
 \ddot{x}(t) &= 0, & t > t_0
 \end{aligned}
 \tag{4.13}$$

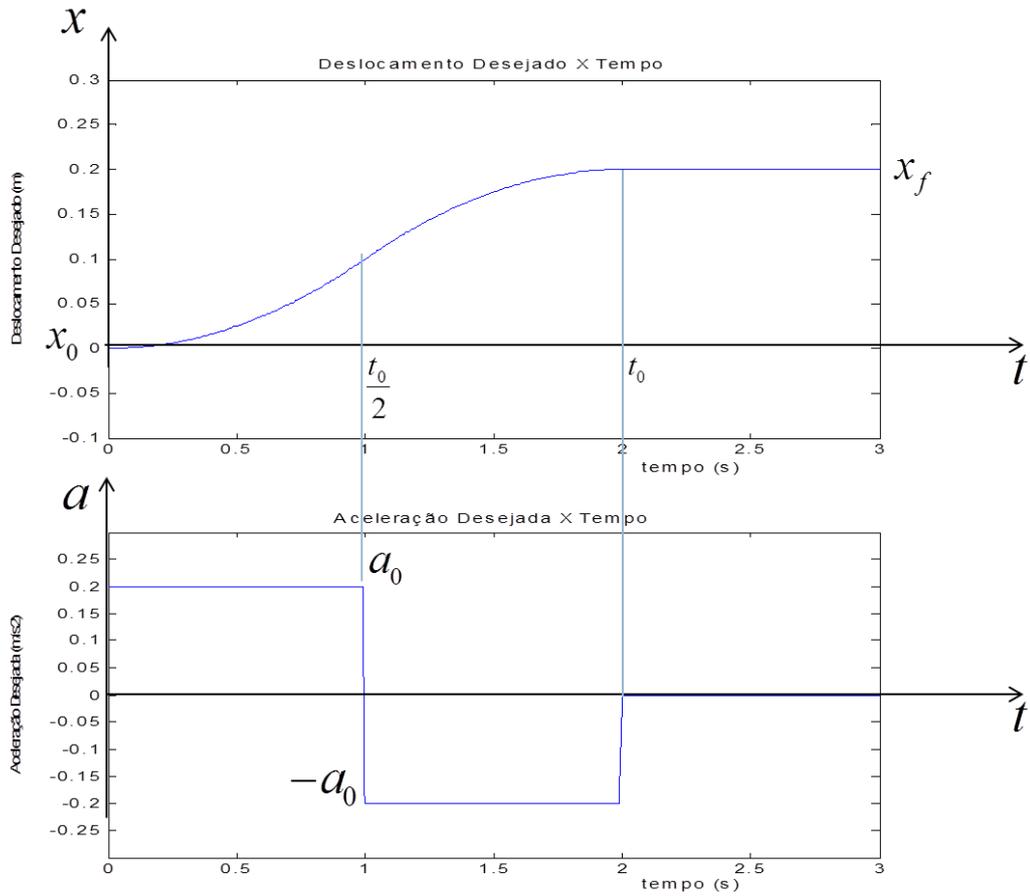


Figura 4.7: Entrada em pulsos na aceleração.

O problema com a entrada dada pelas Equações 4.13 em pulsos de aceleração é que este tipo de entrada ainda foge muito da realidade em um sistema como este. As variações de aceleração precisam de certo tempo para ocorrer. Buscando melhorar a forma da entrada, foram incluídos ‘degraus suavizados’ nas subidas e descidas do pulso de aceleração, como mostram a Figura 4.8 e o conjunto de Equações 4.14.

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}(t) &= \frac{A\omega^2}{2}(1 - \cos \omega t) & 0 \leq t \leq t_1 \\
 \ddot{x}(t) &= A\omega^2 & t_1 \leq t \leq t_2 \\
 \ddot{x}(t) &= A\omega^2 - \frac{A\omega^2}{2}(1 - \cos \omega t) & t_2 \leq t \leq t_3 \\
 \ddot{x}(t) &= -\frac{A\omega^2}{2}(1 - \cos \omega(t - t_3)) & t_3 \leq t \leq t_4 \\
 \ddot{x}(t) &= -A\omega^2 & t_4 \leq t \leq t_5 \\
 \ddot{x}(t) &= -A\omega^2 + \frac{A\omega^2}{2}(1 - \cos \omega(t - t_3)) & t_5 \leq t \leq t_6
 \end{aligned}
 \tag{4.14}$$

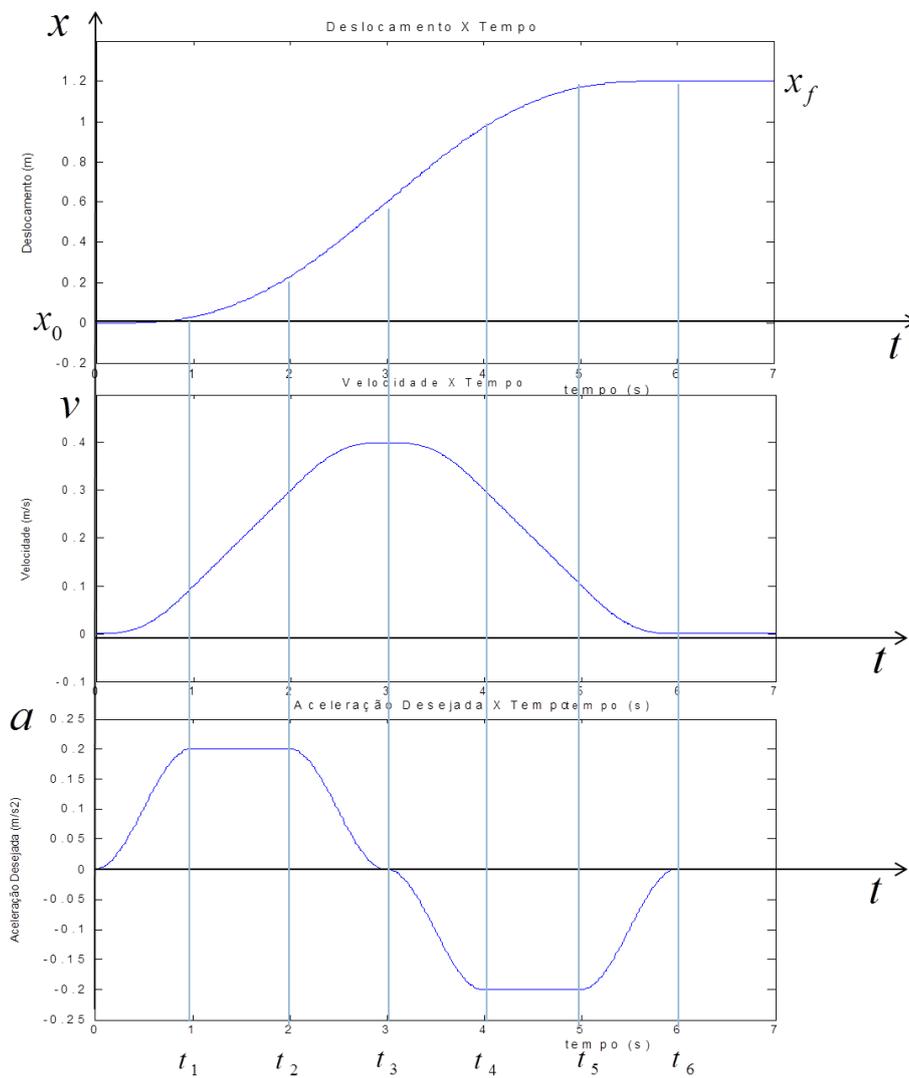


Figura 4.8: Entrada em pulso suavizado na aceleração.

4.3 Estratégia de controle aplicada aos simuladores de movimento

De forma geral, a estratégia de controle baseada nas acelerações lineares e velocidades angulares da plataforma móvel dos mecanismos paralelos em questão (plataforma plana com três graus de liberdade e Plataforma Stewart) é como a apresentada no diagrama da Figura 4.9. As posições, velocidades e acelerações lineares, assim como as orientações, as velocidades e as acelerações angulares que formam o conjunto de informações que descrevem a trajetória desejada, passam pelos modelos da cinemática inversa dos mecanismos para a obtenção das velocidades e acelerações desejadas nos atuadores. A comparação com os valores atuais (medidos pela IMU) gera o sinal de erro que é tratado no controlador e passa pelo modelo do sistema de atuação para assim gerar a saída com a trajetória efetiva da plataforma móvel. As acelerações lineares e as velocidades angulares efetivas do mecanismo são medidas pela central inercial para então passar pelos modelos da cinemática direta a fim de obter os valores efetivos das velocidades e acelerações dos atuadores, para que estes possam ser comparados com os valores desejados.

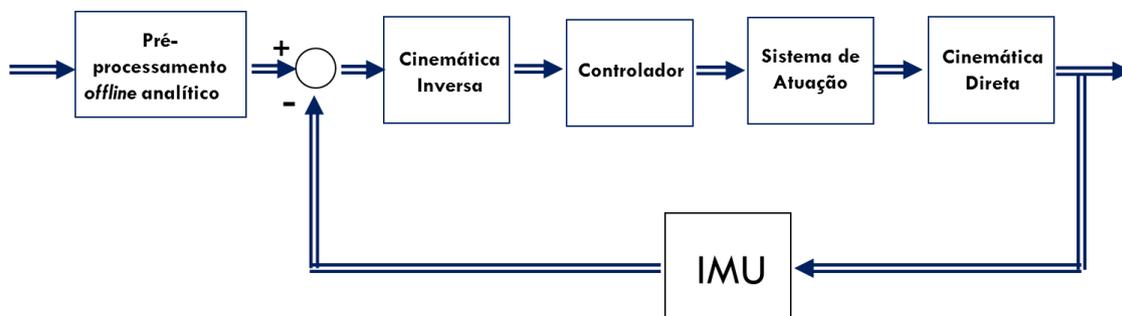


Figura 4.9: Sistema em malha fechada.

A Figura 4.10 apresenta o diagrama de blocos desta malha de controle com o detalhamento das variáveis e dos modelos cinemáticos ao longo da malha. A trajetória desejada dada em termos da posição e orientação da plataforma móvel é tratada fora do ambiente de simulação para que as acelerações lineares e velocidades angulares resultantes formem o conjunto de variáveis de entrada do problema.

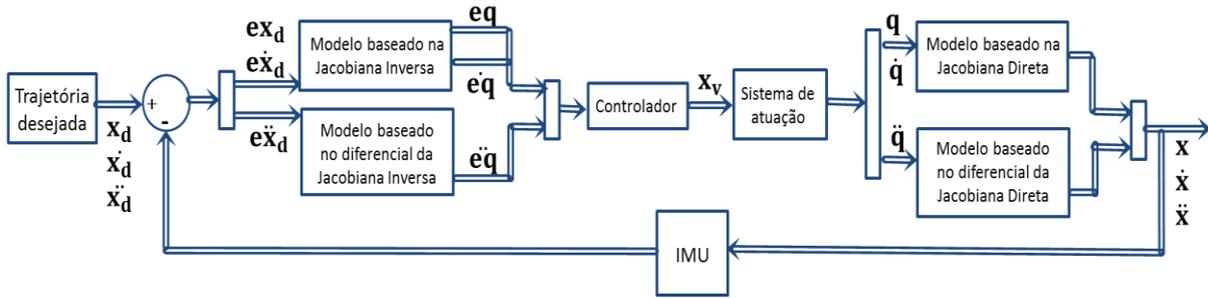


Figura 4.10: Esquema dos modelos cinemáticos da malha de controle.

A Figura 4.11 apresenta a malha aberta do sistema de atuação com a adição de um controlador $C(s)$, no qual serão tratados os erros no deslocamento de cada atuador, e $G_A(s)$ corresponde ao modelo do sistema de atuação. Na plataforma plana com três graus de liberdade, $G_A(s)$ é uma matriz diagonal 3 x 3 (Figura 4.12) e na Plataforma Stewart, uma matriz diagonal 6 x 6. Em ambas, cada termo da diagonal da matriz consiste na função de transferência do modelo do sistema de atuação.

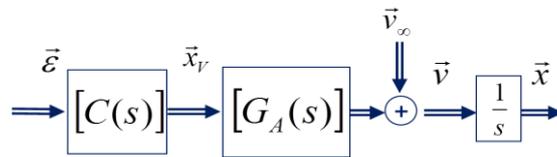


Figura 4.11: Sistema em malha aberta com entrada dos erros no controlador.

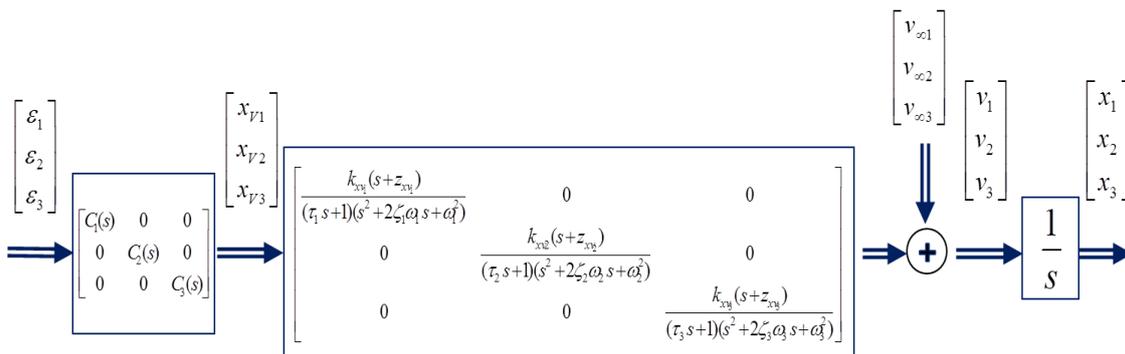


Figura 4.12: Sistema em malha aberta para três atuadores.

Desta forma, o sistema de controle para simuladores de movimento fica como detalhado na Figura 4.13. O controlador assume a forma de uma matriz de ganhos que multiplicam os sinais dos erros em posição, velocidade e aceleração.

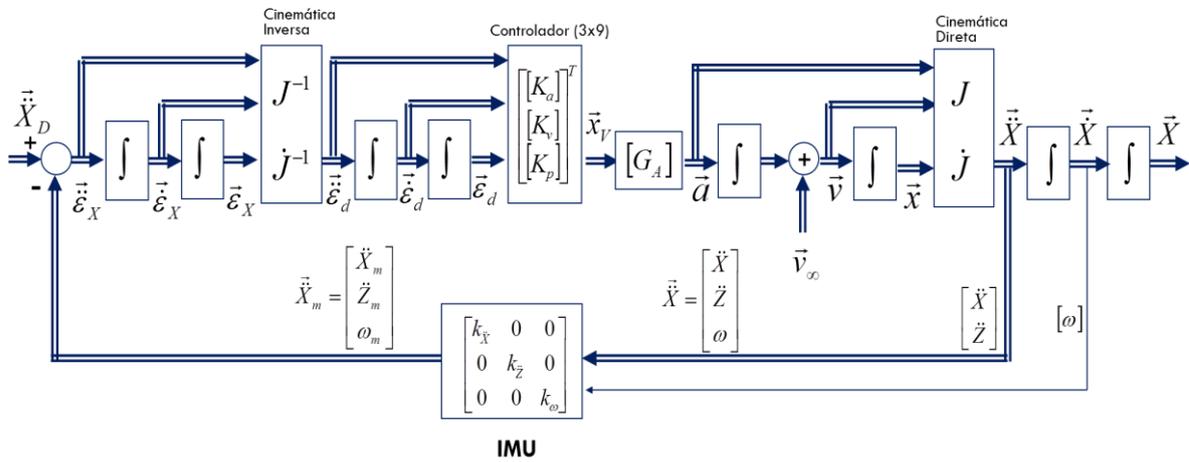


Figura 4.13: Diagrama de blocos da malha de controle.

Com a estratégia de controle definida, simulações são realizadas para sua validação e avaliação quando aplicada em um sistema de atuação vertical simples e nos mecanismos paralelos objetos deste estudo (plataforma plana de três graus de liberdade e Plataforma Stewart).

5

Simulações para avaliação dos modelos desenvolvidos

Neste Capítulo serão apresentados diagramas esquemáticos dos modelos mostrados nos Capítulos 2, 3 e 4. Estes diagramas elucidam o caminho traçado nas simulações das diversas partes do sistema. Feito isto, são indicados os códigos (que se encontram no CD Anexo) e apresentados os diagramas de blocos empregados nas simulações, além dos resultados das mesmas seguidos de suas respectivas análises.

5.1 Sistema de atuação

Primeiramente será feita uma avaliação do termo v_{∞} para determinar as condições nas quais este termo é zerado e a sua influência no comportamento do sistema de atuação. A Tabela 5.1 apresenta todos os valores usados nas simulações envolvendo o sistema de atuação e o sistema de controle. A discussão sobre o método usado na obtenção de parâmetros experimentais do atuador e da válvula de comando é encontrada em (ASSAD, M. M., 2013). Usando os parâmetros de entrada do sistema de atuação $p_f = 0,05 \text{ kgf/mm}^2$ e $mg = 1 \text{ kgf}$ (detalhes sobre a obtenção deste valor no Item 5.2.5) na Equação 4.10, obtém-se $v_{\infty} = 1,95 \times 10^{-4} \text{ mm/s}$.

Para a simulação do sistema de atuação em malha aberta com entrada no comando de válvula, x_v , foi usado o arquivo `actsys.m` para inserção dos parâmetros do sistema e o arquivo do *Simulink* `xvtoas.mdl` com o diagrama de blocos. Ambos os arquivos estão no CD Anexo que acompanha este texto.

Tabela 5.1: Parâmetros do sistema de atuação.

Identificação	Símbolo	Valor	Unidade
Área da câmara inferior ²	A_1	201	mm^2
Área da câmara superior ²	A_2	134	mm^2
Capacitância pneumática na câmara inferior ²	C_1	$3,0 \times 10^{-11}$	mm^5/kgf
Capacitância pneumática na câmara superior ²	C_2	$3,0 \times 10^{-11}$	mm^5/kgf
Fator de amortecimento do atuador ²	b	35,0	kgf/s
Coefficiente de deslocamento da válvula ¹	k_x	0,10	mm^2/s
Coefficiente de pressão da válvula ¹	k_p	0,10	$mm^5/kgf.s$
Tempo de resposta do sistema de atuação ²	τ	0,30	s
Fator de amortecimento do sistema de atuação ²	ζ	1000	-
Frequência natural do sistema de atuação ²	ω_n	13,09	rad/s

1: Valores estimados

2: Valores obtidos experimentalmente (ASSAD, M. M., 2013)

Obtendo as respostas no tempo da posição, da velocidade e da aceleração do pistão, respectivamente, para entradas no sistema de atuação em malha aberta, $p_f = 0,05 \text{ kgf/mm}^2$, $mg = 1 \text{ kgf}$ e $xv = 0$ (válvula não acionada), foi observado que a posição, a velocidade e a aceleração do atuador não alcançam valores significativos. Desta forma, pode-se considerar o sistema em equilíbrio com estes valores de pressão de alimentação e carga ($v_\infty \approx 0 \text{ mm/s}$).

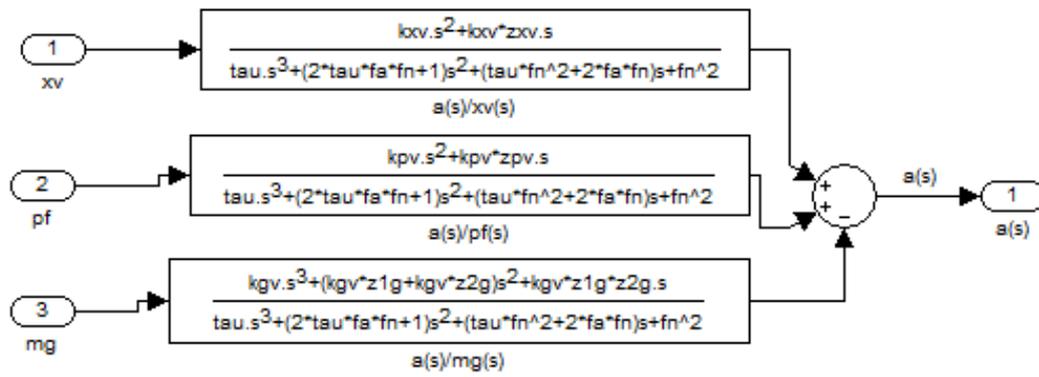


Figura 5.2: Diagrama de blocos do sistema de atuação.

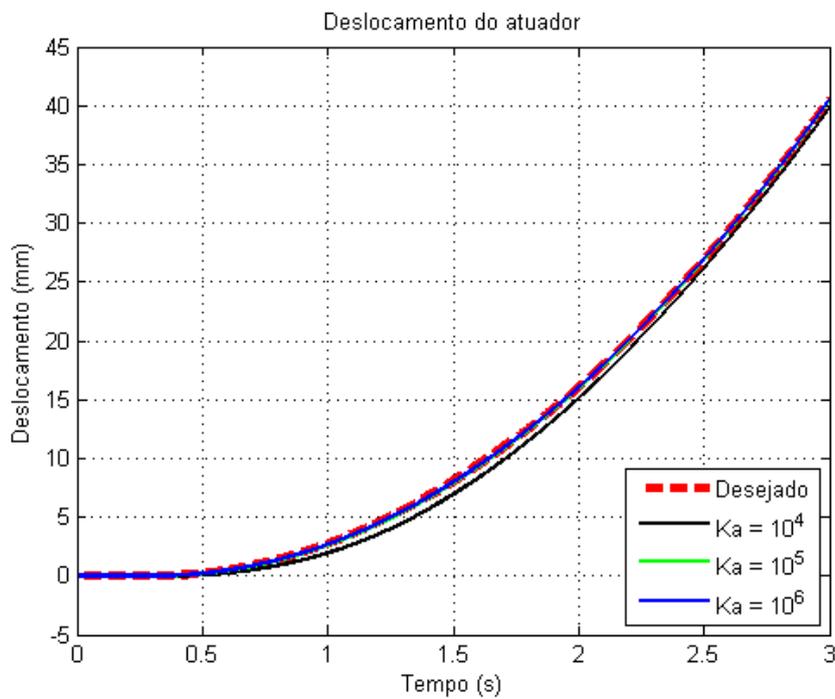


Figura 5.3: Deslocamento do atuador sem comando de válvula.

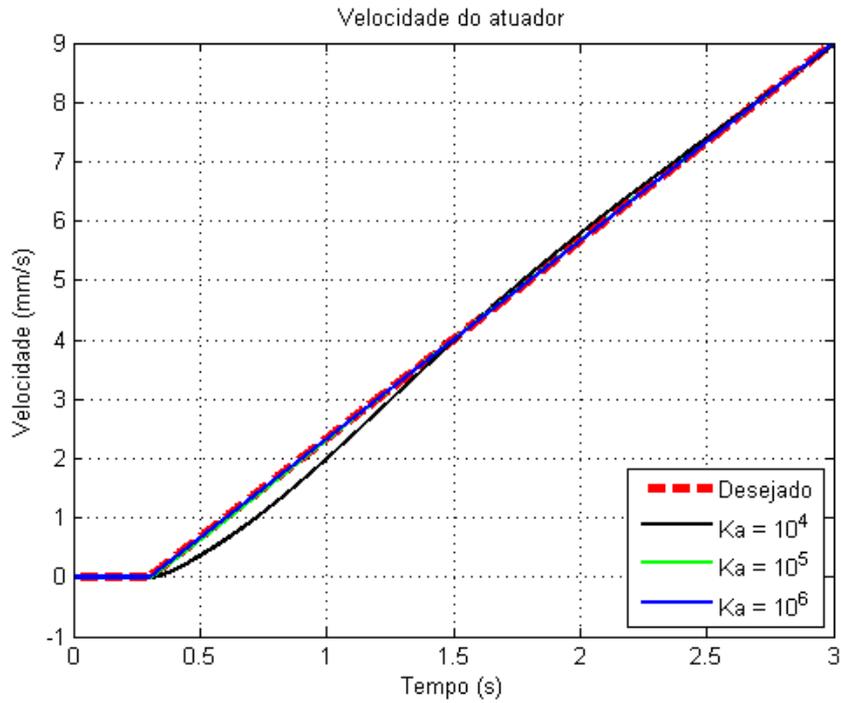


Figura 5.4: Velocidade do atuador sem comando de válvula.

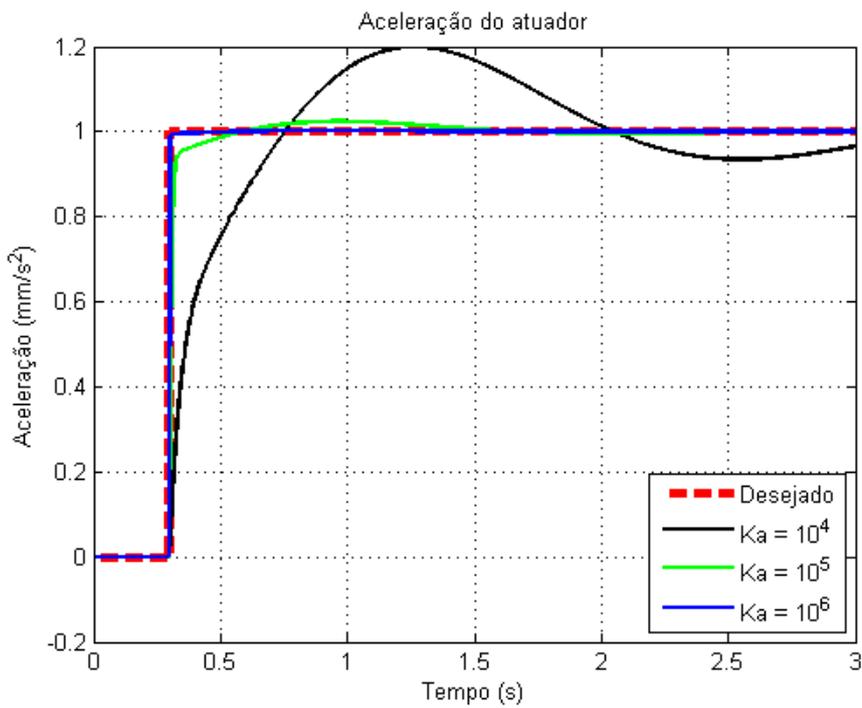


Figura 5.5: Aceleração do atuador sem comando de válvula.

Agora será avaliada a resposta do sistema de atuação em malha fechada com entradas em posição, velocidade e aceleração lineares desejadas como as apresentadas pelas Equações 4.14 de forma que a amplitude em deslocamento seja de 29,5 mm. Usando os parâmetros de entrada do sistema de atuação $p_f = 0,05$ kgf/mm², $mg = 1$ kgf e ganhos no controlador K_A iguais a 10^4 , 10^5 e 10^6 (em mm.s²/mm), foram obtidas as respostas no tempo da posição, da velocidade e da aceleração do pistão que são apresentadas nas Figuras 5.6 a 5.8, respectivamente. Nas imagens apresentadas fica evidente a influência do parâmetro do controlador proporcional nas respostas no tempo obtidas. Novamente, as respostas satisfatórias obtidas (com ganhos de 10^6) não garantem que o sistema tenha comportamento adequado, porém é um indicativo da possibilidade do controle ser realizado a partir das acelerações.

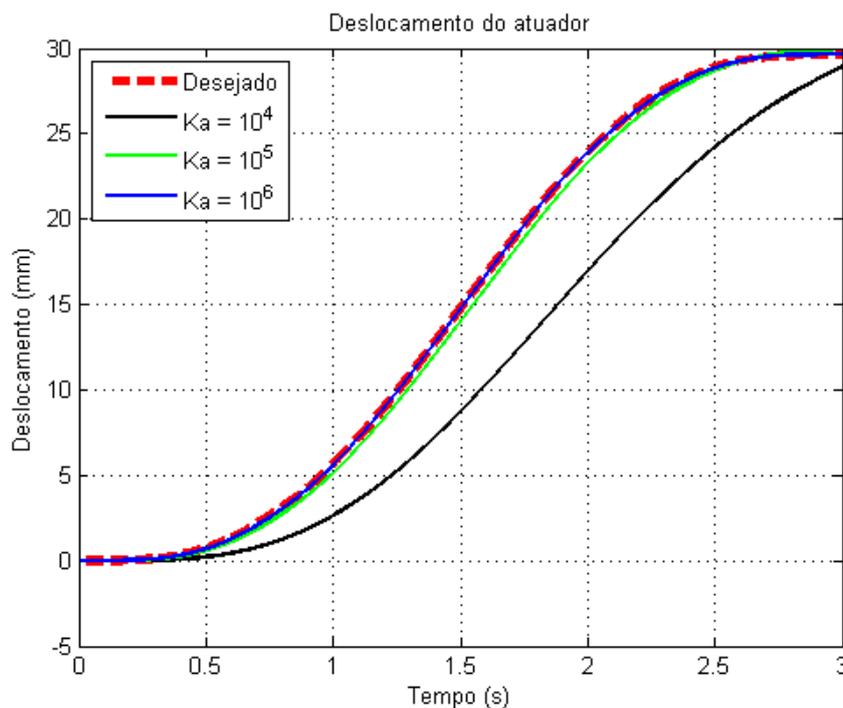


Figura 5.6: Deslocamento no sistema de atuação em malha fechada.

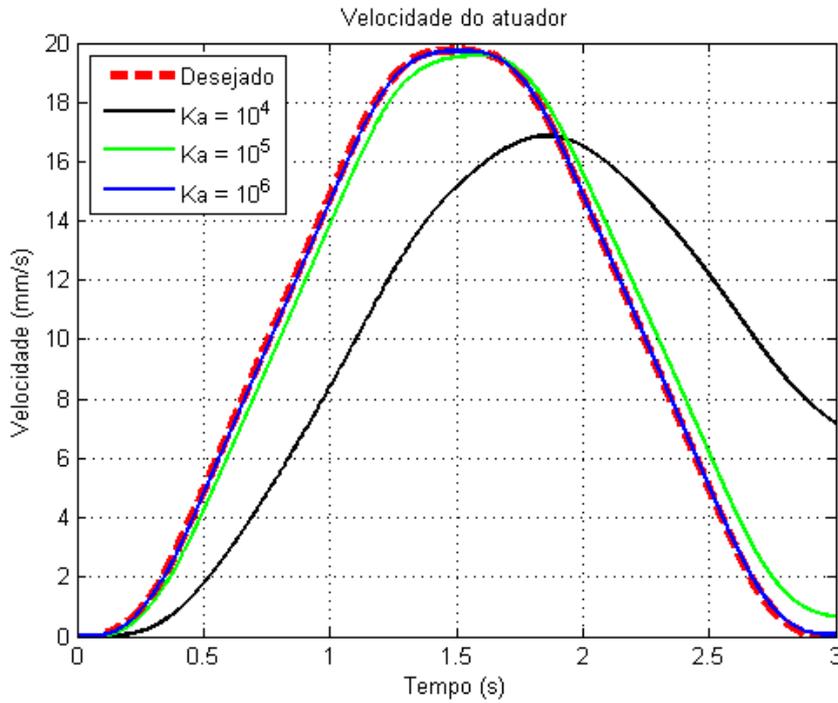


Figura 5.7: Velocidade no sistema de atuação em malha fechada.

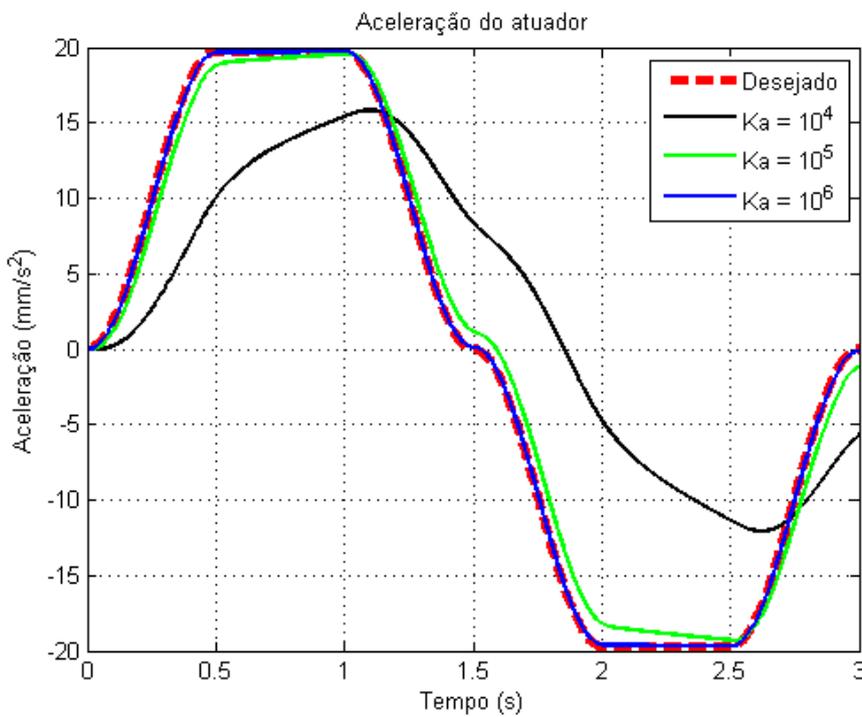


Figura 5.8: Aceleração no sistema de atuação em malha fechada.

5.2 Plataforma plana com três graus de liberdade

5.2.1 Validação da geometria inversa

O modelo da geometria inversa é, em resumo, constituído pelas Equações 2.11 a 2.13. O diagrama da Figura 5.9 apresenta o caminho traçado para obter as variáveis de comprimento dos atuadores (d_1, d_2, d_3) através da posição e orientação da plataforma móvel (x, z, θ).

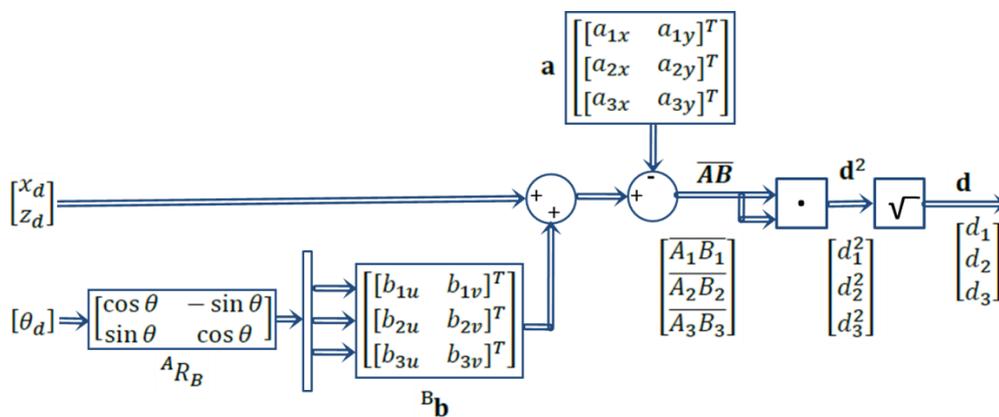


Figura 5.9: Geometria inversa da plataforma plana com três graus de liberdade.

Para validar este modelo, foi aplicada uma entrada em \mathbf{p} do tipo ($x = 0, z = f_i(t), \theta = 0$), sendo $f_i(t)$ descrita pela Equação 5.1 e apresentada na Figura 5.10. Para a simulação foi usada a função `fcn_x2.m` que é chamada na rotina de entrada `cininv.m` (todas as funções são apresentadas no CD Anexo). A função `fcn_plot3dof2.m` foi usada para o cálculo e representação gráfica da geometria da plataforma plana.

A Figura 5.11 apresenta a resposta obtida. Na Figura 5.11.a tem-se o estado inicial da plataforma plana, no qual todos os membros (atuadores) se encontram em sua posição relaxada. A Figura 5.11.b apresenta a configuração da plataforma após 2 segundos, indicando que o valor de entrada para a coordenada z fora alcançado.

$$f_1(t) = \begin{cases} 10t^2, & \text{se } t < 1; \\ 20(t - 1) + 10 - 10(t - 1)^2, & \text{se } 1 \geq t < 2; \\ 20, & \text{se } t \geq 2; \end{cases} \quad (5.1)$$

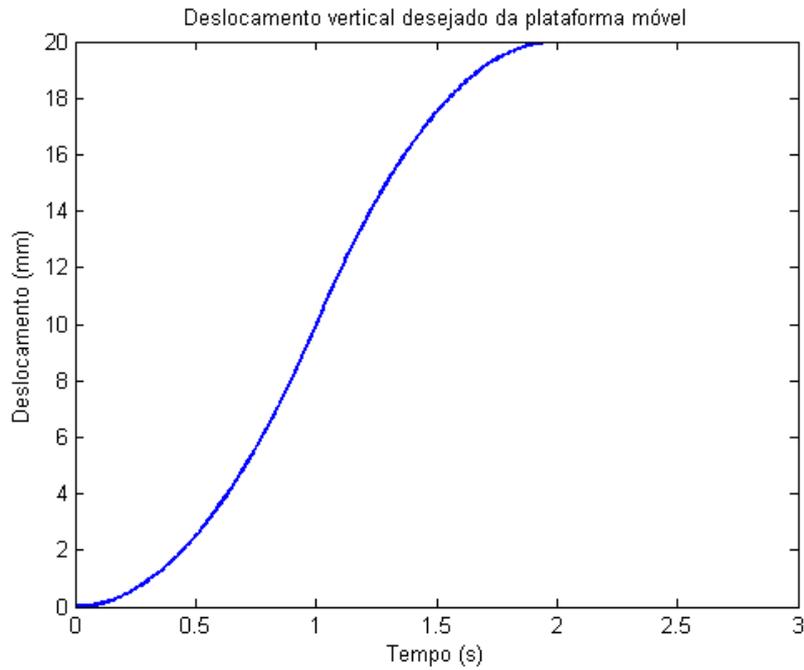


Figura 5.10: Entrada usada na validação da geometria inversa.

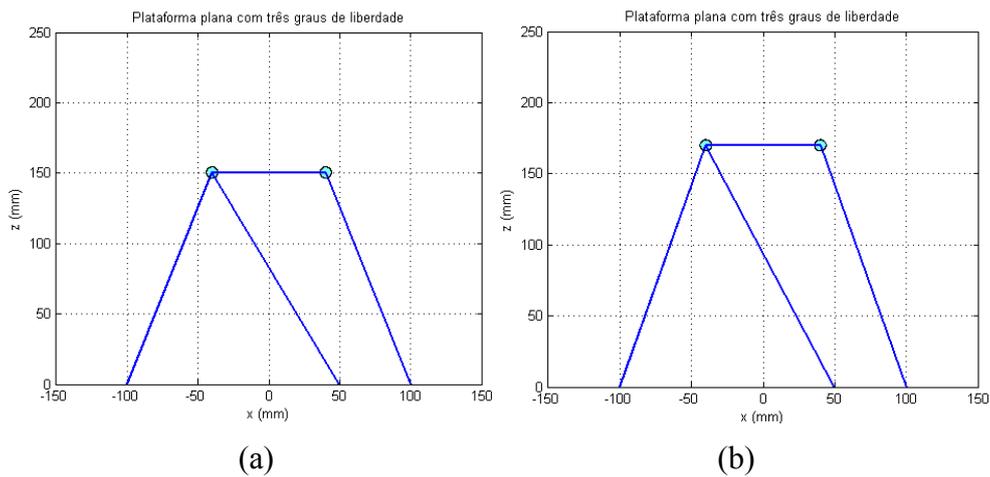


Figura 5.11: a) Geometria inicial da plataforma plana com três graus de liberdade; b) Geometria da plataforma plana após 2 segundos.

5.2.2 Validação da cinemática inversa

O modelo da cinemática inversa pode ser descrito pela matriz jacobiana inversa da plataforma plana (Equação 2.40) e pelo cálculo dos ângulos θ_1 , θ_2 e θ_3 entre os atuadores e a base da plataforma (Equações 2.41 a 2.43). O diagrama da Figura 5.12 apresenta o caminho traçado para obter as variáveis de velocidade dos atuadores (\dot{d}_1 , \dot{d}_2 , \dot{d}_3) através das velocidades lineares e angulares da plataforma móvel (\dot{x} , \dot{z} , $\dot{\theta}$).

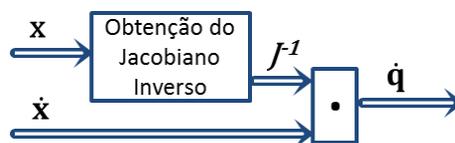


Figura 5.12: Cinemática inversa da plataforma plana com três graus de liberdade.

Para validar este modelo, foi aplicada a entrada descrita pela Equação 5.1. Além das anteriores, as funções contidas neste modelo são `fcn_j1.m` e `fcn_cininv_j.m`. Ambas são usadas no diagrama de blocos do *Simulink* `cininv_j1_ma.mdl` (Figura 5.13). Nesta simulação, também foi usada a função `fcn_plot3dof2.m` para o cálculo e representação gráfica da geometria da plataforma plana. Desta vez, são mostrados esquemas (Figuras 5.14 e 5.15) representando os estados inicial e final das plataformas, respectivamente, uma obtida através do cálculo da geometria em cada instante de tempo e outra através da solução do jacobiano inverso e posterior integração da velocidade dos atuadores para obter seus deslocamentos (e, conseqüentemente, seus comprimentos).

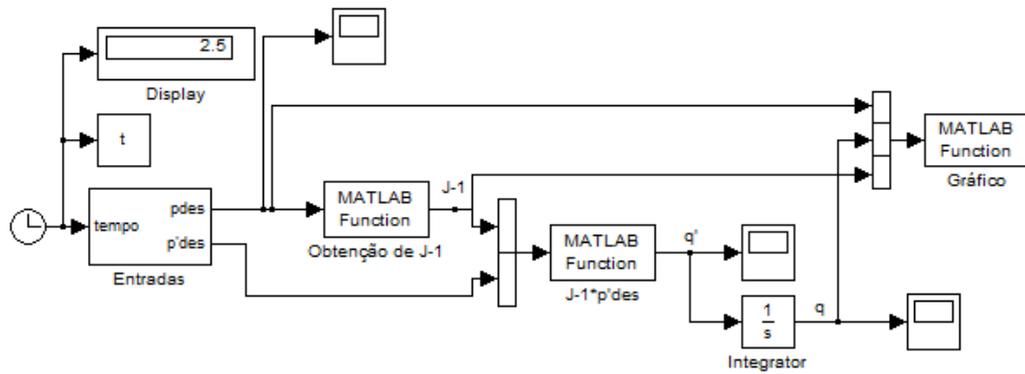


Figura 5.13: Diagrama de blocos para validação da cinemática inversa da plataforma plana.

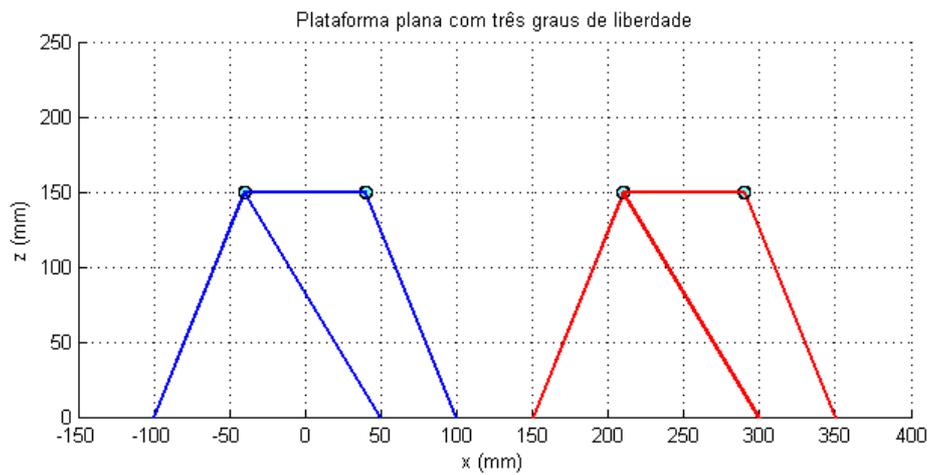


Figura 5.14: Estado inicial da plataforma plana pela cinemática inversa.

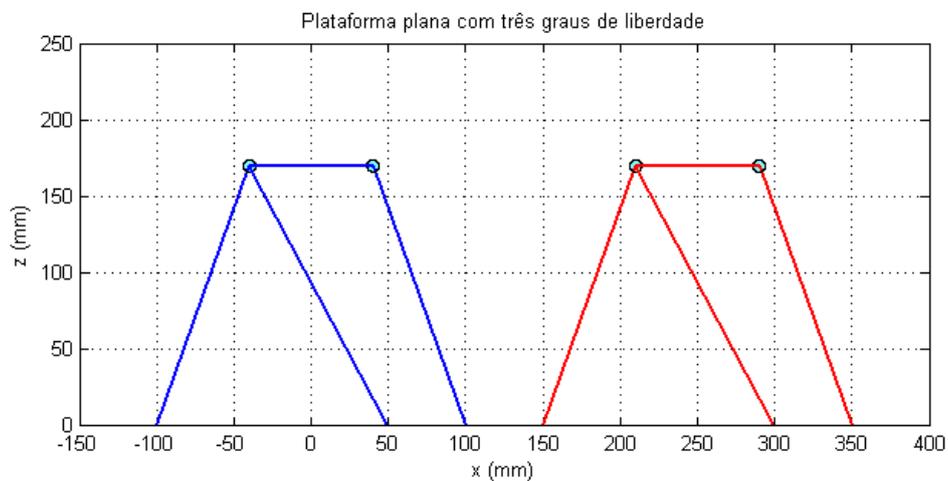


Figura 5.15: Estado final da plataforma plana pela cinemática inversa.

Para quantificar as acelerações dos atuadores é usada a Equação 2.45. O diagrama da Figura 5.16 apresenta o caminho traçado para obter estas variáveis.

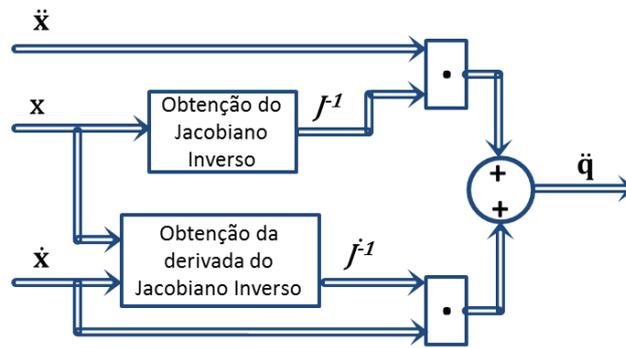


Figura 5.16: Obtenção das acelerações dos atuadores da plataforma plana.

Nesta validação também foi aplicada a entrada descrita pela Equação 5.1. Além das anteriores, as funções contidas neste modelo são `fcn_j1dot.m`, `fcn_cininv_j.m` e `fcn_cininv_jdot.m`. Estas são usadas no diagrama de blocos do *Simulink* `cindir_jdot_ma.mdl` (Figura 5.17). As Figuras 5.18 e 5.19 apresentam a comparação dos deslocamentos dos atuadores obtidos tanto pela integração dupla das acelerações provenientes do modelo baseado na derivada do jacobiano inverso, quanto pela integração das velocidades provenientes diretamente do modelo baseado no jacobiano inverso. As Figuras 5.20 e 5.21 apresentam esta comparação em cada elo para melhor visualização.

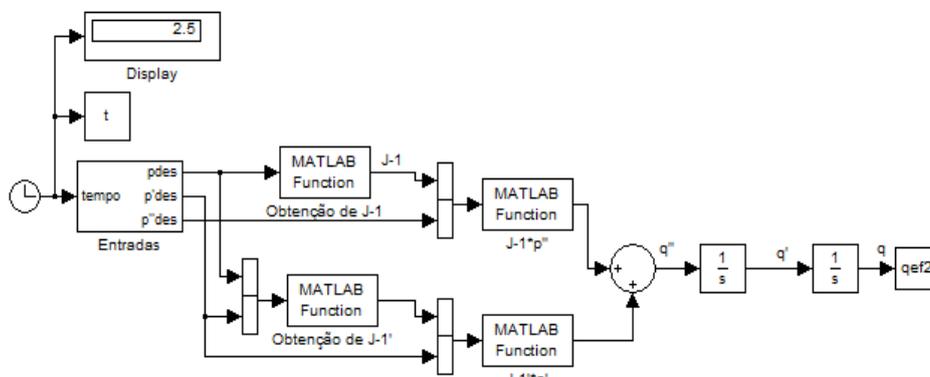


Figura 5.17: Diagrama de blocos para obter as acelerações dos atuadores da plataforma plana.

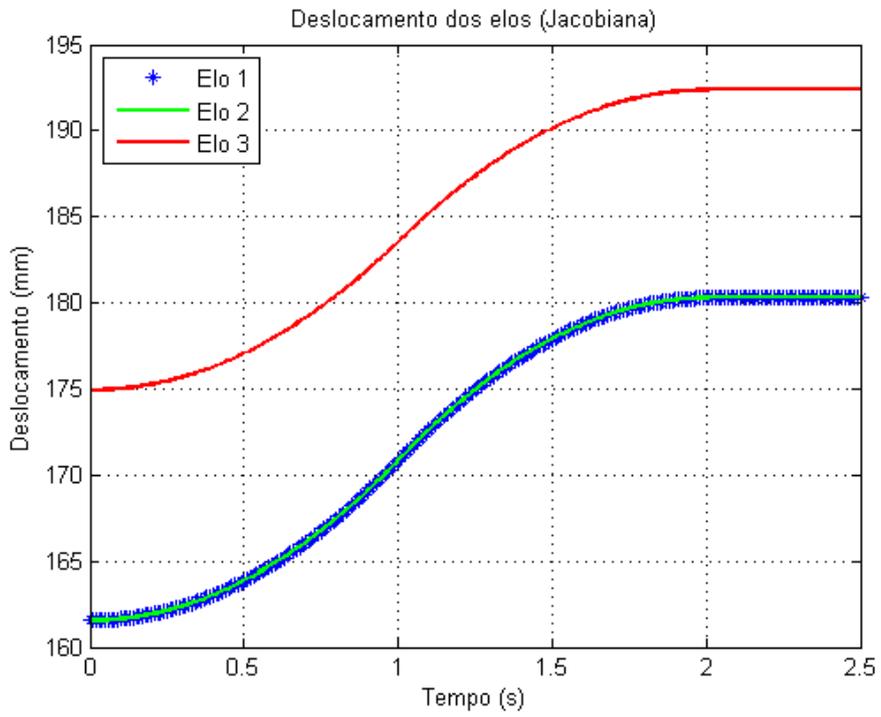


Figura 5.18: Deslocamentos dos elos pela jacobiana inversa.

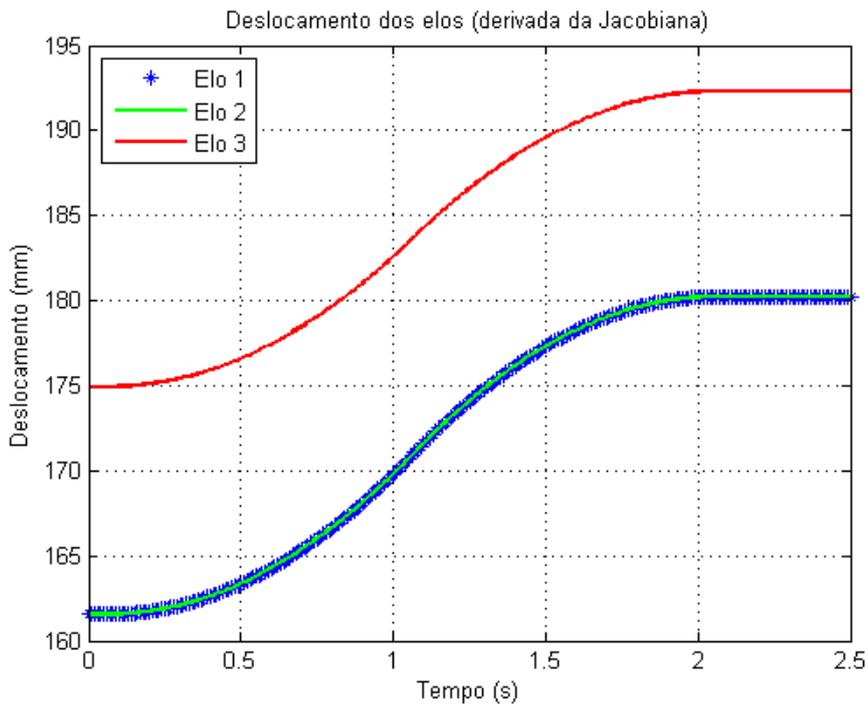


Figura 5.19: Deslocamentos dos elos pela derivada da jacobiana inversa.

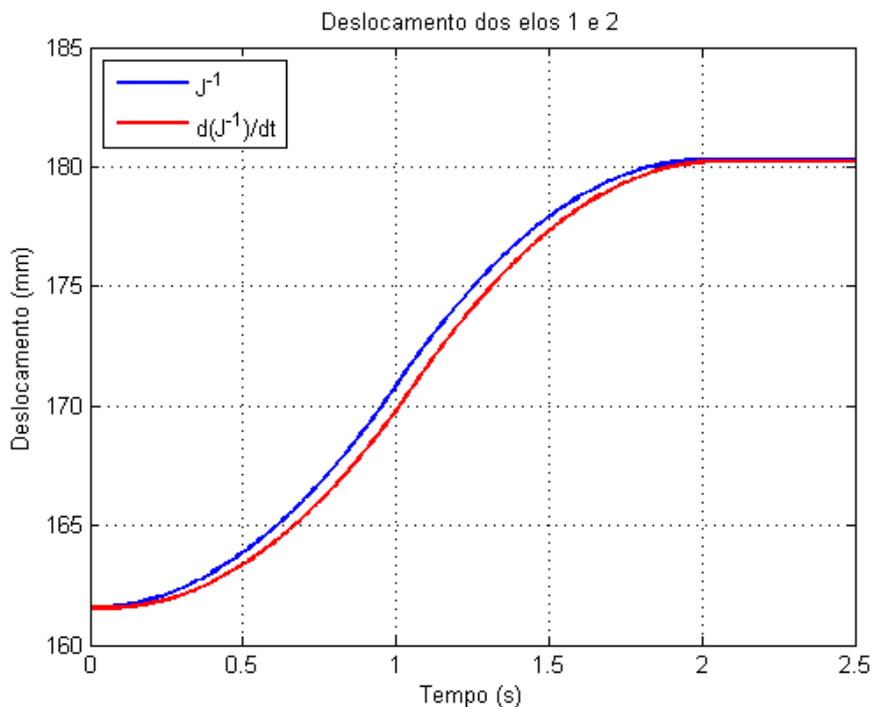


Figura 5.20: Deslocamentos dos elos 1 e 2 pelos dois métodos.

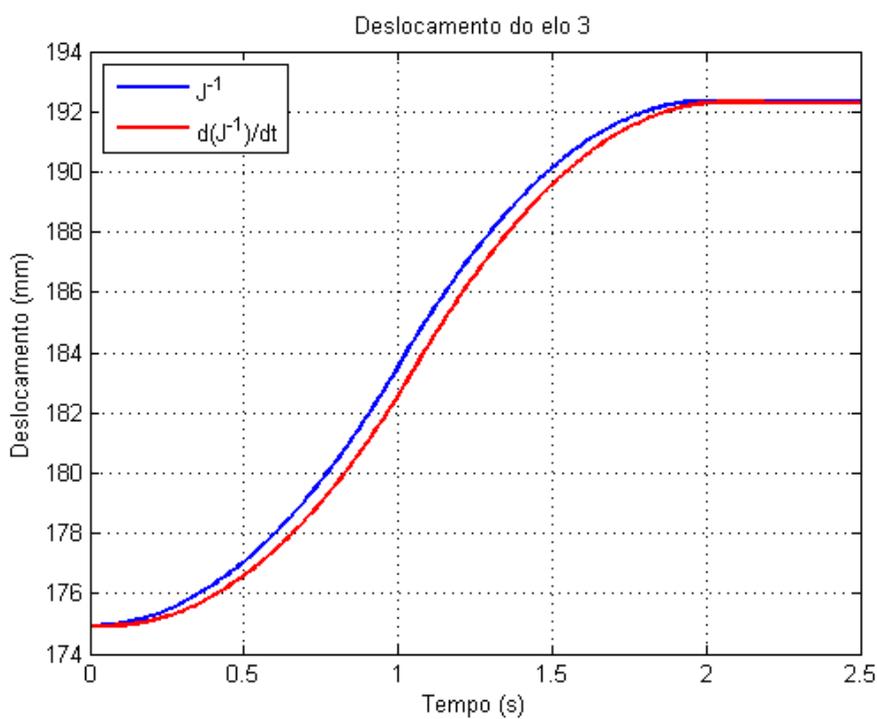


Figura 5.21: Deslocamento do elo 3 pelos dois métodos.

Nas Figuras 5.18 e 5.19 observam-se as diferenças de deslocamento entre o par de elos 1 e 2 e o elo 3. Isto se dá pela assimetria desta plataforma plana, que pode ser observada na Figura 5.11, por exemplo. Já nas Figuras 5.20 e 5.21 observam-se pequenas discrepâncias entre as respostas obtidas nos dois modelos. Os pontos inicial e final são os mesmos, porém, há um leve desvio na região central das curvas apresentadas. A resposta desejada seria a relacionada ao modelo baseado no jacobiano inverso. Esta variação provém das integrações numéricas sucessivas e de pequenos erros acumulados ao longo do grande número de operações do modelo baseado no derivativo da jacobiana inversa.

5.2.3 Validação da cinemática direta

O modelo da cinemática direta pode ser descrito pela matriz jacobiana da plataforma plana (Equações 2.64 a 2.73) e pelo cálculo dos ângulos θ_1 , θ_2 e θ_3 entre os atuadores e a base da plataforma e suas derivadas (Equações 2.41 a 2.43 e 2.49 a 2.51, respectivamente). O diagrama da Figura 5.22 apresenta o caminho traçado para obter as variáveis das velocidades lineares e angulares da plataforma móvel (\dot{x} , \dot{z} , $\dot{\theta}$) através das velocidades dos atuadores (\dot{d}_1 , \dot{d}_2 , \dot{d}_3).

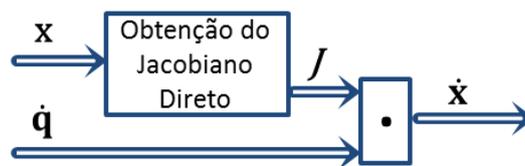


Figura 5.22: Cinemática direta da plataforma plana com três graus de liberdade.

Para validar este modelo, foi aplicada a entrada descrita pela Equação 5.1. Além das anteriores citadas, foram inseridas neste modelo as funções `fcn_cindir_j.m` e `fcn_j.m`. Ambas são usadas no diagrama de blocos do *Simulink* `cindir_j1_ma.mdl` (Figura 5.23). Nesta simulação, também foi usada a função `fcn_plot3dof2.m` para o cálculo e representação gráfica da geometria da plataforma plana. Desta vez, são comparados os valores dos elementos de \mathbf{p} e \mathbf{q} obtidos pela cinemática inversa e pela cinemática direta.

Usando como entrada da cinemática direta o vetor $\dot{\mathbf{q}}$ de saída da cinemática inversa, foi comparado o valor de saída de $z(t)$ em \mathbf{p} , tanto na saída da cinemática direta quanto o usado na entrada da cinemática inversa (Figuras 5.24.a e b). Com a mesma entrada, também foi verificado se os valores encontrados estão em concordância com os obtidos pela inversão numérica da matriz jacobiana inversa para obter a jacobiana direta da plataforma usando a função `fcn_invj1.m`. O resultado da saída em $\dot{z}(t) = v_z(t)$ usando o método analítico e o método numérico são apresentados nas Figuras 5.25.a e b.

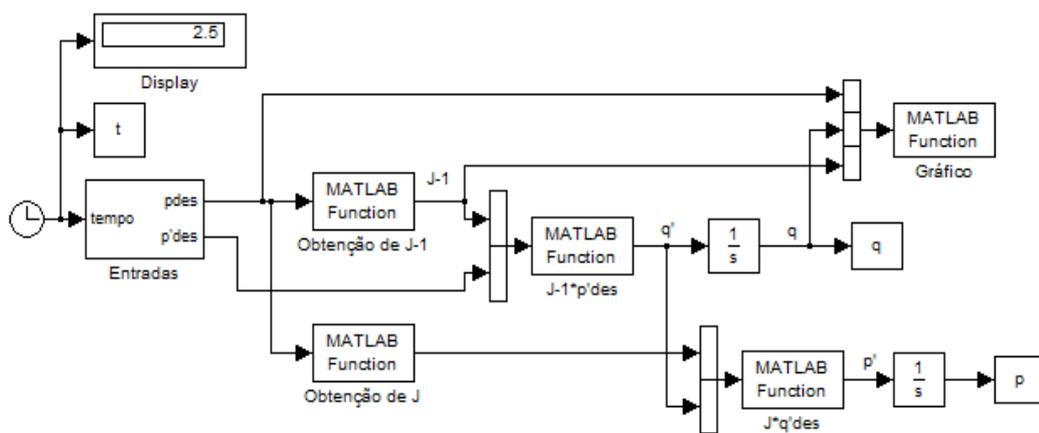


Figura 5.23: Diagrama de blocos para validação da cinemática direta da plataforma plana.

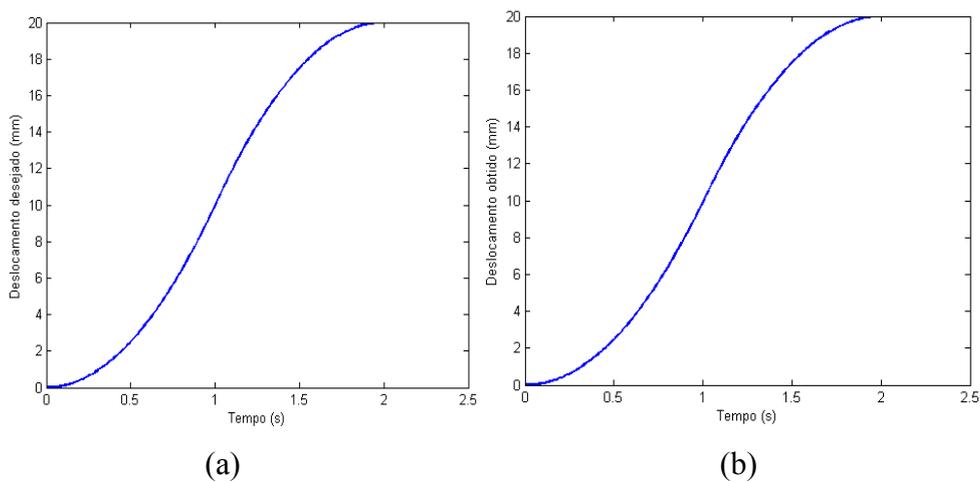


Figura 5.24: a) $z(t)$ como entrada da cinemática inversa; b) $z(t)$ como saída da cinemática direta.

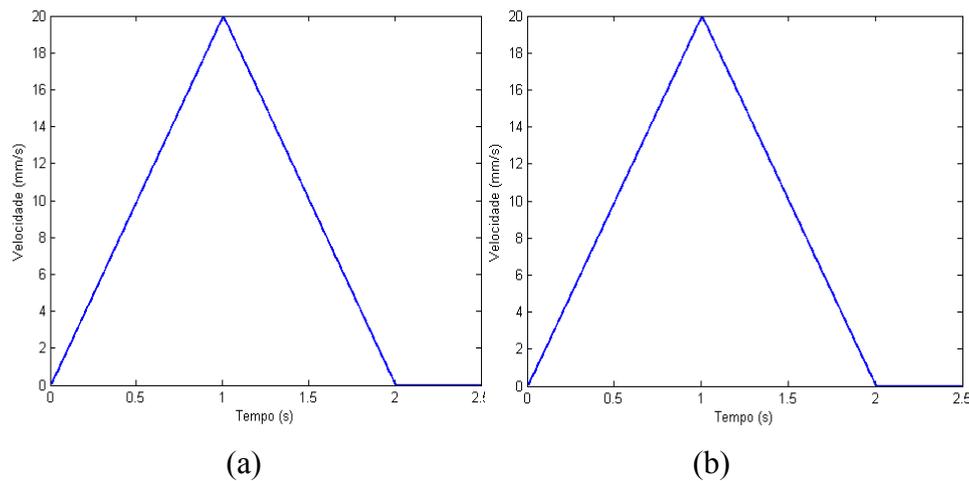


Figura 5.25: a) $v_z(t)$ como entrada da cinemática inversa; b) $v_z(t)$ como saída da cinemática direta.

Para quantificar as acelerações lineares e angulares da plataforma móvel é usada a Equação 2.75 e para o cálculo do derivativo da matriz jacobiana direta são usadas as Equações 2.77 a 2.81. O diagrama da Figura 5.26 apresenta o caminho traçado para obter estas variáveis.

Nesta validação também foi aplicada a entrada descrita pela Equação 5.1. Ao invés da função `fcn_cininv_jdot.m`, como usada para obter as acelerações pela cinemática inversa, esta simulação usa a função `fcn_cindir_jdot.m` no diagrama de blocos do *Simulink* `cindir_jdot_ma.mdl` (Figura 5.27). Foram comparados os valores dos deslocamentos e das velocidades de entrada em $z(t)$ da plataforma móvel com os obtidos através da integração da aceleração resultante da derivada do jacobiano direto. As Figuras 5.28 e 5.29 apresentam esta comparação. Este diagrama avalia conjuntamente os modelos das derivadas dos jacobianos inverso e direto, uma vez que usa os vetores $\ddot{\mathbf{q}}$ e $\dot{\mathbf{q}}$ obtidos da derivada do jacobiano inverso como entradas do modelo da derivada do jacobiano direto. A saída deste modelo é então comparada com as entradas em \mathbf{p} usadas em ambos os modelos.

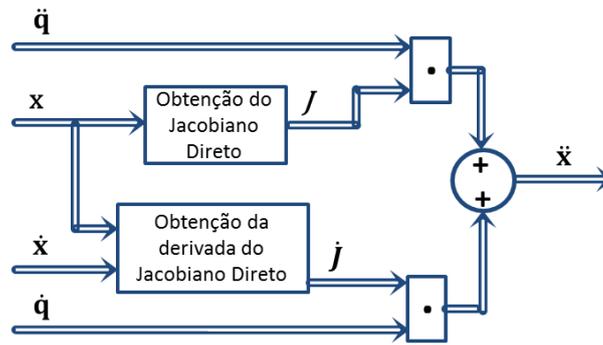


Figura 5.26: Obtenção das acelerações lineares e angulares da plataforma móvel.

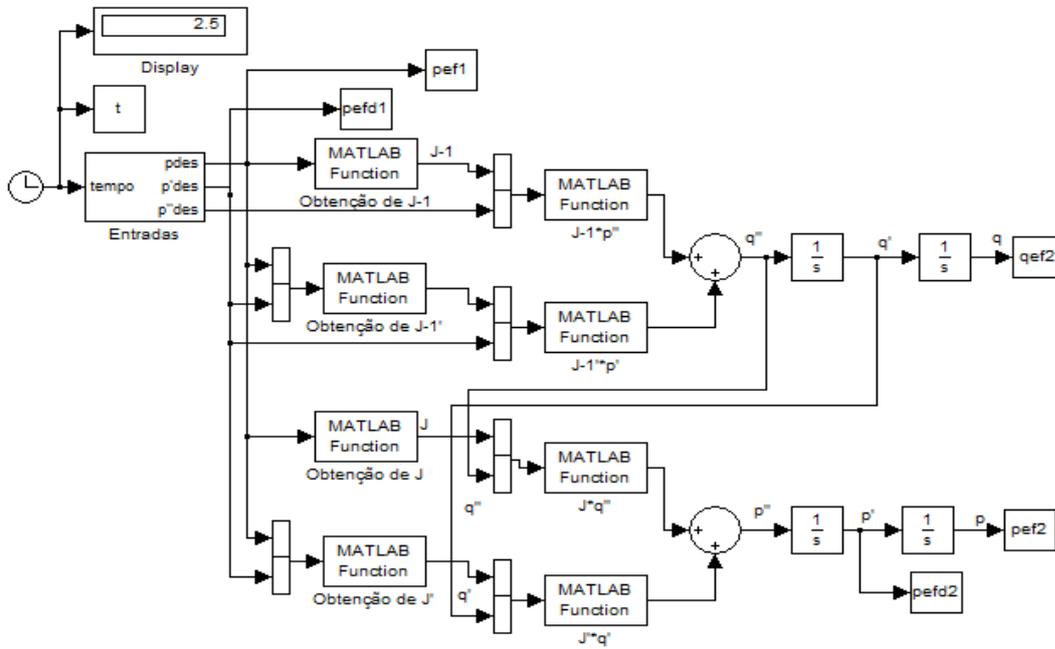


Figura 5.27: Obtenção das acelerações da plataforma móvel.

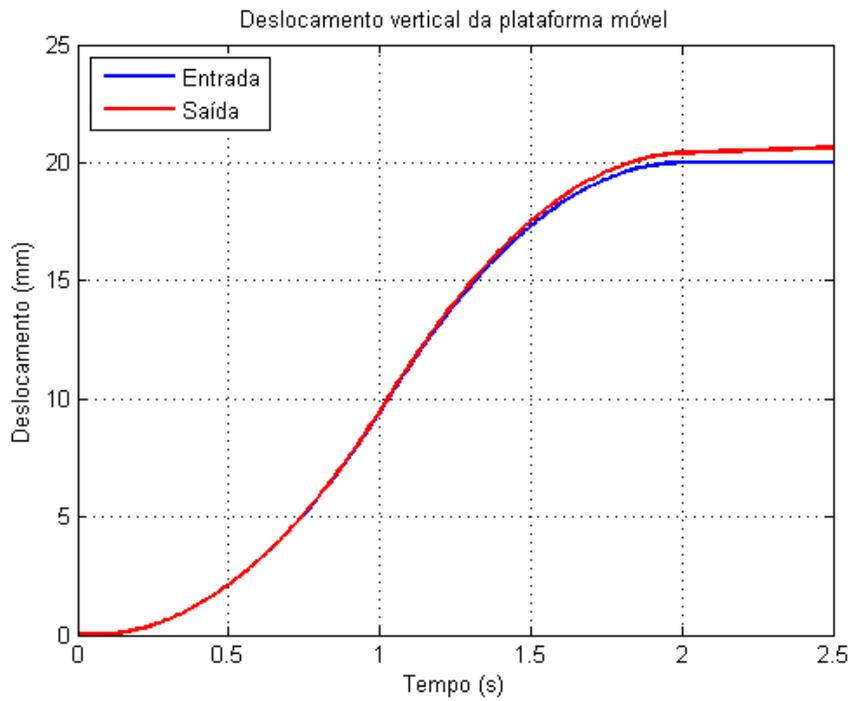


Figura 5.28: $z(t)$ desejado e obtido pela derivada do jacobiano inverso.

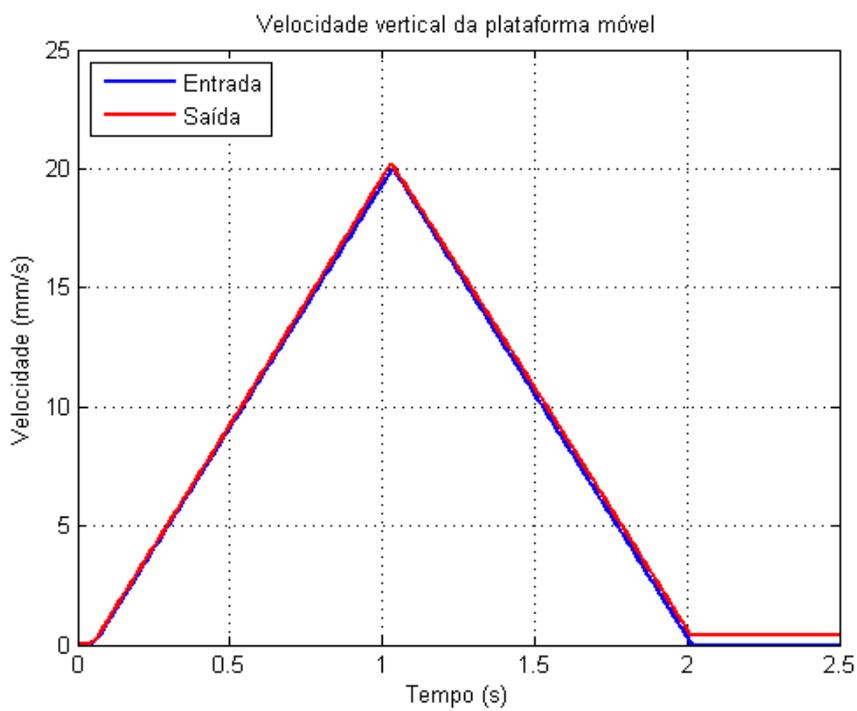


Figura 5.29: $v_z(t)$ desejado e obtido pela derivada do jacobiano inverso.

Nas Figuras 5.28 e 5.29 podem ser observados pequenos erros nos valores finais desejados de deslocamento e velocidade, respectivamente. Esta pequena variação tem origem nas sucessivas integrações e no acúmulo de erro no grande número de operações do modelo baseado nos derivativos da jacobiana direta.

5.2.4 Avaliação das condições de singularidade

Como apenas a norma-2 da matriz jacobiana inversa foi obtida analiticamente, os números de condição foram todos calculados numericamente, usando a função `cond(J)` e para o número de condição de reciprocidade, a função `rcond(J)`, ambas do *MatLab*. O diagrama de blocos feito em *Simulink* (`cindir_jdot_ma_rcond.mdl`; CD Anexo) para o cálculo das matrizes jacobianas e seus derivativos e posterior cálculo dos números de condição é apresentado na Figura 5.30.

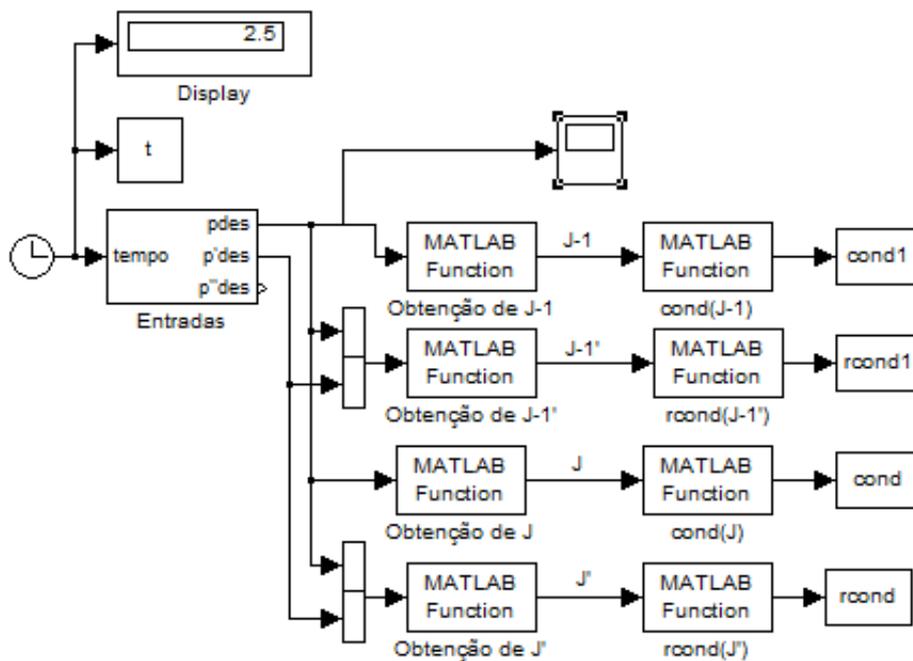


Figura 5.30: Diagrama de blocos para obtenção dos números de condição.

As funções usadas nos blocos para os cálculos das matrizes jacobianas são as mesmas apresentadas nos itens 5.2.2 e 5.2.3 e as usadas no cálculo dos números de condição são as funções `fcn_j1_rcond.m` e `fcn_j1dot_rcond.m` (CD Anexo). A Figura 5.31 apresenta o número de condição λ das matrizes jacobianas inversa e direta para uma entrada como a dada pela Equação 5.1. Para a mesma entrada, as Figuras 5.32 e 5.33 apresentam o número de condição de reciprocidade das matrizes jacobianas inversa e direta e para as matrizes dos derivativos das jacobianas inversa e direta, respectivamente.

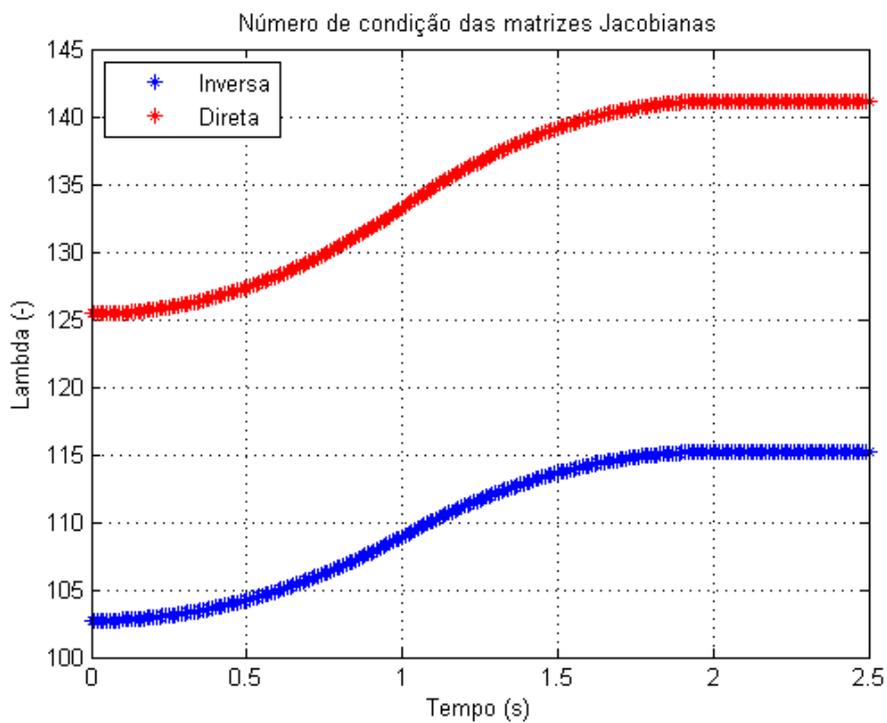


Figura 5.31: Números de condição das matrizes jacobianas inversa e direta da plataforma plana.

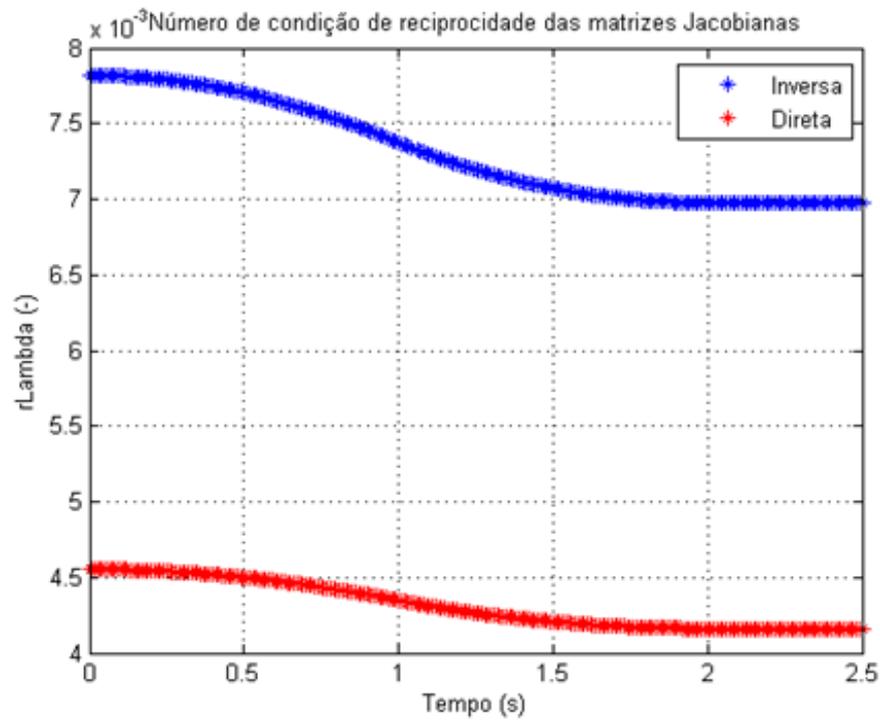


Figura 5.32: Números de condição de reciprocidade das matrizes jacobianas inversa e direta da plataforma plana.

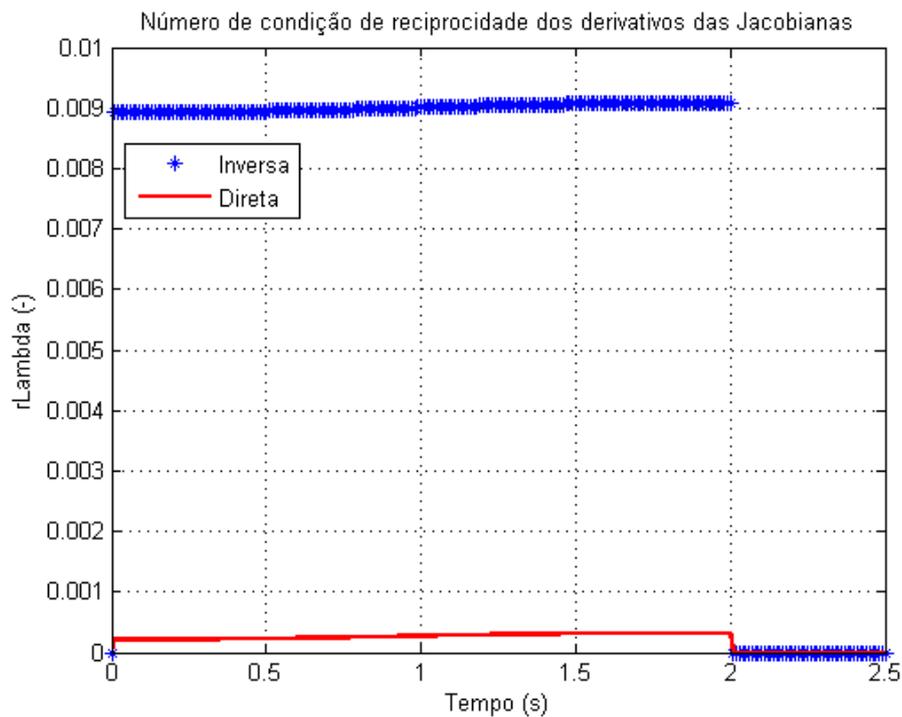


Figura 5.33: Números de condição de reciprocidade dos derivativos das jacobianas inversa e direta da plataforma plana.

Os números de condição encontrados são na ordem de 100 e os de reciprocidade na ordem de 0,001. A ordem de grandeza dos números de condição de reciprocidade se mantém a mesma para a matriz dos derivativos da jacobiana inversa, porém cai para a ordem de 0,0001 na matriz dos derivativos da jacobiana direta, piorando sua condição. Para seguir com a análise, foram dadas entradas em $x(t)$ e $\theta(t)$ descritas pelas Equações 5.2 e 5.3, respectivamente. A Figura 5.34 apresenta o número de condição λ das matrizes jacobianas inversa e direta. Para a mesma entrada, as Figuras 5.35 e 5.36 apresentam o número de condição de reciprocidade das matrizes jacobianas inversa e direta e para as matrizes dos derivativos das jacobianas inversa e direta, respectivamente.

$$x(t) = 30.\text{sen}(2\pi.t) \quad (5.2)$$

$$\theta(t) = 0,5.\text{sen}(4\pi.t) \quad (5.3)$$

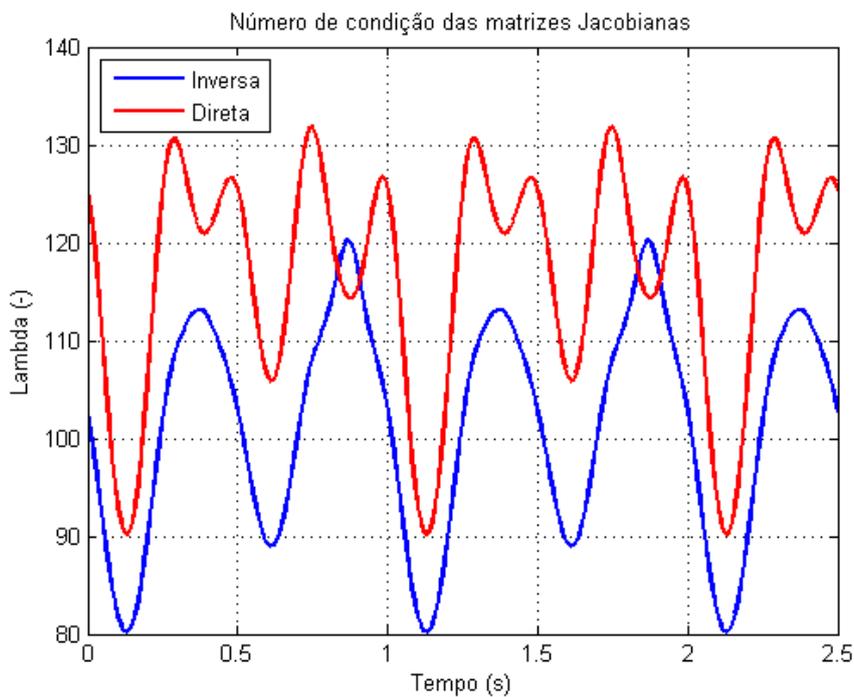


Figura 5.34: Números de condição das matrizes jacobianas inversa e direta.

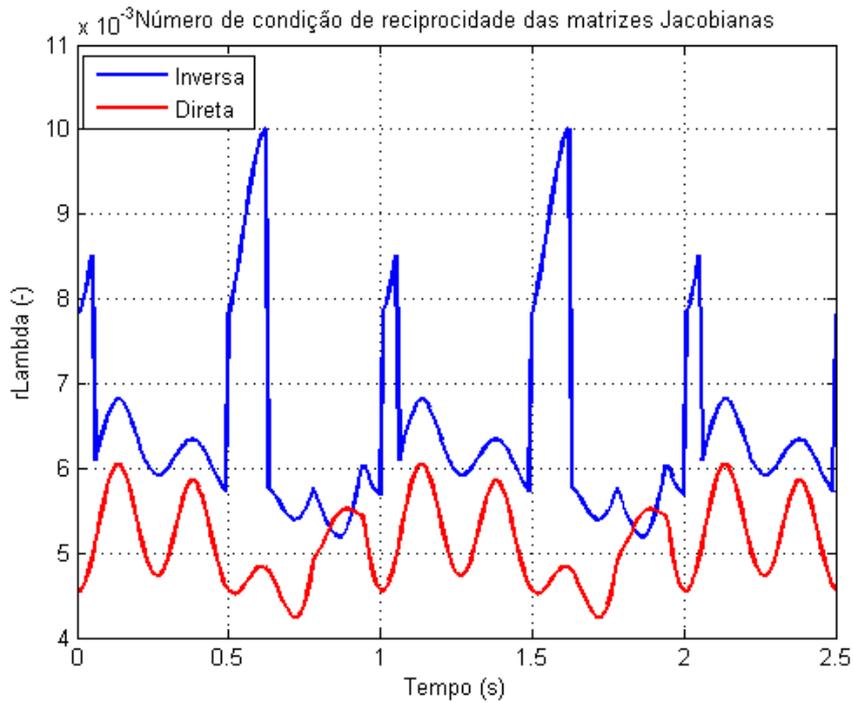


Figura 5.35: Números de condição de reciprocidade das matrizes jacobianas inversa e direta.

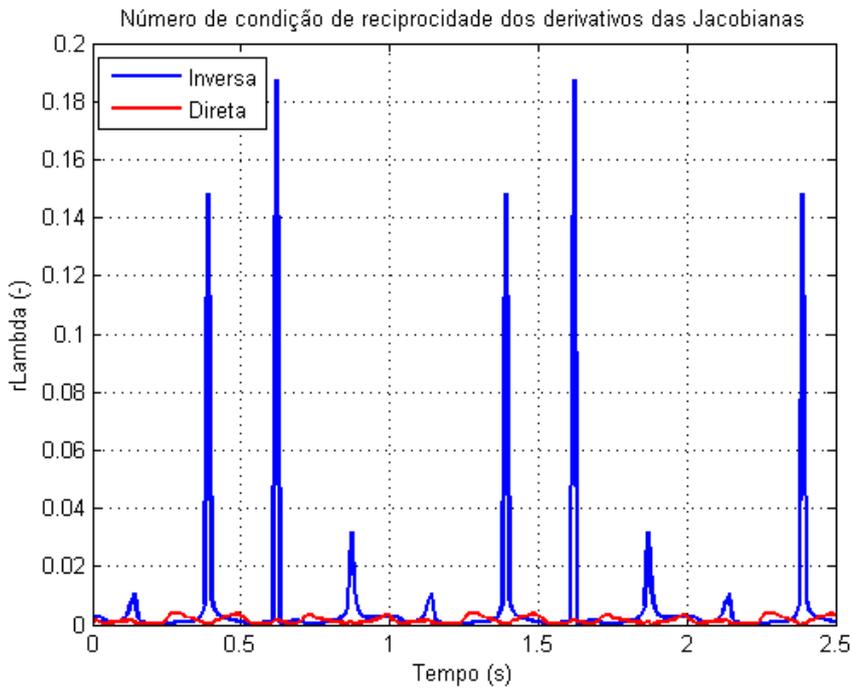


Figura 5.36: Números de condição de reciprocidade dos derivativos das jacobianas inversa e direta.

Novamente, os números de condição ficaram na ordem de 100 e os de reciprocidade na ordem de 0,001, porém agora com picos na ordem de 0,01. A ordem de grandeza dos números de condição de reciprocidade se mantém a mesma para a matriz dos derivativos da jacobiana inversa, que fica na ordem de 0,001, porém com picos até o valor de 0,1 na matriz dos derivativos da jacobiana inversa.

O número de condição associado a equações do tipo $J\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{x}}$ dá uma noção de quão imprecisa a solução $\dot{\mathbf{q}}$ será. Isto ocorre antes dos efeitos dos erros de arredondamento. Este número (assim como o de reciprocidade) é uma propriedade da matriz, não do algoritmo usado para resolver o sistema correspondente. Em particular, deve-se pensar no número de condição como sendo a taxa à qual a solução $\dot{\mathbf{q}}$ mudará com relação a uma mudança de $\dot{\mathbf{x}}$. Assim, se o número de condição é grande (ou, no caso do número de reciprocidade, muito próximo de zero), mesmo um pequeno erro no $\dot{\mathbf{x}}$ pode causar um erro grande em $\dot{\mathbf{q}}$. Por outro lado, se o número de condição é pequeno, então o erro em $\dot{\mathbf{q}}$ não será muito maior do que o erro em $\dot{\mathbf{x}}$. Assim, o número de condição é definido de forma mais precisa como a taxa máxima do erro relativo em $\dot{\mathbf{q}}$ dividido pelo erro relativo em $\dot{\mathbf{x}}$.

5.2.5 Validação do modelo de equilíbrio estático

Para avaliar o modelo (Equações 2.103 e 2.110) com relação à distribuição dos carregamentos estáticos nos atuadores dada certa posição de orientação da plataforma móvel, foi dada uma entrada correspondente ao peso dos elementos suportados pelos atuadores. A Figura 5.37 apresenta um esquema com o equilíbrio de forças para uma situação na qual $\theta = 0$ rad. As Equações 5.4 a 5.6 apresentam o somatório de forças e momentos na plataforma móvel. Do esquema apresentado tem-se que $\theta_1 = \pi - \theta_3$.

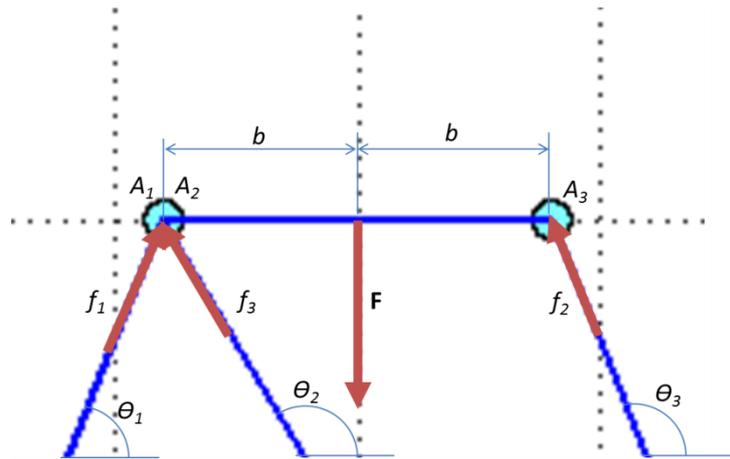


Figura 5.37: Equilíbrio de forças na plataforma móvel.

$$\sum \vec{M}_{A_1} : F \cdot b = f_2 \cdot \text{sen}(\theta_1) \cdot 2 \cdot b \therefore f_2 = \frac{F}{2 \cdot \text{sen}(\theta_1)} \quad (5.4)$$

$$\sum \vec{F}_x : f_1 \cdot \text{cos}(\theta_1) = f_3 \cdot \text{cos}(\pi - \theta_2) + f_2 \cdot \text{cos}(\theta_1) \therefore$$

$$f_1 = \frac{f_2 \cdot \text{cos}(\pi - \theta_2)}{\text{cos}(\theta_1)} + \frac{F}{2 \cdot \text{sen}(\theta_1)} \quad (5.5)$$

$$\sum \vec{F}_z : f_1 \cdot \text{sen}(\theta_1) + f_3 \cdot \text{sen}(\pi - \theta_2) + f_2 \cdot \text{sen}(\theta_1) = F \therefore$$

$$f_3 = \frac{F - (f_1 + f_2) \cdot \text{sen}(\theta_1)}{\text{sen}(\pi - \theta_2)} \quad (5.6)$$

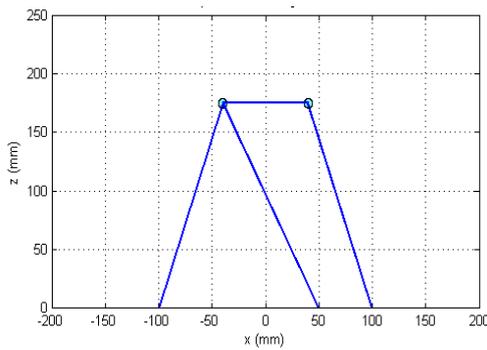
Substituindo 5.3 em 5.2, e inserindo os valores $\theta_1 = 68,2^\circ$, $\theta_2 = 149,0^\circ$ e $F = 2000 \text{ gf}$, os seguintes valores foram achados

$$\begin{cases} f_1 = 1077 \text{ gf} \\ f_2 = 1077 \text{ gf} \\ f_3 = 0 \text{ gf} \end{cases}$$

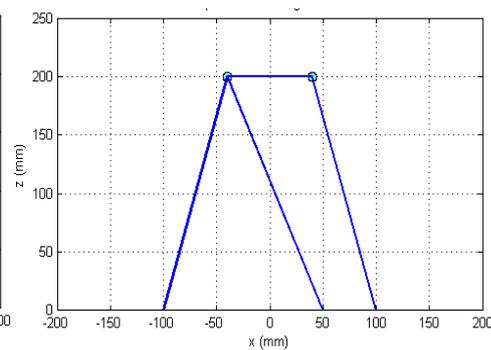
Os cálculo do Jacobiano usado nesta validação está na rotina `cininv.m` (CD Anexo). Em todas as avaliações o vetor de entradas foi $\mathbf{F} = [\mathbf{f}; \mathbf{n}] = [0 \ 2000$

$0]^T$, com dimensões $[gf \ gf \ gf.mm]^T$. As dimensões usadas no vetor de posição e orientação da plataforma foram $[\mathbf{p}] = [mm \ mm \ rad]^T$ e $[\boldsymbol{\tau}] = [gf \ gf \ gf]^T$. As configurações estudadas da plataforma plana juntamente com as saídas encontradas para as forças nos atuadores são apresentadas na Figura 5.11.a e nas Figuras 5.38.a a 5.38.f.

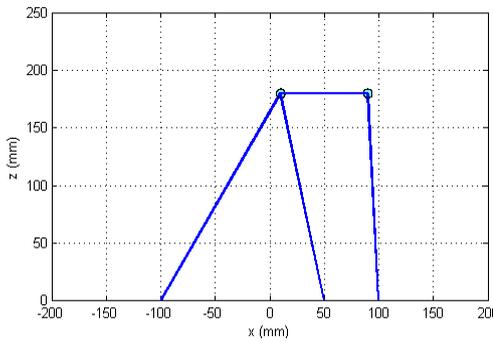
- $\mathbf{p} = [0 \ 0 \ 0]^T$; $\boldsymbol{\tau} = [1077 \ 1077 \ 0]^T$ (Figura 5.11.a);
- $\mathbf{p} = [0 \ 25 \ 0]^T$; $\boldsymbol{\tau} = [1057 \ 1057 \ 0]^T$ (Figura 5.38.a);
- $\mathbf{p} = [0 \ 50 \ 0]^T$; $\boldsymbol{\tau} = [1044 \ 1044 \ 0]^T$ (Figura 5.38.b);
- $\mathbf{p} = [50 \ 30 \ 0]^T$; $\boldsymbol{\tau} = [391 \ 1001 \ 683]^T$ (Figura 5.38.c);
- $\mathbf{p} = [-30 \ 25 \ 0]^T$; $\boldsymbol{\tau} = [1420 \ 1124 \ -485]^T$ (Figura 5.38.d);
- $\mathbf{p} = [0 \ 25 \ 0.61]^T$; $\boldsymbol{\tau} = [1023 \ 853 \ 292]^T$ (Figura 5.38.e);
- $\mathbf{p} = [0 \ 25 \ -0.52]^T$; $\boldsymbol{\tau} = [1168 \ 1434 \ -468]^T$ (Figura 5.38.f).



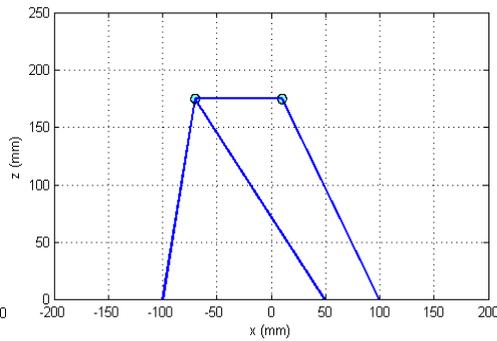
(a)



(b)



(c)



(d)

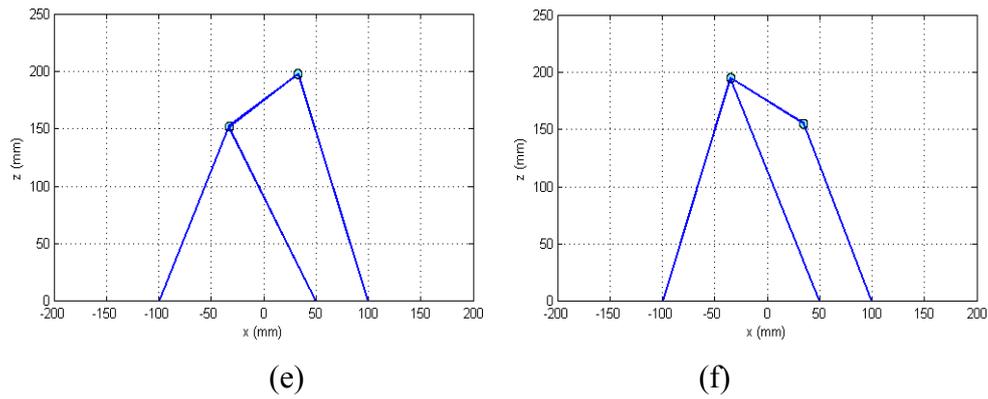


Figura 5.38: Configurações da plataforma plana para a avaliação dos carregamentos estáticos.

5.2.6 Análise das estratégias de controle

A Figura 5.39 apresenta o diagrama de blocos para a simulação do sistema em malha fechada de controle e a Figura 5.40 apresenta o diagrama de blocos para a simulação das funções de transferência de cada atuador. Neste estudo, o carregamento na plataforma móvel foi distribuído uniformemente nos atuadores (entrada mg) e a pressão da fonte foi considerada constante (entrada pf). Já os parâmetros do sistema de atuação serão os mesmos em todas as simulações. Estes, ainda são objetos de estudo no Laboratório de Desenvolvimento de Controle, LDC. Mais detalhes sobre este estudo poderão ser encontrados em (ASSAD, M. M., 2013). A Tabela 5.1 (Seção 5.1) apresenta os valores de todos os parâmetros do sistema de atuação usados nas simulações. Os valores dos zeros (z_{xv} , z_{pv} , z_{lg} e z_{2g}) e dos coeficientes k_{xv} , k_{pv} e k_{gv} foram obtidos a partir das relações descritas nas Equações 4.1, 4.2, 4.8 e 4.10 e dos valores da Tabela 5.1. Em todas as simulações os valores de mg e de pf foram 1,0 kgf e 0,05 kgf/mm² (4,9 bar), respectivamente. Em cada simulação os resultados serão comparados para diferentes ganhos do controlador. A matriz de ganhos do controlador usada é da forma apresentada na Equação 5.7.

$$K = \begin{bmatrix} K_A \\ K_V \\ K_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_A \cdot I_{3 \times 3} \\ k_V \cdot I_{3 \times 3} \\ k_P \cdot I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

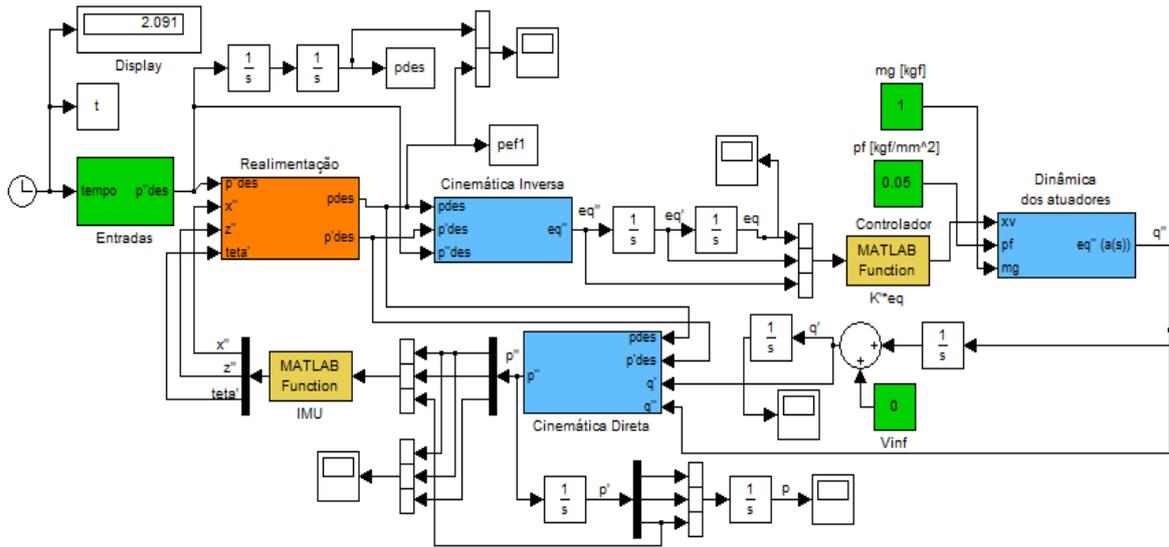


Figura 5.39: Diagrama de blocos para o sistema em malha fechada.

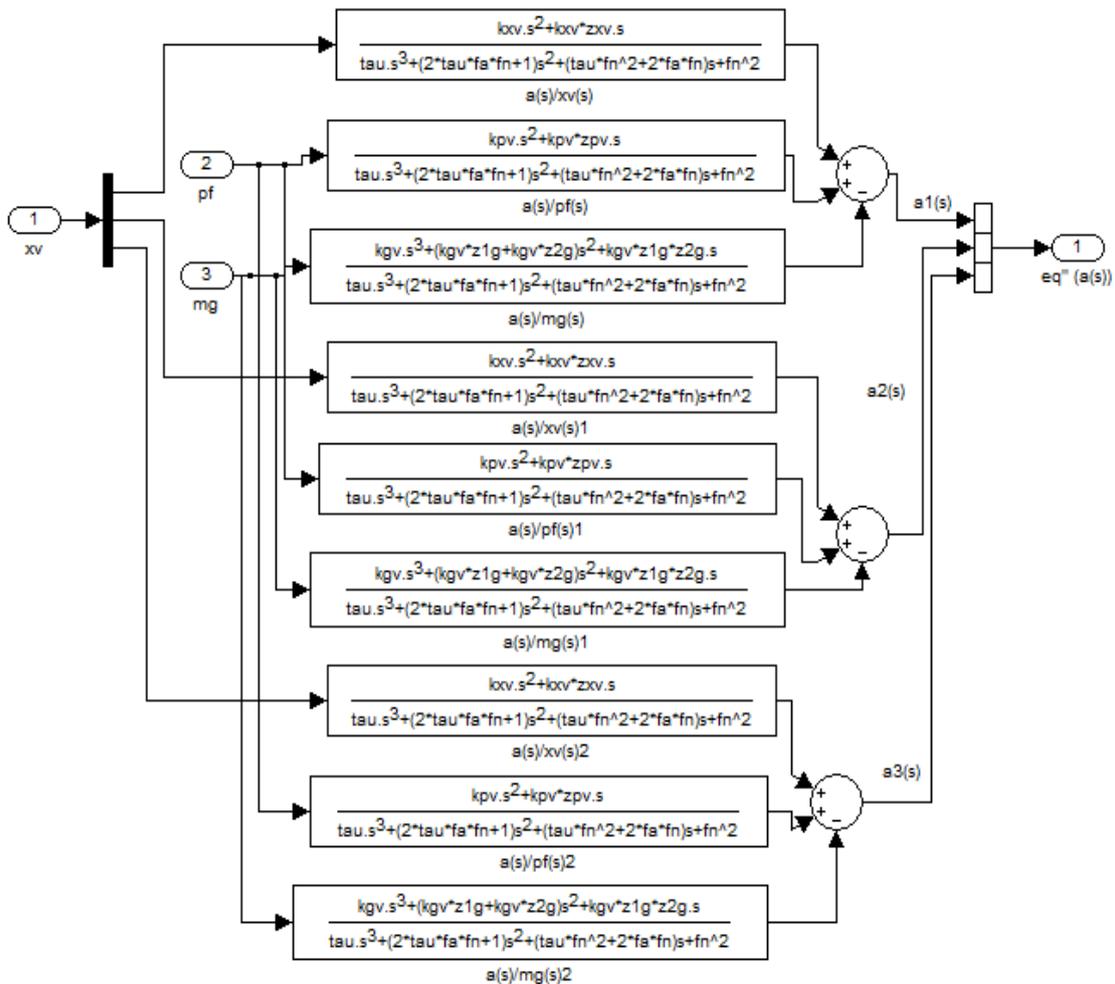


Figura 5.40: Funções de transferência da dinâmica dos atuadores.

No controlador, K_A , K_V e K_P correspondem aos ganhos nos sinais de erro da aceleração, velocidade e posição, respectivamente. Após passarem por estes ganhos, os três sinais são somados formando a saída do comando de válvula, x_v . Já a central inercial (IMU) é representada por uma matriz $I_{3 \times 3}$.

Para uma entrada em cossenóide (Figura 4.6) na aceleração vertical desejada da plataforma móvel com $A = 20 \text{ mm/s}^2$ e $\omega = 6,28 \text{ rad/s}$, e ganhos no controlador todos iguais a 0,01 (mm/mm em K_P , mm.s/mm em K_V e mm.s²/mm em K_A), a resposta no tempo do deslocamento ficou como mostra a Figura 5.41. A Figura 5.42 apresenta a resposta no tempo para o deslocamento dos atuadores e as Figuras 5.43 e 5.44 apresentam os erros de deslocamento vertical da plataforma móvel e os erros de deslocamento dos atuadores, respectivamente. As Figuras 5.45 a 5.48 apresentam estas mesmas respostas no tempo para ganhos do controlador iguais a 0,10 e as Figuras 5.49 a 5.52 apresentam estas respostas para ganhos iguais a 1,00.

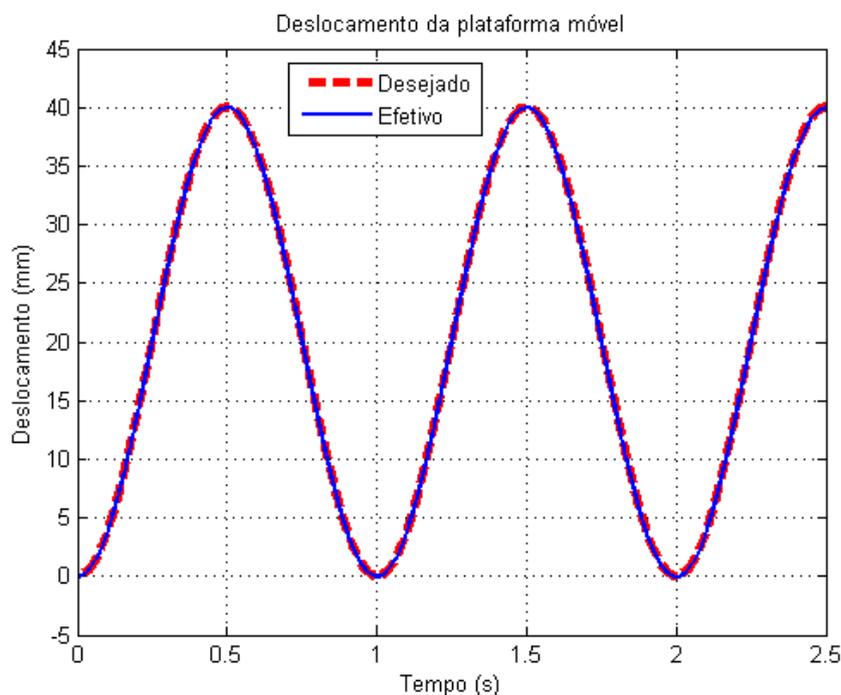


Figura 5.41: Deslocamento vertical da plataforma móvel para entrada em cossenóide e ganhos iguais a 0,01.

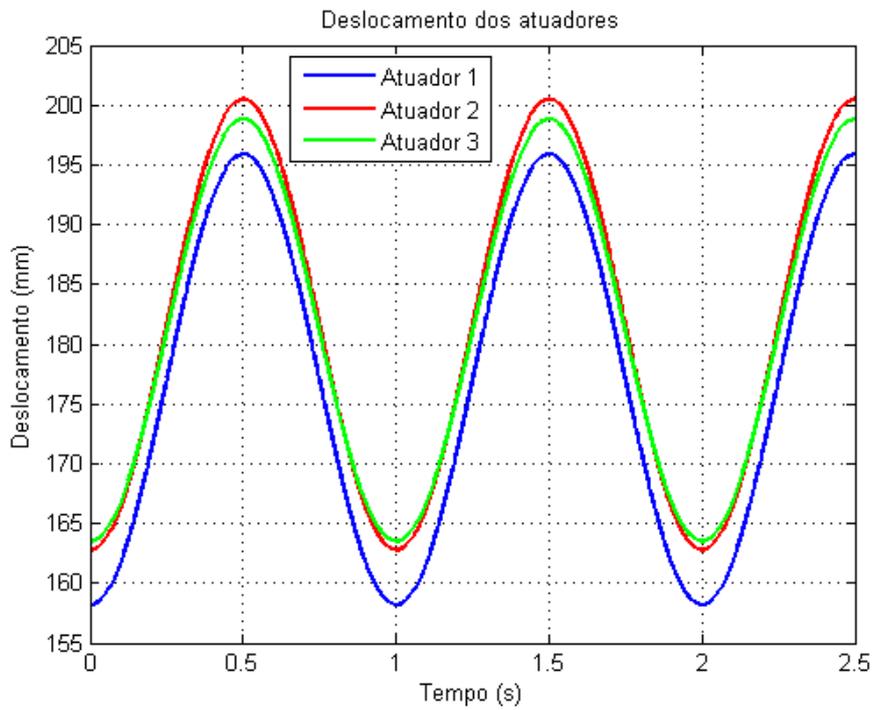


Figura 5.42: Deslocamento dos atuadores para entrada em cossenóide e ganhos iguais a 0,01.

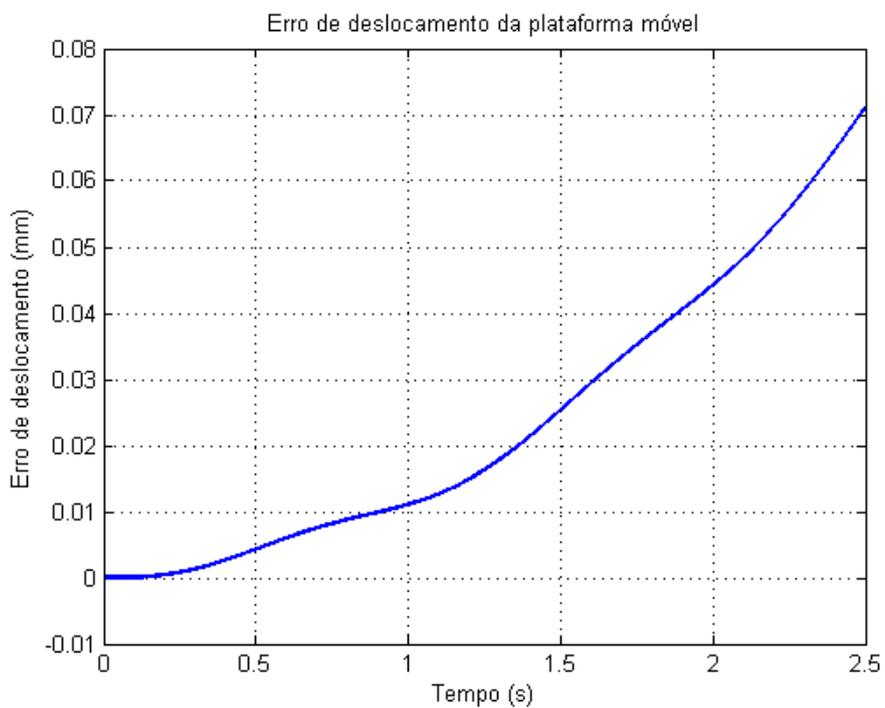


Figura 5.43: Erro de deslocamento vertical da plataforma móvel para entrada em cossenóide e ganhos iguais a 0,01.

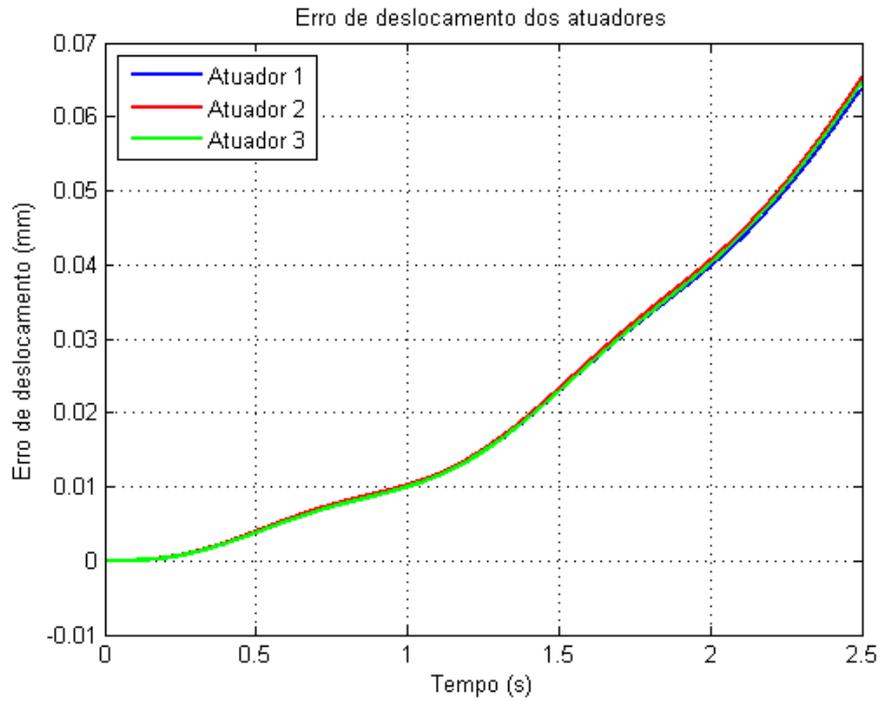


Figura 5.44: Erros de deslocamento dos atuadores para entrada em cossenóide e ganhos iguais a 0,01.

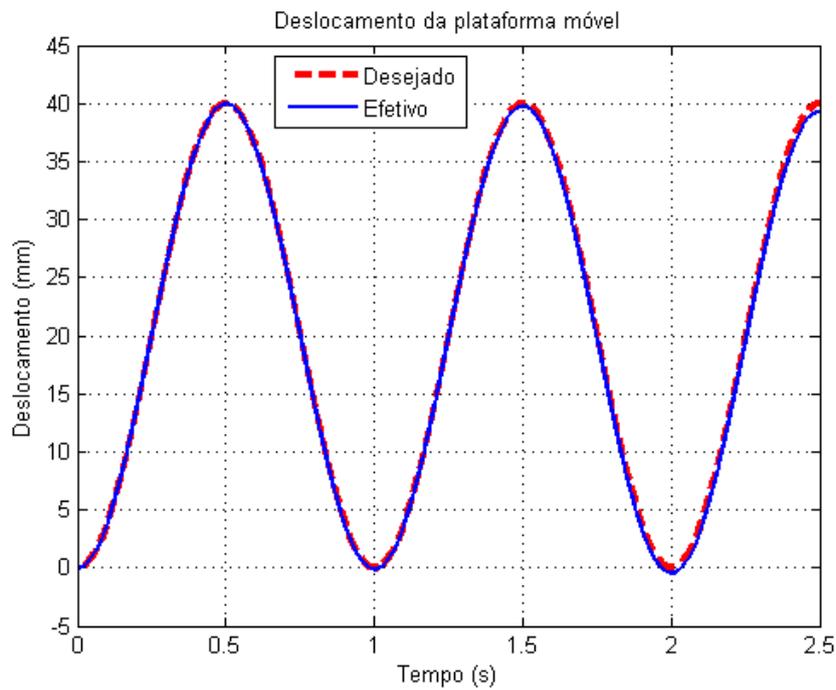


Figura 5.45: Deslocamento vertical da plataforma móvel para entrada em cossenóide e ganhos iguais a 0,10.

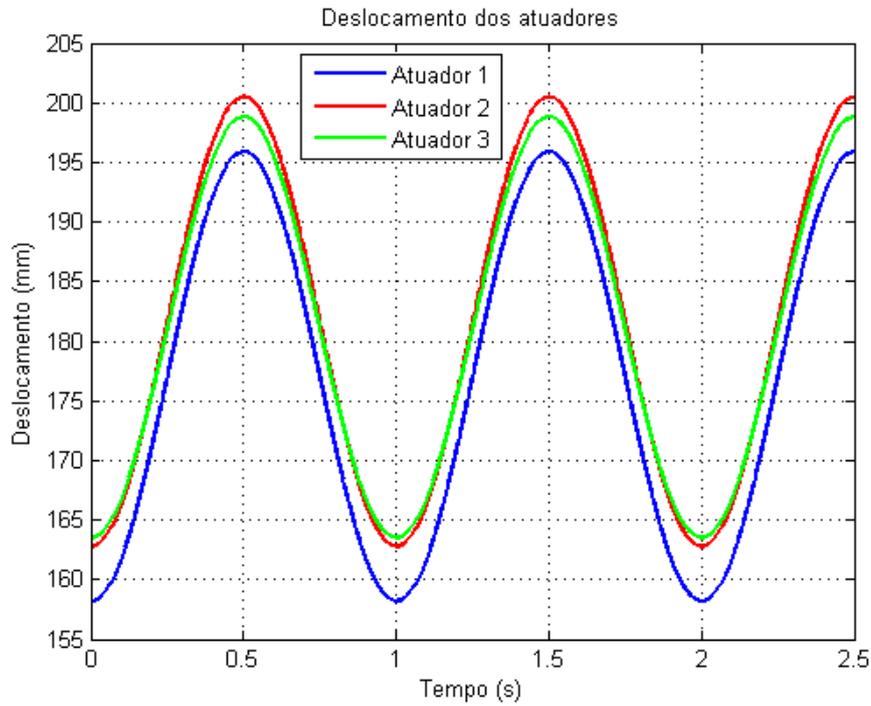


Figura 5.46: Deslocamento dos atuadores para entrada em cossenóide e ganhos iguais a 0,10.

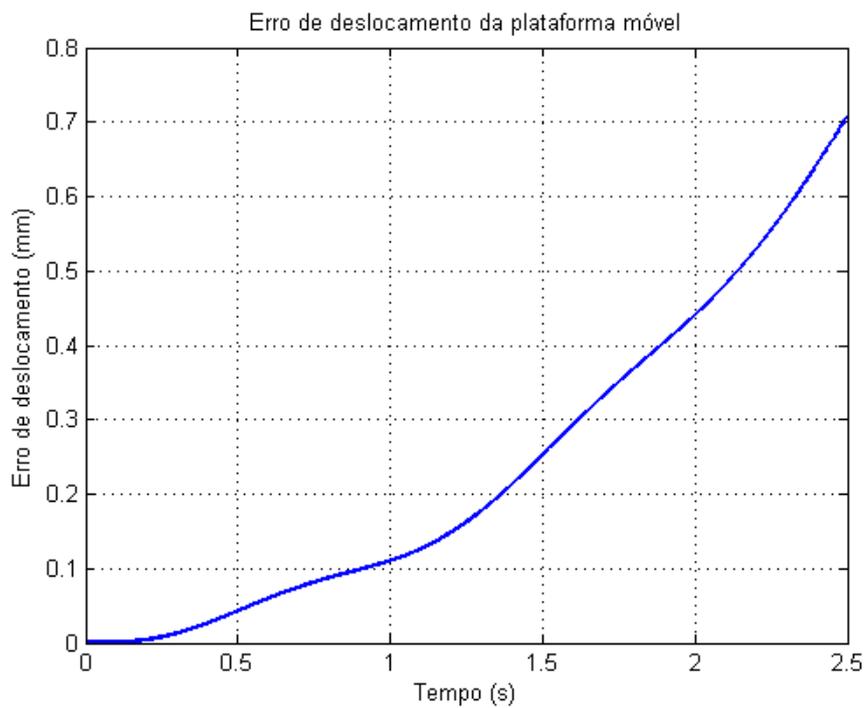


Figura 5.47: Erro de deslocamento vertical da plataforma móvel para entrada em cossenóide e ganhos iguais a 0,10.

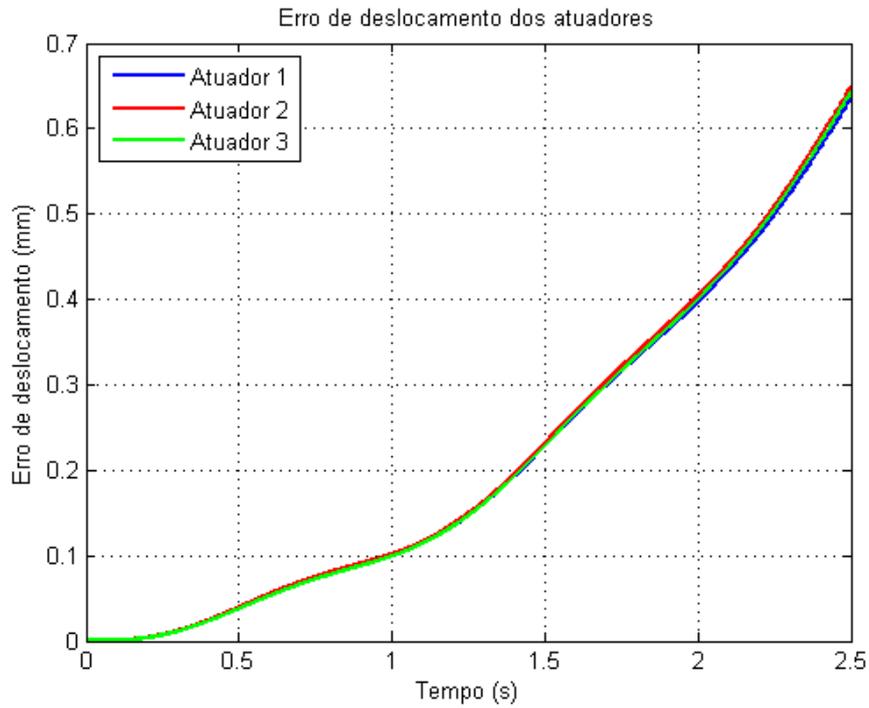


Figura 5.48: Erros de deslocamento dos atuadores para entrada em cossenóide e ganhos iguais a 0,10.

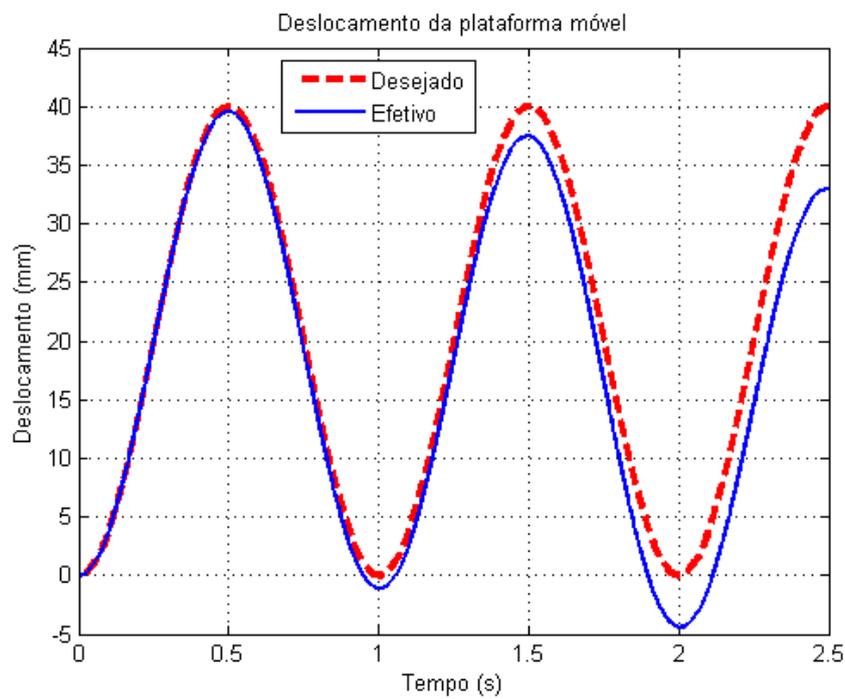


Figura 5.49: Deslocamento vertical da plataforma móvel para entrada em cossenóide e ganhos iguais a 1,00.

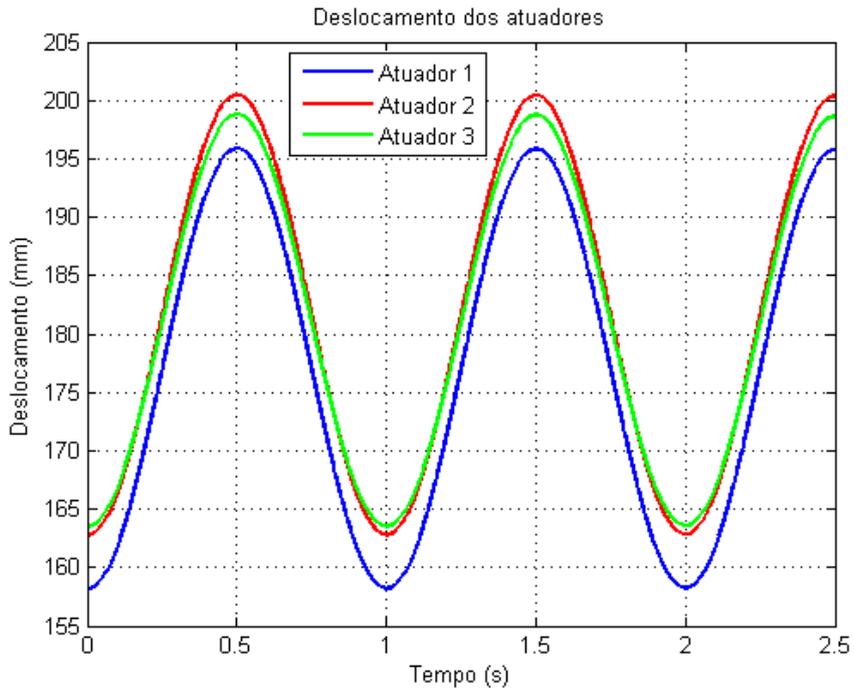


Figura 5.50: Deslocamento dos atuadores para entrada em cossenoide e ganhos iguais a 1,00.

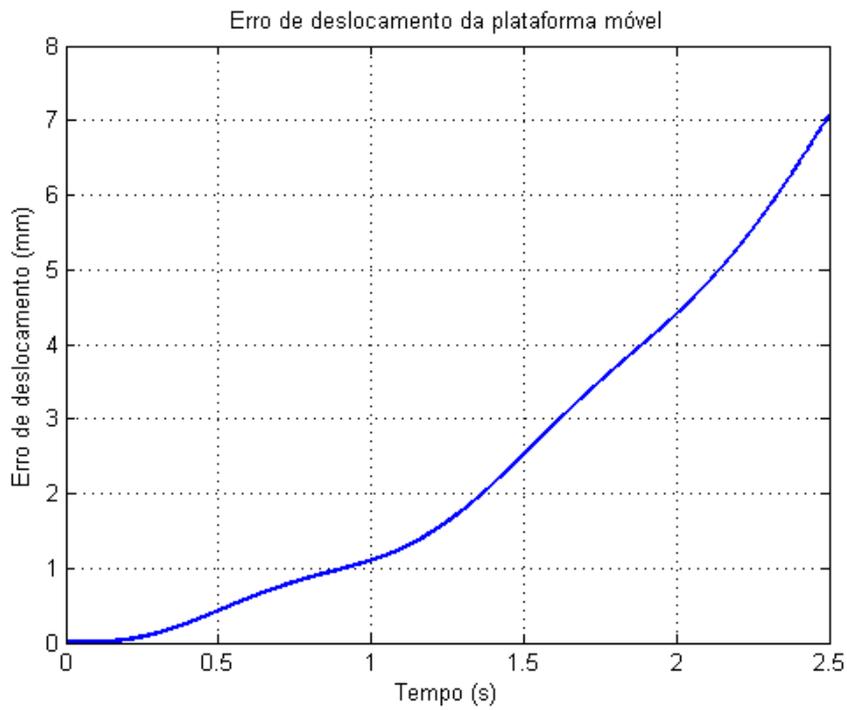


Figura 5.51: Erro de deslocamento vertical da plataforma móvel para entrada em cossenoide e ganhos iguais a 1,00.

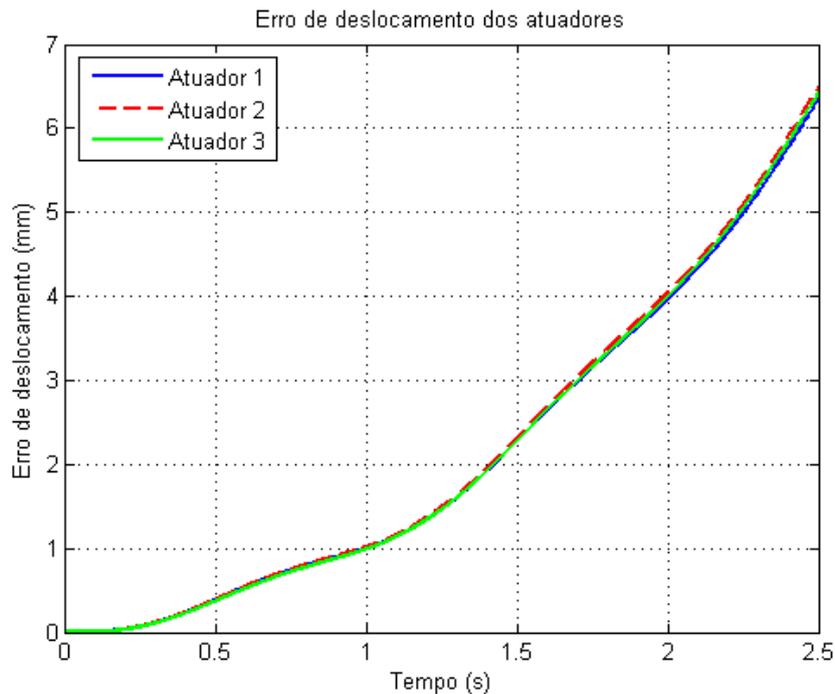


Figura 5.52: Erros de deslocamento dos atuadores para entrada em cossenóide e ganhos iguais a 1,00.

As respostas no tempo apresentadas nas Figuras 5.41 a 5.52 indicam que neste caso, quanto menores os ganhos do controlador, mais eficiente fica o controle de posicionamento da plataforma. À medida que os ganhos diminuem o erro também decai na mesma ordem de grandeza. Para ganhos da ordem da unidade, observa-se claramente que a plataforma móvel não consegue acompanhar a trajetória desejada (os erros de deslocamento vertical da plataforma móvel ficam na ordem de 7 mm para uma amplitude de 20 mm e os erros dos atuadores alcançam 6 mm para amplitudes desejadas de 20 mm).

Para uma entrada em pulsos suavizados (Figuras 4.8 e 5.53) com $A = 1$ mm/s² e $\omega = 6,28$ rad/s, e ganhos no controlador todos iguais a 1,00 (mm/mm em K_P , mm.s/mm em K_V e mm.s²/mm em K_A), a resposta no tempo do deslocamento ficou como mostra a Figura 5.54. A Figura 5.55 apresenta a resposta no tempo para o deslocamento dos atuadores e as Figuras 5.56 e 5.57 apresentam os erros de deslocamento vertical da plataforma móvel e os erros de deslocamento dos atuadores, respectivamente. As Figuras 5.58 a 5.61 apresentam estas mesmas respostas no tempo para ganhos do controlador iguais a 10,0 e as Figuras 5.62 a 5.65 apresentam estas respostas para ganhos iguais a 100.

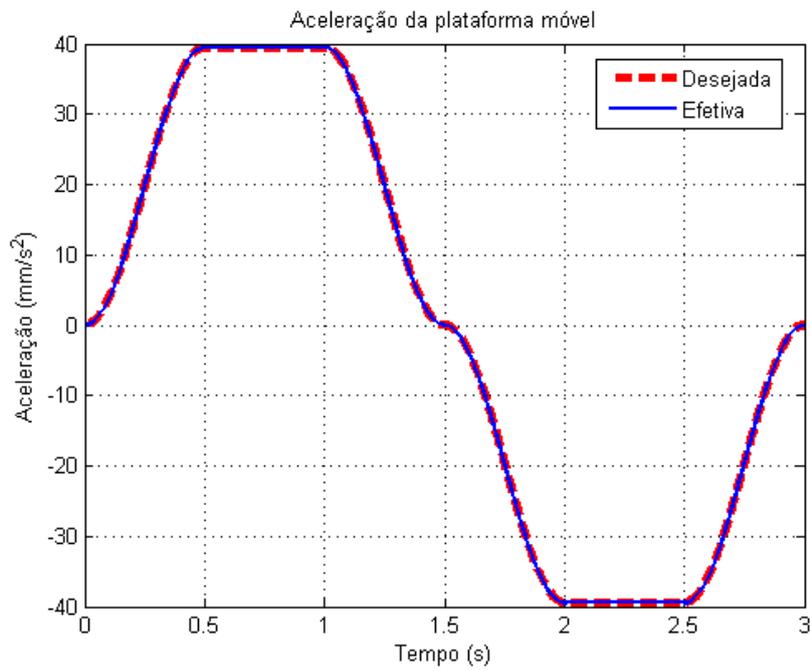


Figura 5.53: Aceleração vertical da plataforma móvel.

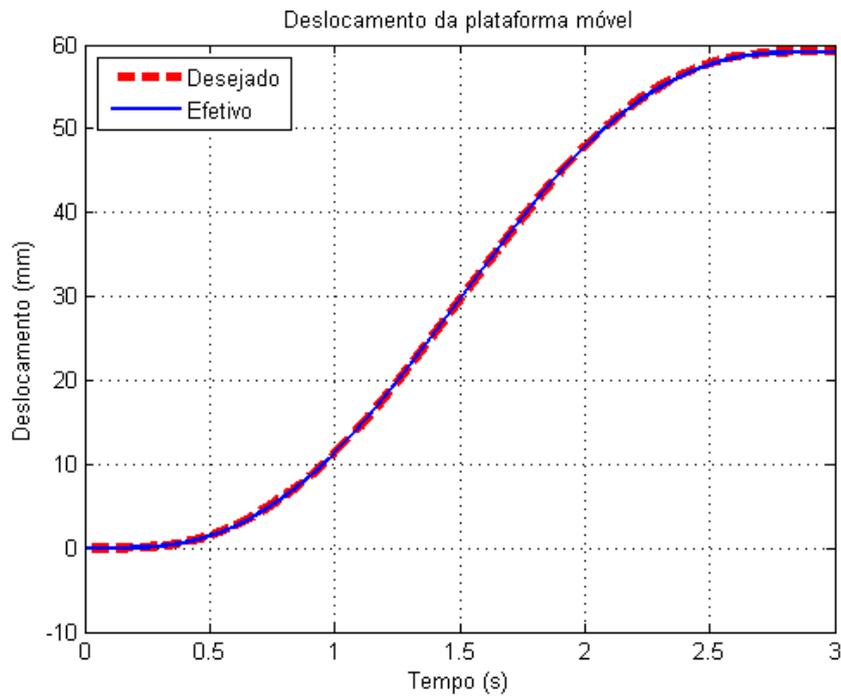


Figura 5.54: Deslocamento vertical da plataforma móvel para entrada em pulsos e ganhos iguais a 1,00.

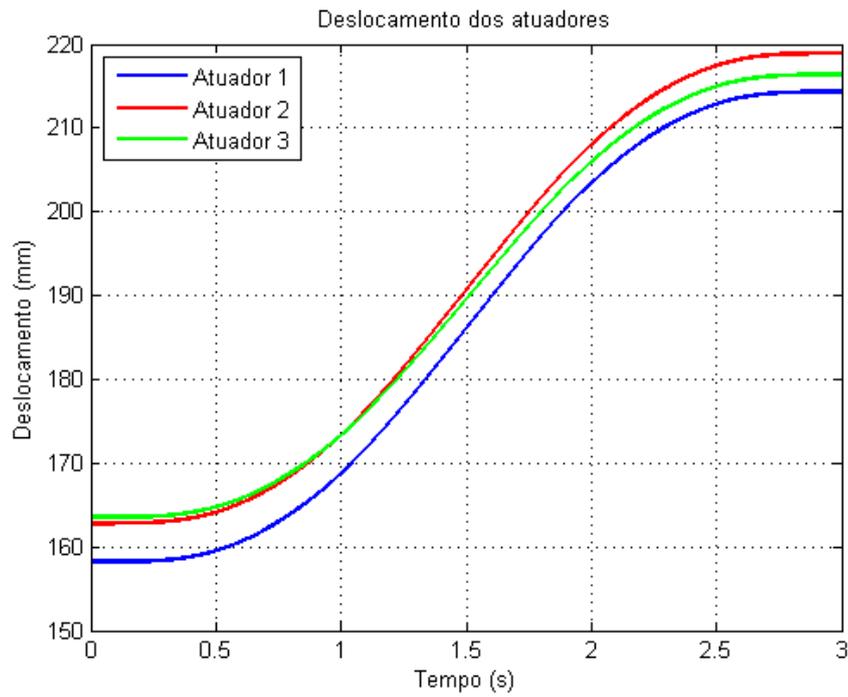


Figura 5.55: Deslocamento dos atuadores para entrada em pulsos e ganhos iguais a 1,00.

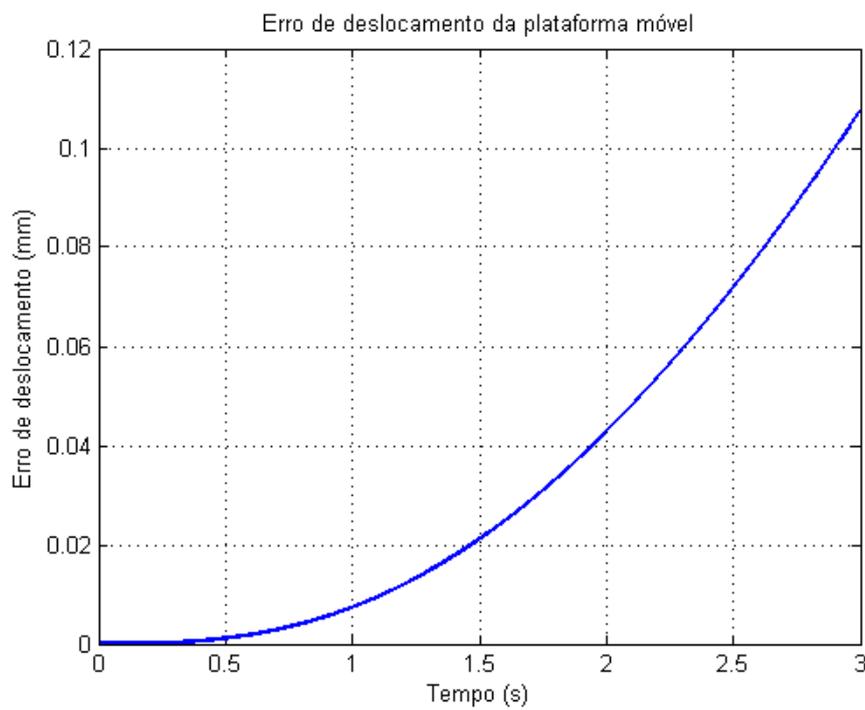


Figura 5.56: Erro de deslocamento vertical da plataforma móvel para entrada em pulsos e ganhos iguais a 1,00.

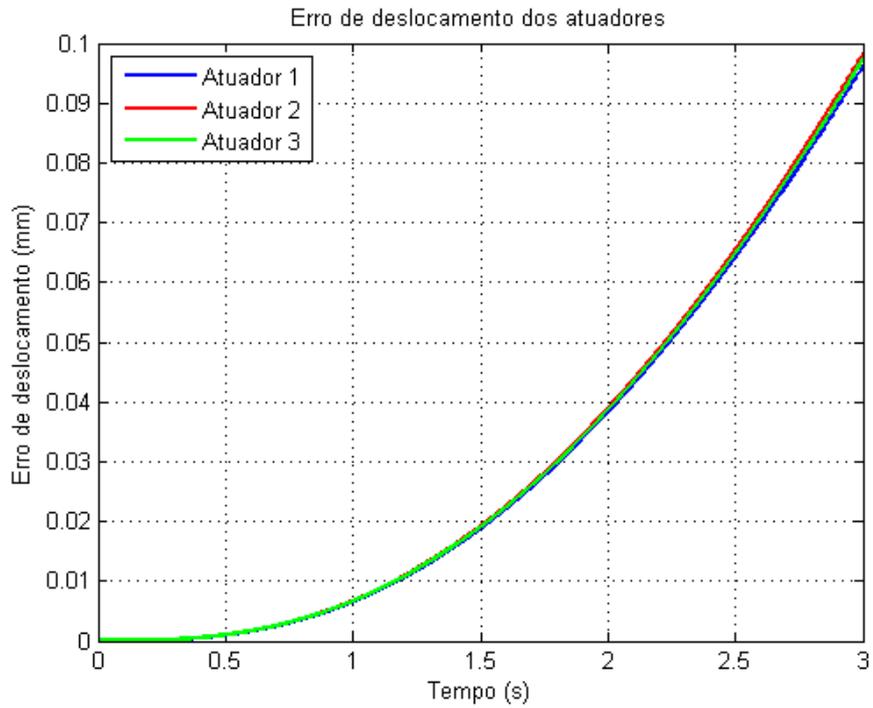


Figura 5.57: Erros de deslocamento dos atuadores para entrada em pulsos e ganhos iguais a 1,00.

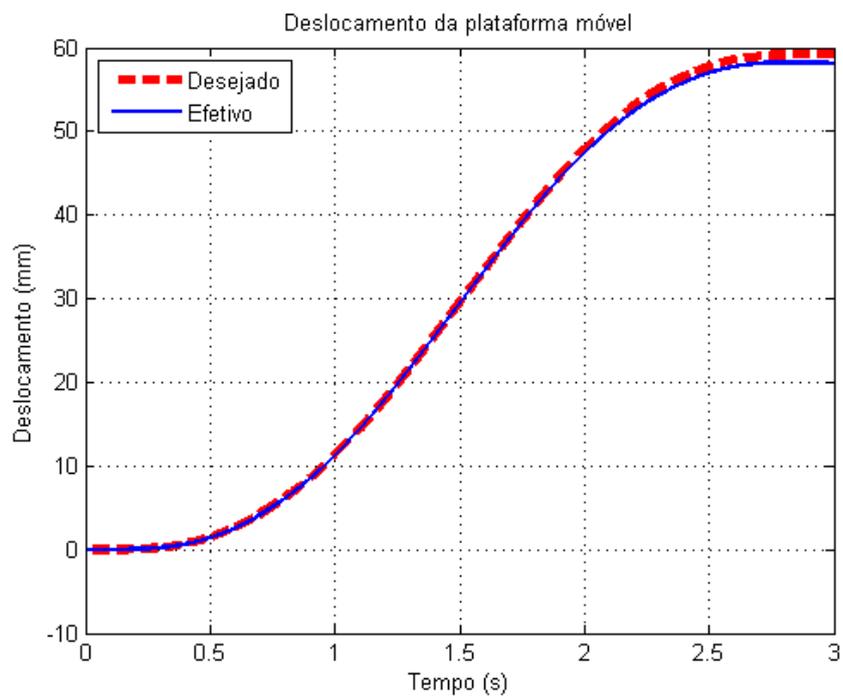


Figura 5.58: Deslocamento vertical da plataforma móvel para entrada em pulsos e ganhos iguais a 10,0.

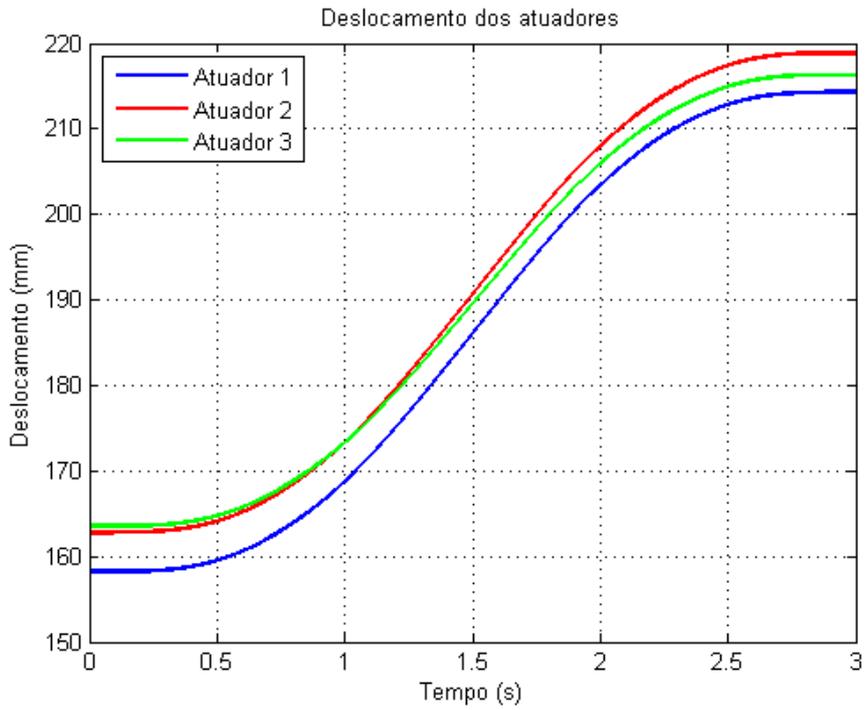


Figura 5.59: Deslocamento dos atuadores para entrada em pulsos e ganhos iguais a 10,0.

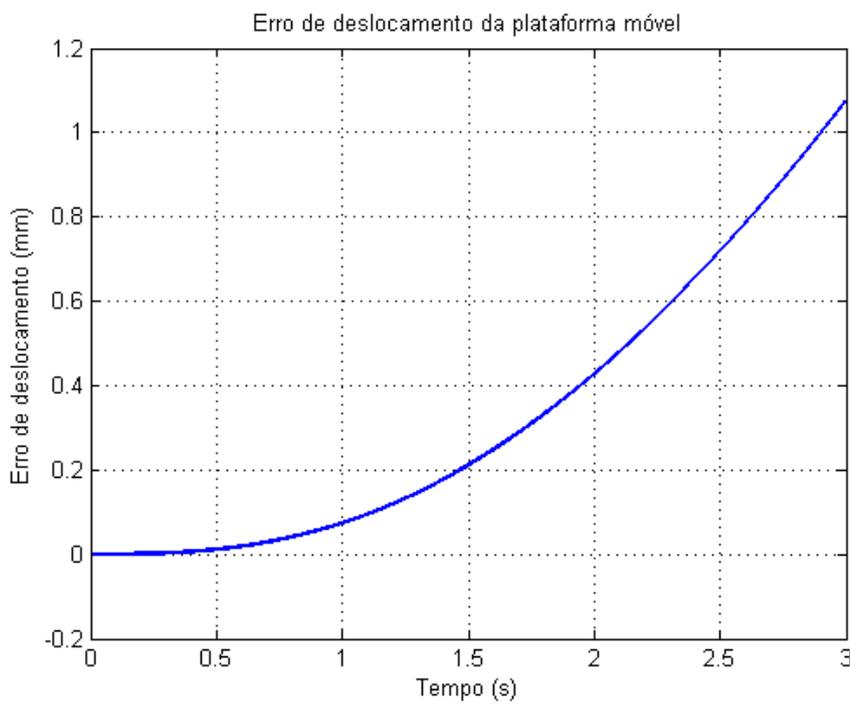


Figura 5.60: Erro de deslocamento vertical da plataforma móvel para entrada em pulsos e ganhos iguais a 10,0.

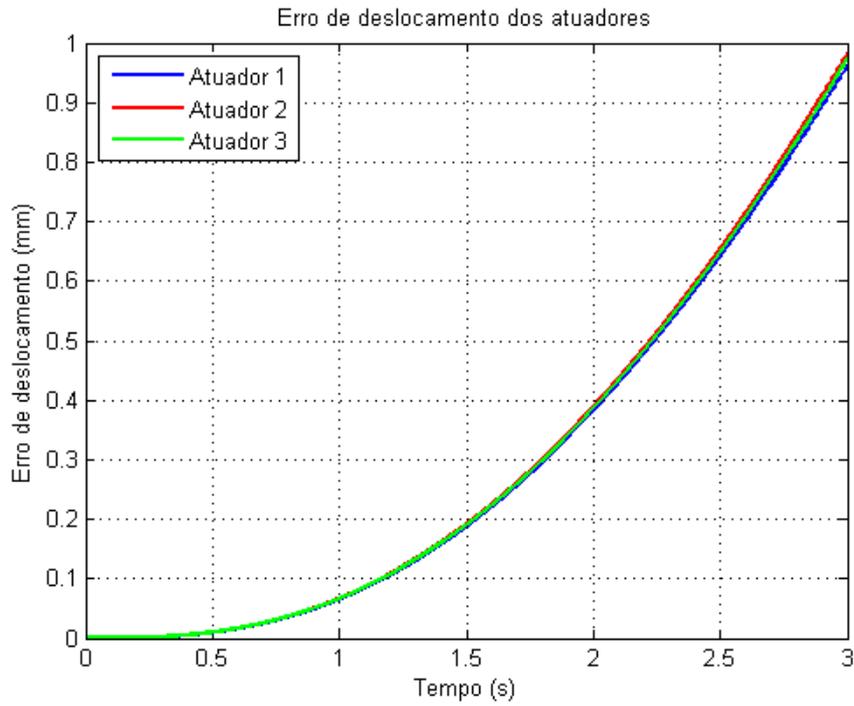


Figura 5.61: Erros de deslocamento dos atuadores para entrada em pulsos e ganhos iguais a 10,0.

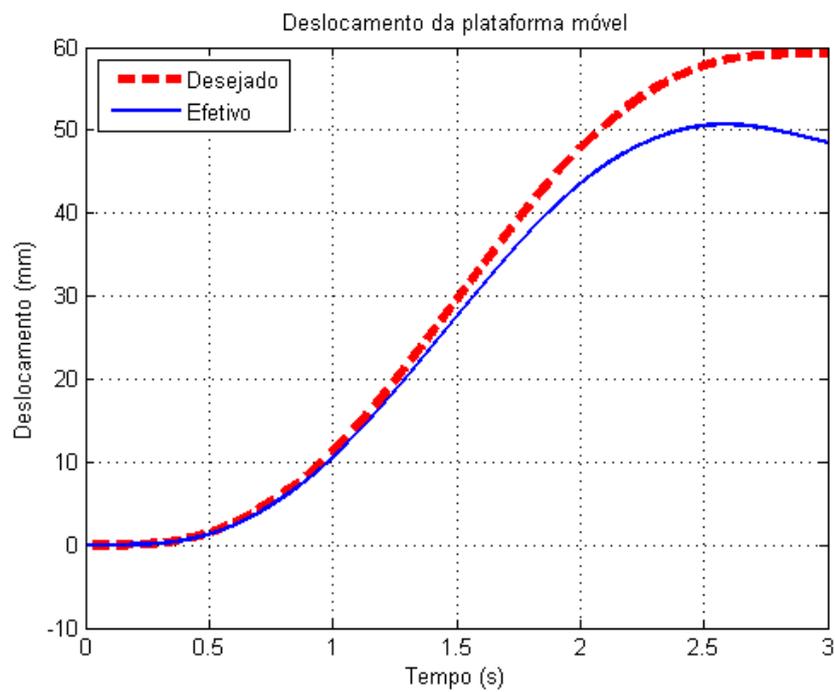


Figura 5.62: Deslocamento vertical da plataforma móvel para entrada em pulsos e ganhos iguais a 100.

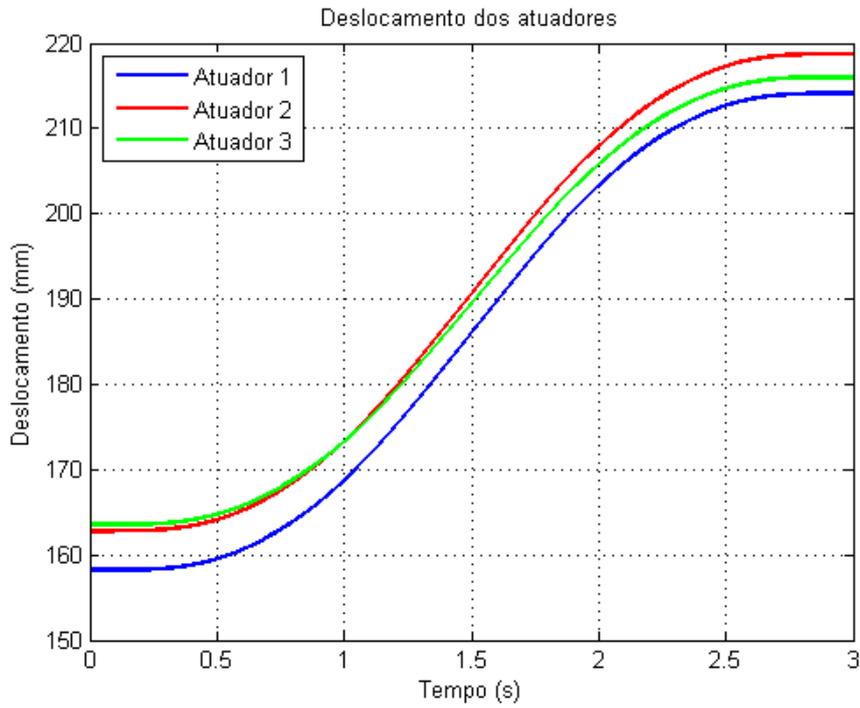


Figura 5.63: Deslocamento dos atuadores para entrada em pulsos e ganhos iguais a 100.

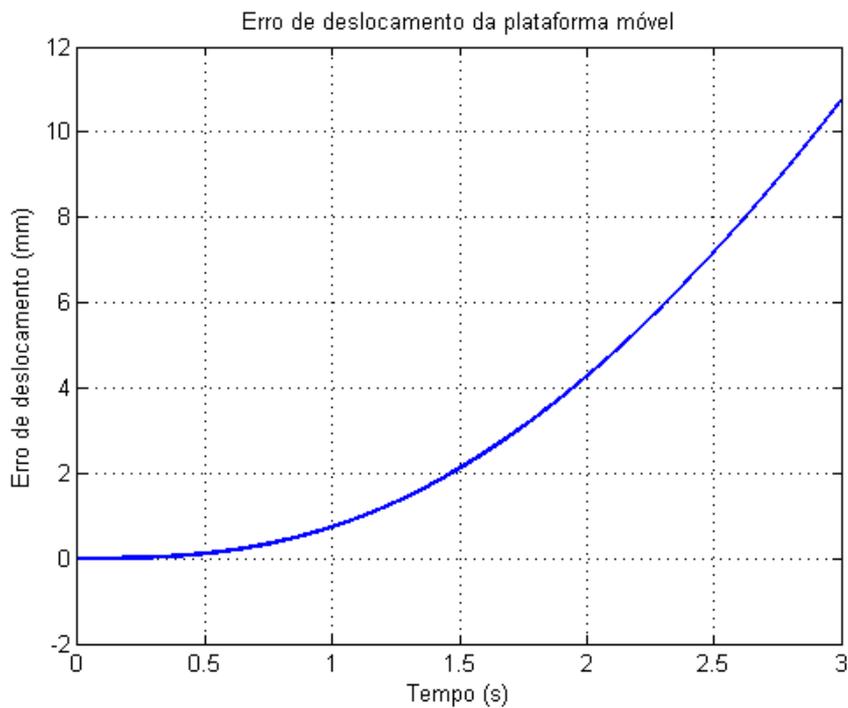


Figura 5.64: Erro de deslocamento vertical da plataforma móvel para entrada em pulsos e ganhos iguais a 100.

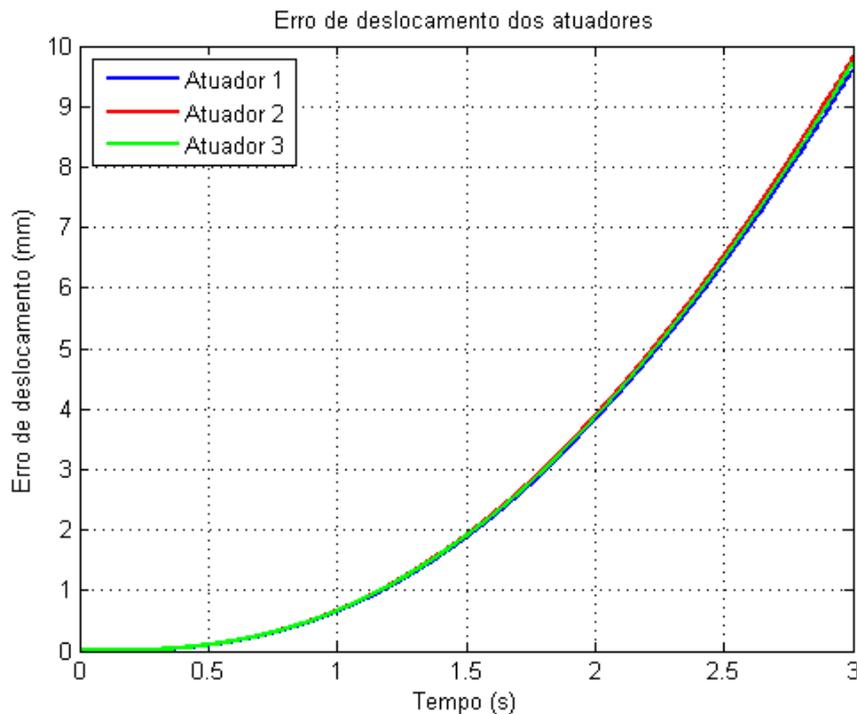


Figura 5.65: Erros de deslocamento dos atuadores para entrada em pulsos e ganhos iguais a 100.

As respostas no tempo apresentadas nas Figuras 5.54 a 5.65 também indicam que à medida que os ganhos diminuem o erro também decai na mesma ordem de grandeza. Para ganhos da ordem da unidade, observa-se claramente que a plataforma móvel não consegue acompanhar a trajetória desejada (os erros de deslocamento vertical da plataforma móvel ficam na ordem de 10 mm para um valor desejado de 60 mm e os erros dos atuadores também alcançam 10 mm para amplitudes desejadas de 50 mm).

Para ambas as entradas testadas, pôde-se verificar que a forma da resposta dos erros se mantém a mesma: aumenta exponencialmente com o tempo. Com ganhos baixos no controlador, estes erros são muito pequenos, podendo-se considerar que a plataforma segue a trajetória desejada eficientemente, porém, este aumento exponencial indica que em algum momento os erros poderão alcançar valores tais que poderiam fazer com que a plataforma não cumprisse a tarefa ou trajetória desejada da forma planejada. Esta forma da resposta no tempo do erro pode ainda estar atrelada a alguma característica de instabilidade do sistema na forma como ele é proposto.

5.3 Plataforma Stewart

5.3.1 Validação da geometria Inversa

O modelo da geometria inversa é, em resumo, constituído pelas Equações 3.10, 3.12 e 3.13. O diagrama da Figura 5.66 apresenta o caminho traçado para obter as variáveis de comprimento dos atuadores (d_1, d_2, \dots, d_6) através da posição e orientação da plataforma móvel ($u, v, w, \varphi, \theta, \psi$).

Aplicando uma entrada com os valores $x = 0,0$ mm, $y = 0,0$ mm, $z = 280,3$ mm, $\theta = 0,0$ rad, $\phi = 0,0$ rad e $\psi = 0,0$ rad neste modelo, os comprimentos dos elos e seus ângulos de Euler são apresentados na Tabela 5.2.

Tabela 5.2: Configuração dos elos para entradas $x, y, z = 0,0$ mm e $\varphi, \theta, \psi = 0,00$ rad.

	Comprimento	Ângulos dos elos	
	dos elos		
	d_i (mm)	ϑ_i (°)	φ_i (°)
Elo 1	322,0	29,5	-30,0
Elo 2	322,0	29,5	90,0
Elo 3	322,0	29,5	30,0
Elo 4	322,0	29,5	-30,0
Elo 5	322,0	29,5	90,0
Elo 6	322,0	29,5	30,0

Desta vez, aplicando uma entrada com os valores $x = 20,0$ mm, $y = 20,0$ mm, $z + z_0 = 300,3$ mm, $\theta = 0,2$ rad, $\phi = 0,2$ rad e $\psi = 0,2$ rad neste modelo, os comprimentos dos elos e seus ângulos de Euler ficam como apresentados na Tabela 5.3. A Figura 5.67 apresenta a configuração da Plataforma Stewart com estes valores de posição e orientação da plataforma móvel. Em vermelho, a

posição na qual os atuadores se encontram totalmente recuados ($x = 0,0$ mm, $y = 0,0$ mm, $z = 280,3$ mm, $\theta = 0,0$ rad, $\phi = 0,0$ rad e $\psi = 0,0$ rad).

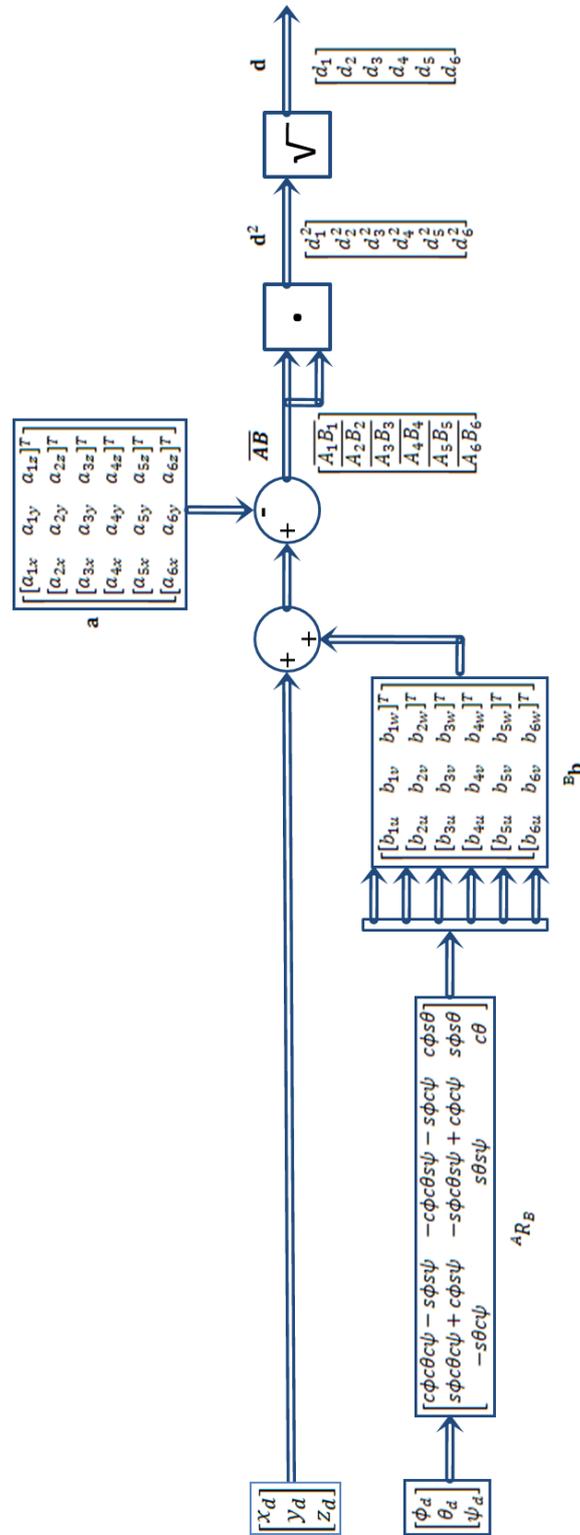


Figura 5.66: Diagrama esquemático da cinemática inversa.

Para validar este modelo, foi aplicada também uma entrada em \mathbf{p} do tipo ($x = 0, y = 0, z = f_I(t), \varphi = 0, \theta = 0$ e $\psi = 0$), sendo $f_I(t)$ descrita pela Equação 5.1. Esta função `fcn_x2.m` que está contida na rotina de entrada `cininv.m` (todas as funções são apresentadas no CD Anexo). Nesta simulação, foi usada a função `fcn_plot6dof.m` para o cálculo e representação gráfica da geometria da Plataforma Stewart. A Figura 5.68 apresenta o estado inicial (a) e o estado final (b) da Plataforma Stewart para a entrada dada.

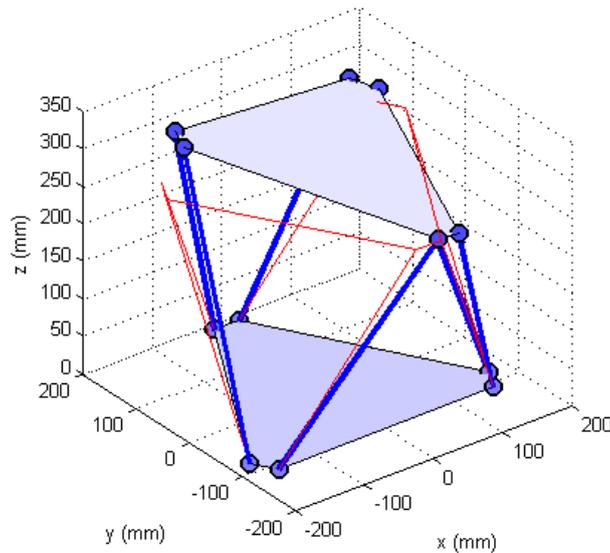


Figura 5.67: Configuração da Plataforma Stewart para entradas: $x = y = z = 20,0$ mm e $\varphi = \theta = \psi = 0,20$ rad.

Tabela 5.3: Configuração dos elos da Plataforma Stewart para entradas: $x = y = z = 20,0$ mm e $\varphi = \theta = \psi = 0,20$ rad.

	Comprimento	Ângulos dos elos		
	dos elos	d_i (mm)	ϑ_i (°)	φ_i (°)
Elo 1	292,0	20,0	-4,6	
Elo 2	361,5	41,8	-83,4	
Elo 3	295,3	11,6	39,2	
Elo 4	379,9	38,7	-12,5	
Elo 5	353,3	17,4	86,5	
Elo 6	386,5	30,0	41,5	

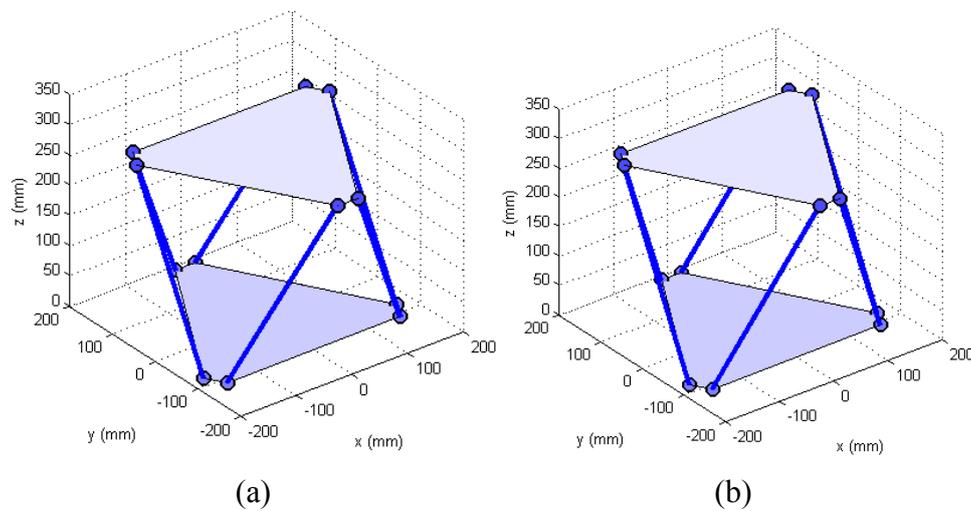


Figura 5.68: a) Geometria inicial da Plataforma Stewart; b) Geometria da Plataforma Stewart após 2 segundos.

5.3.2 Validação da cinemática inversa

O modelo da cinemática inversa pode ser descrito pela matriz jacobiana inversa da plataforma plana (Equação 3.36) e por sua matriz de derivativos (Equações 3.45 a 3.51). Para o cálculo da matriz, os vetores unitários com origem nos pontos A_i e com a direção do elo foram calculados segundo a Equação 3.34. O produto vetorial dos vetores \mathbf{b}_i com estes vetores unitários foi feito segundo a Equação 3.35. Este modelo apresenta o caminho traçado para obter as variáveis de deslocamento, velocidade e aceleração dos atuadores através dos deslocamentos, velocidades e acelerações lineares e angulares da plataforma móvel.

Para validar este modelo, foram aplicadas entradas como a descrita pela Equação 5.1 em x , y e z , com amplitude de 20 mm e em φ , θ e ψ , com amplitude de 0,2 rad. As Figuras 5.69.a a 5.69.f apresentam os estados finais da Plataforma Stewart ao fim da simulação para cada uma destas entradas.

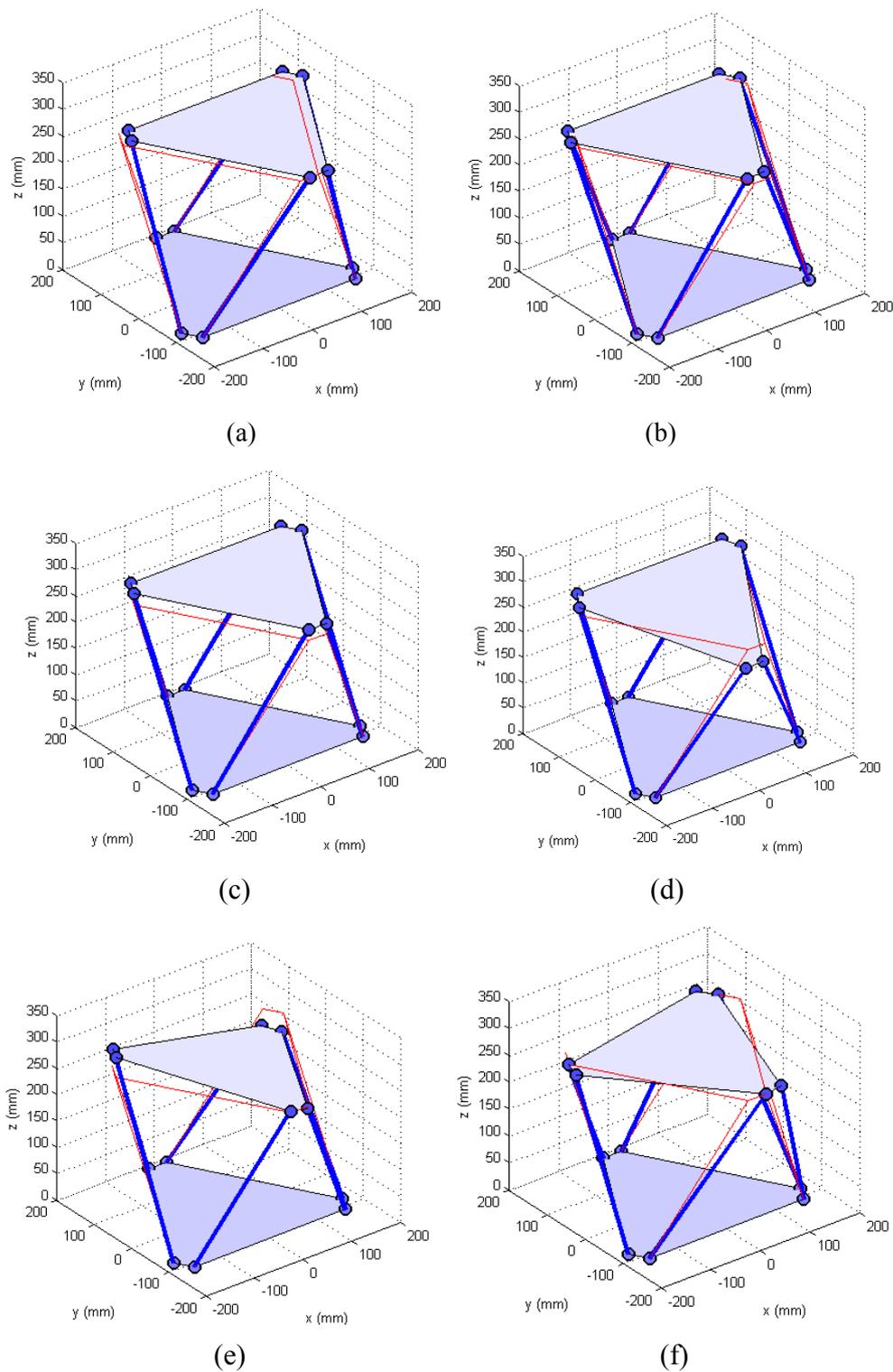


Figura 5.69: Estados inicial e final da Plataforma Stewart obtidos pela cinemática inversa.

Desta vez, as posições inicial (vermelho) e final (azul) da Plataforma Stewart obtidas através da matriz jacobiana inversa são apresentadas no mesmo

gráfico. Além das anteriores, as funções contidas neste modelo são `fcn_j.m` e `fcn_cininv_j.m`. Ambas são usadas no diagrama de blocos do *Simulink* `cininv_j_ma.mdl`. Nesta simulação, também foi usada a função `fcn_plot6dof.m` para o cálculo e representação gráfica da geometria da plataforma plana.

Assim como no caso da plataforma plana, para quantificar as acelerações dos atuadores na Plataforma Stewart é usada a Equação 2.45. O diagrama da Figura 5.12 apresenta o caminho traçado para obter estas variáveis.

Nesta validação também foi aplicada a entrada descrita pela Equação 5.1. Além das anteriores, as funções contidas neste modelo são `fcn_j1dot.m`, `fcn_cininv_j.m` e `fcn_cininv_jdot.m`. Estas são usadas no diagrama de blocos do *Simulink* `cindir_jdot_ma.mdl` (Figura 5.70). A Figura 5.71 apresenta a comparação dos deslocamentos dos atuadores (membros) obtidos tanto pela integração dupla da derivada da jacobiana inversa, quanto pela integração direta do resultado da multiplicação do vetor \mathbf{p} pela matriz jacobiana inversa. As Figuras 5.72 e 5.73 apresentam esta comparação para as velocidades dos elos e as acelerações dos elos obtidas com o modelo do derivativo da jacobiana inversa, respectivamente.

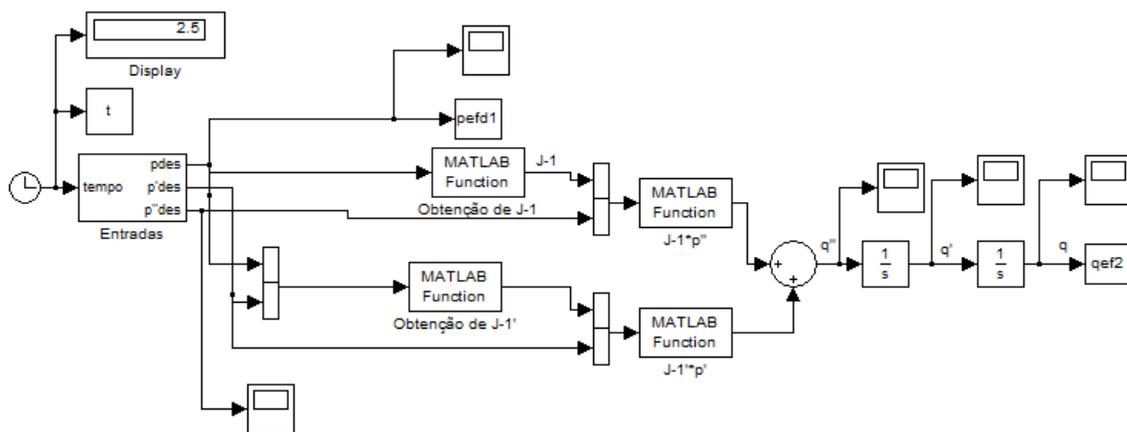


Figura 5.70: Diagrama de blocos para obter as acelerações dos atuadores da Plataforma Stewart.

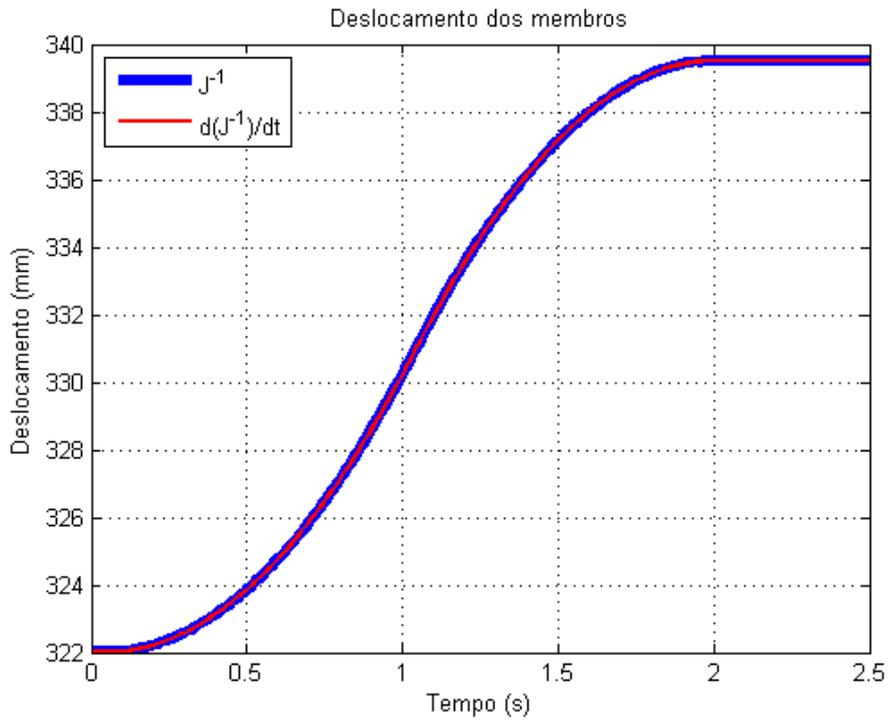


Figura 5.71: Deslocamentos dos membros pelos dois métodos.

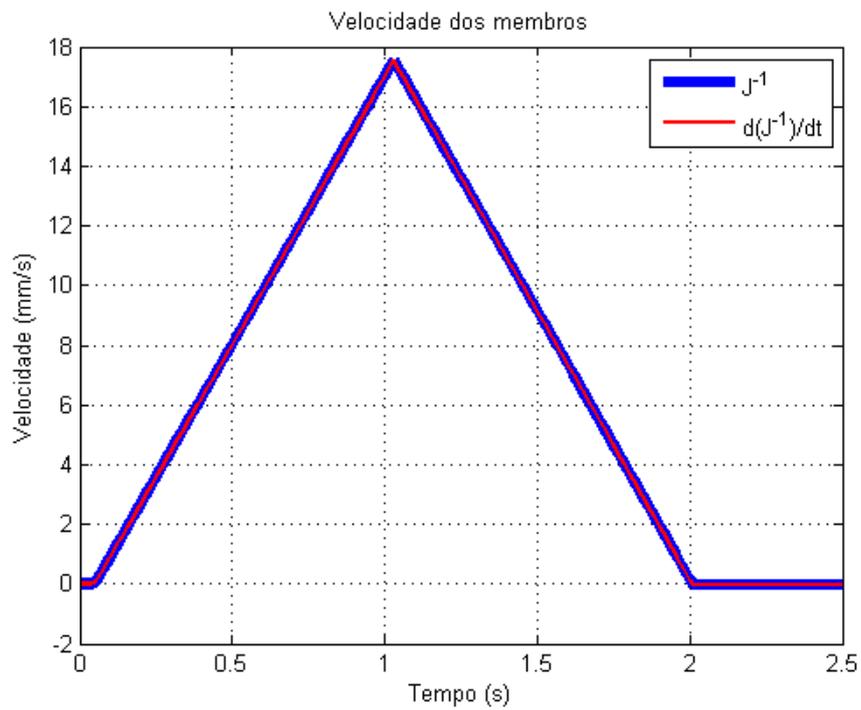


Figura 5.72: Velocidade dos membros pelos dois métodos.

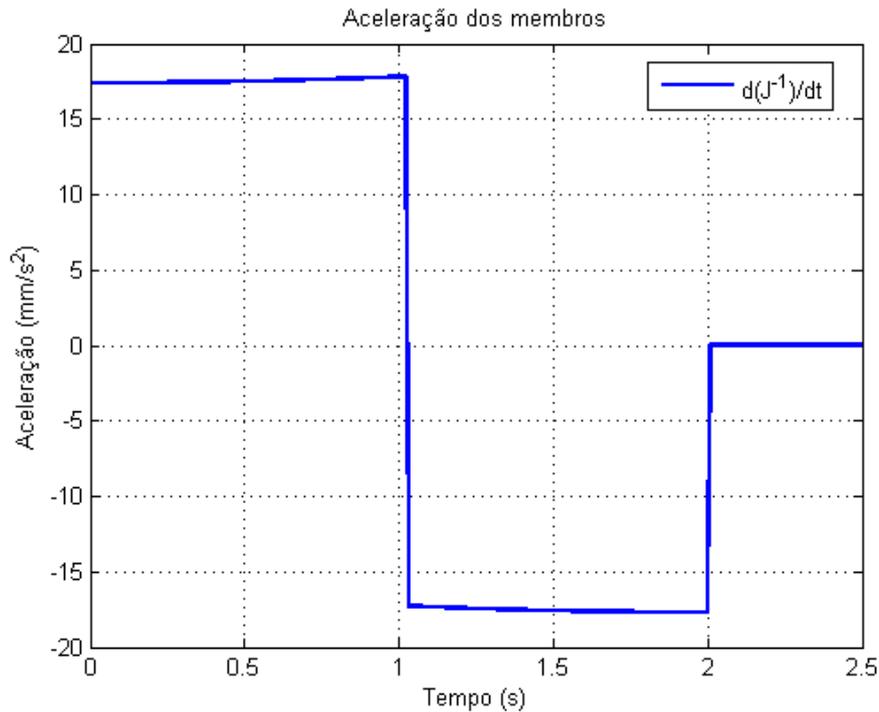


Figura 5.73: Aceleração dos membros da Plataforma Stewart.

5.3.3 Validação da cinemática direta

Para validar o método usado na cinemática direta da Plataforma Stewart, os deslocamentos e velocidades dos atuadores serão calculados a partir da cinemática inversa e então, com estes valores, a partir da cinemática direta serão calculadas as posições e orientações da plataforma móvel. Estas são comparadas com as posições e orientações de entrada.

A obtenção da matriz jacobiana direta e de sua derivada será dada pela inversão numérica das soluções analíticas da jacobiana inversa e de sua derivada a cada passo da simulação. Para validar este modelo, foi aplicada a entrada descrita pela Equação 5.1. Além das anteriores, foram inseridas neste modelo as funções `fcn_cindir_j1.m` e `fcn_j.m`. Ambas são usadas no diagrama de blocos do *Simulink* `cindir_j1_ma.mdl` (Figura 5.74). Nesta simulação, também foi usada a função `fcn_plot6dof.m` para o cálculo e representação gráfica da geometria da plataforma plana. Desta vez, são comparados os valores da saída de

$z(t)$ em \mathbf{p} usados na entrada da cinemática inversa com os obtidos pela cinemática direta (Figura 5.75).

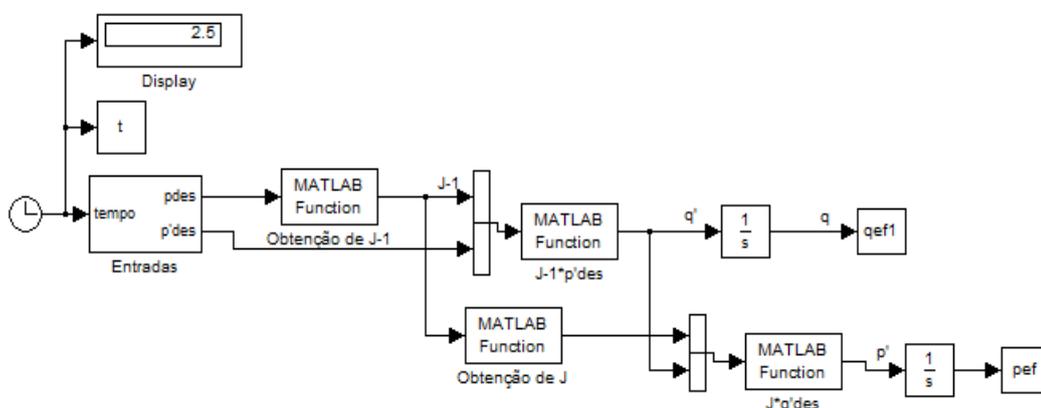


Figura 5.74: Diagrama de blocos para validação da cinemática direta da plataforma plana.

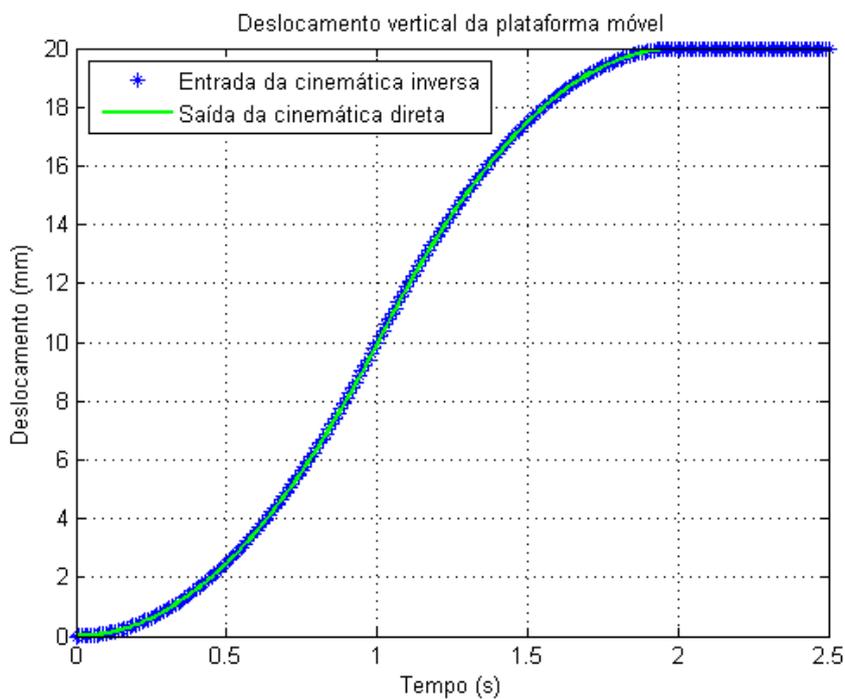


Figura 5.75: Comparação de $z(t)$ como entrada da cinemática inversa com $z(t)$ como saída da cinemática direta na Plataforma Stewart.

Para quantificar as acelerações lineares e angulares da plataforma móvel é usada a Equação 2.75. O diagrama da Figura 5.22 apresenta o caminho traçado para obter estas variáveis.

Nesta validação também foi aplicada a entrada descrita pela Equação 5.1. Ao invés da função `fcn_cininv_jdot.m`, como usada para obter as acelerações pela cinemática inversa, esta usa a função `fcn_cindir_jdot.m` (CD Anexo) no diagrama de blocos do *Simulink* `cindir_jdot_ma.mdl` (Figura 5.76). Foram comparados os valores dos deslocamentos, velocidades e acelerações de entrada em $z(t)$ da plataforma móvel com os obtidos através da integração da aceleração resultante da derivada da jacobiana direta. As Figuras 5.77 a 5.78 apresentam esta comparação. Este diagrama avalia conjuntamente os modelos das derivadas das jacobianas inversa e direta, uma vez que usa os vetores $\ddot{\mathbf{q}}$ e $\dot{\mathbf{q}}$ obtidos da derivada da jacobiana inversa como entradas do modelo da derivada da jacobiana direta. A saída deste modelo é então comparada com as entradas em \mathbf{p} usadas em ambos os modelos.

Problemas de mau condicionamento da inversa da matriz dos derivativos da jacobiana inversa (ou seja, na matriz dos derivativos da jacobiana direta) resultam em grandes erros, que quando somados à saída da multiplicação da matriz jacobiana pelo vetor de acelerações dos atuadores, inserem erro no vetor de saída com as acelerações da plataforma móvel. Foi verificado, que este termo é pouco significativo para diversos tipos de trajetórias desejadas. Assim, este foi cortado da soma, o que corresponde a uma ‘simplificação’ no modelo. Isto, para evitar erros maiores que os erros oriundos desta simplificação. Nas Figuras 5.77 a 5.78 podem ser observados pequenos erros de deslocamento, velocidade e aceleração no estado final da plataforma móvel. Além da aproximação citada, as integrações sucessivas e erros associados à inversão numérica das matrizes jacobiana e dos derivativos desta contribuíram para o surgimento desta discrepância.

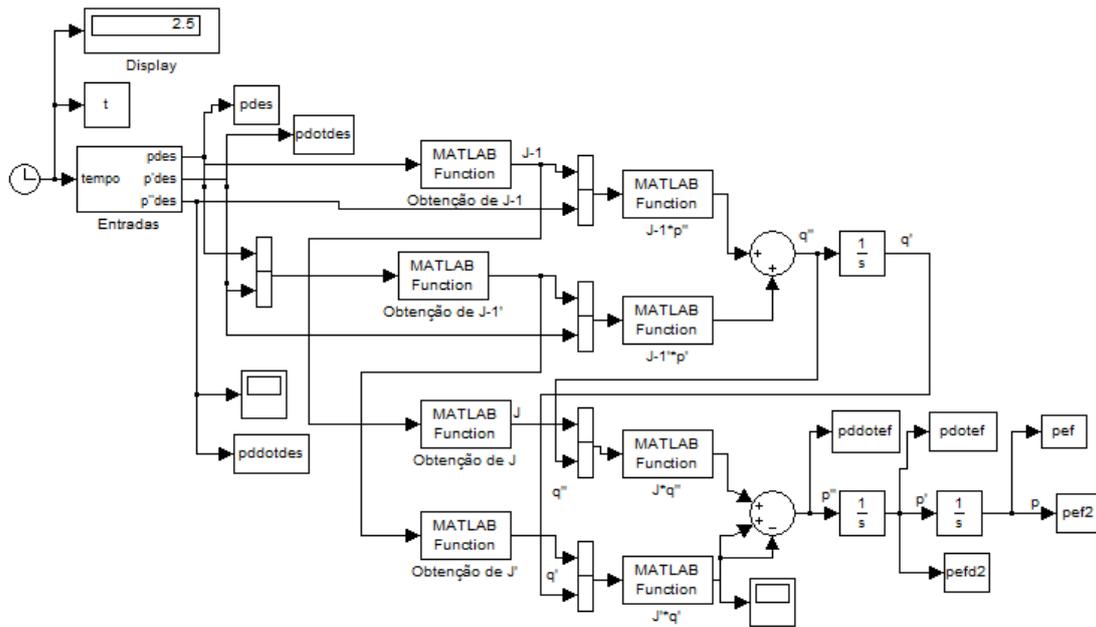


Figura 5.76: Diagrama de blocos para obter as acelerações da plataforma móvel.

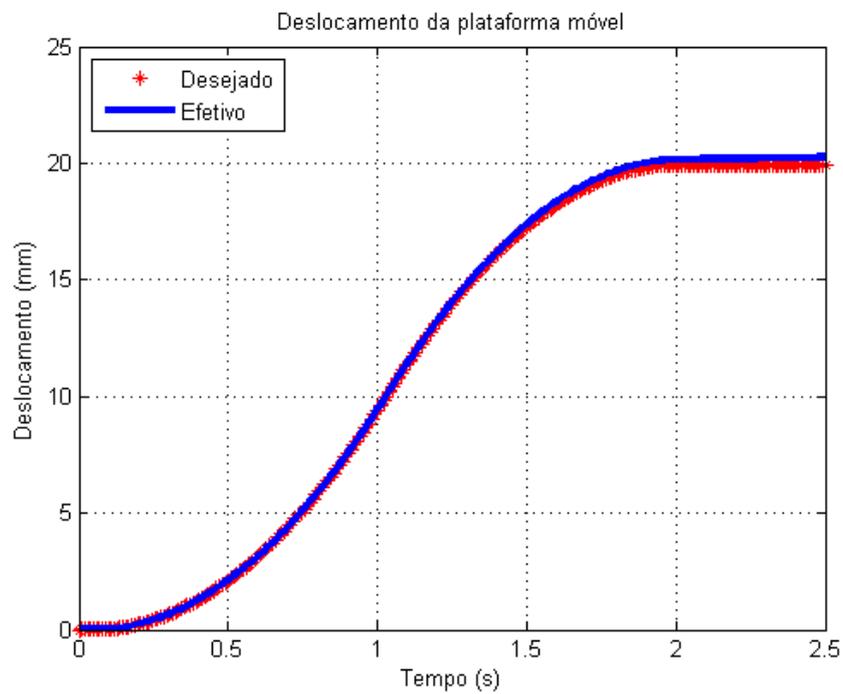


Figura 5.77: $z(t)$ desejado e obtido pela derivada da jacobiana inversa.

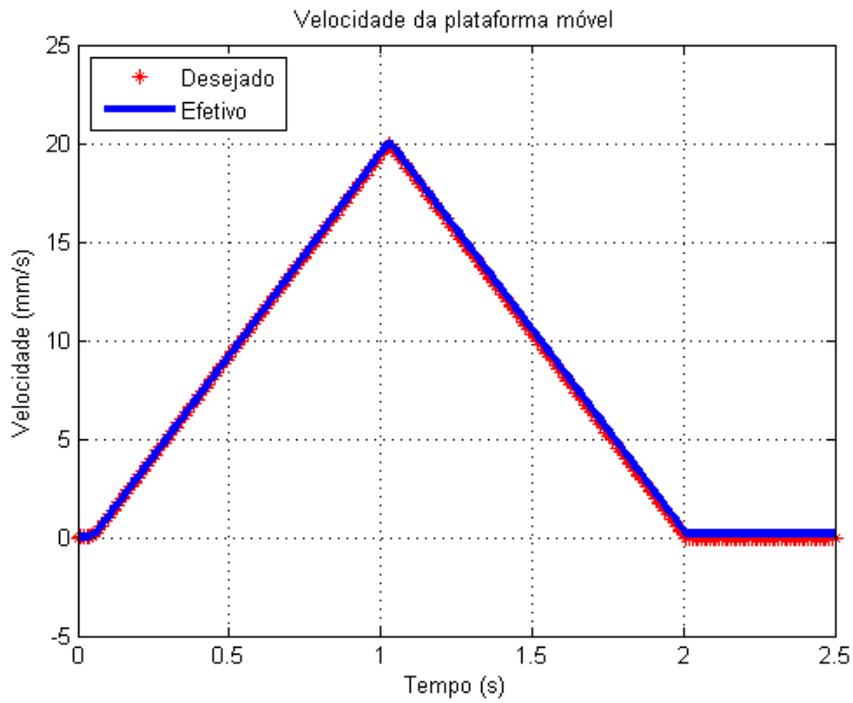


Figura 5.78: $v_z(t)$ desejado e obtido pela derivada da jacobiana inversa.

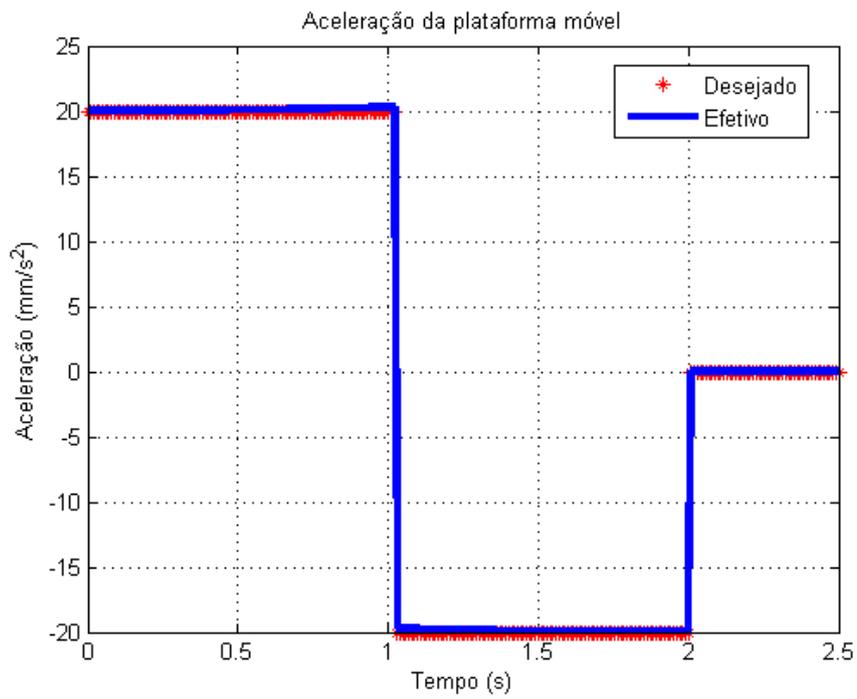


Figura 5.79: $a_z(t)$ desejado e obtido pela derivada da jacobiana inversa.

5.3.4 Avaliação das condições de singularidade

Os números de condição foram todos calculados numericamente, usando a função `cond(J)` e para o número de condição de reciprocidade, a função `rcond(J)`, ambas do *MatLab*. O diagrama de blocos feito em *Simulink* (`cindir_jdot_ma_cond.mdl`; CD Anexo) para o cálculo das matrizes jacobianas e seus derivativos e posterior cálculo dos números de condição é apresentado na Figura 5.80.

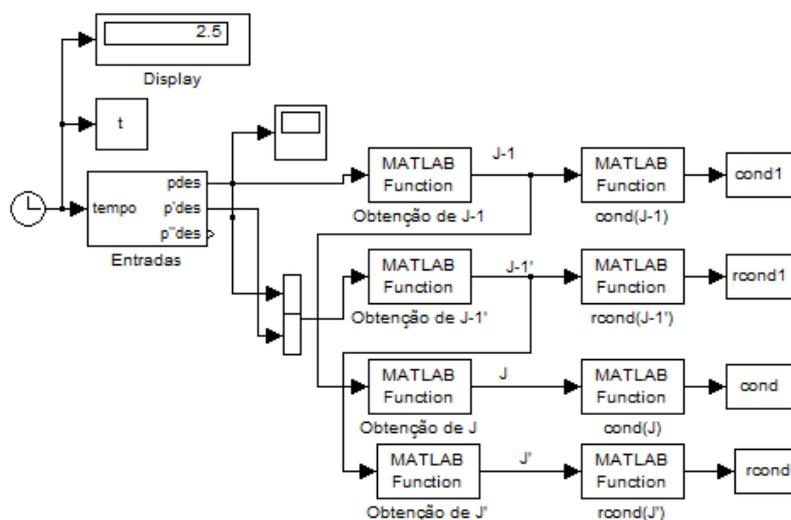


Figura 5.80: Diagrama de blocos para obtenção dos números de condição.

As funções usadas nos blocos para os cálculos das matrizes jacobianas são as mesmas apresentadas nos Itens 5.4.2 e 5.4.3 e as usadas no cálculo dos números de condição são as funções `fcn_j1_cond.m` e `fcn_j1dot_cond.m` (CD Anexo). A Figura 5.81 apresenta o número de condição λ das matrizes jacobianas inversa e direta para uma entrada como a dada pela Equação 5.1. Para a mesma entrada, as Figuras 5.82 e 5.83 apresentam o número de condição de reciprocidade das matrizes jacobianas inversa e direta e para as matrizes dos derivativos das jacobianas inversa e direta, respectivamente.

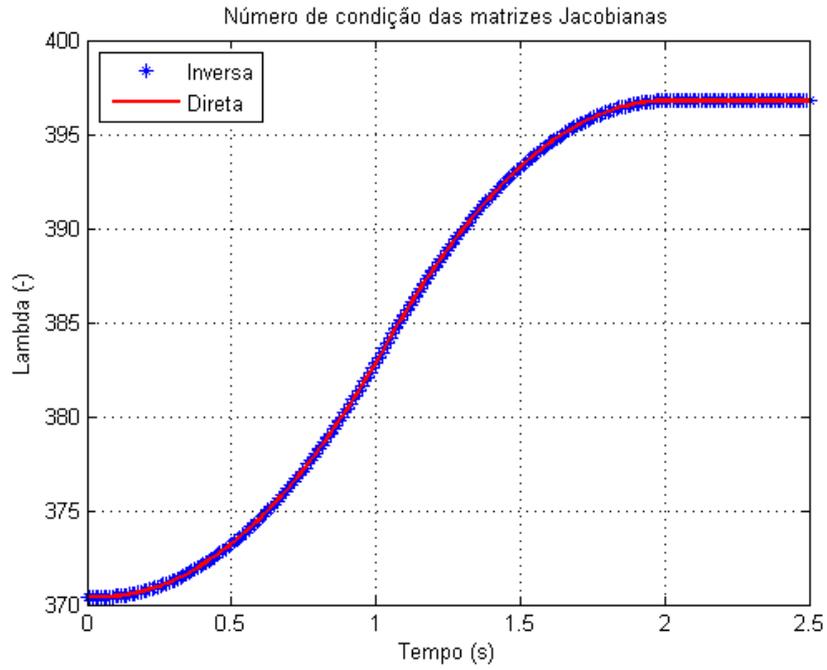


Figura 5.81: Números de condição das matrizes jacobianas inversa e direta da Plataforma Stewart.

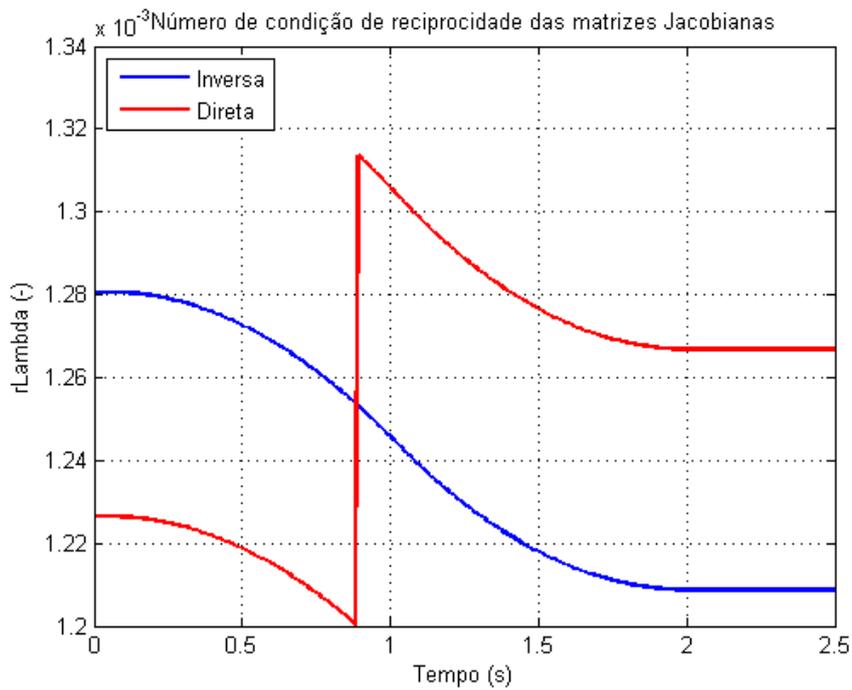


Figura 5.82: Números de condição de reciprocidade das matrizes jacobianas inversa e direta da Plataforma Stewart.

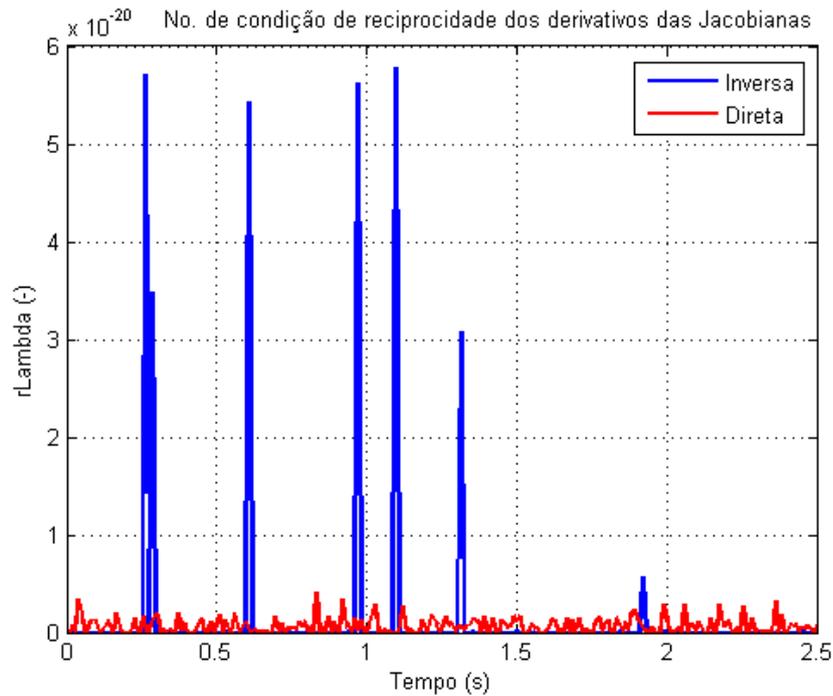


Figura 5.83: Números de condição de reciprocidade dos derivativos das jacobianas inversa e direta da Plataforma Stewart.

Os números de condição obtidos estão na ordem de 400 e os de reciprocidade na ordem de 0,001. A ordem de grandeza dos números de condição de reciprocidade cai para a ordem de 10^{-20} na matriz dos derivativos das jacobianas. Para seguir com a análise, assim como na plataforma plana, foram dadas entradas em $x(t)$ e $\theta(t)$ descritas pelas Equações 5.2 e 5.3, respectivamente. A Figura 5.84 apresenta o número de condição λ das matrizes jacobianas inversa e direta. Para a mesma entrada, as Figuras 5.85 e 5.86 apresentam o número de condição de reciprocidade das matrizes jacobianas inversa e direta e para as matrizes dos derivativos das jacobianas inversa e direta, respectivamente.

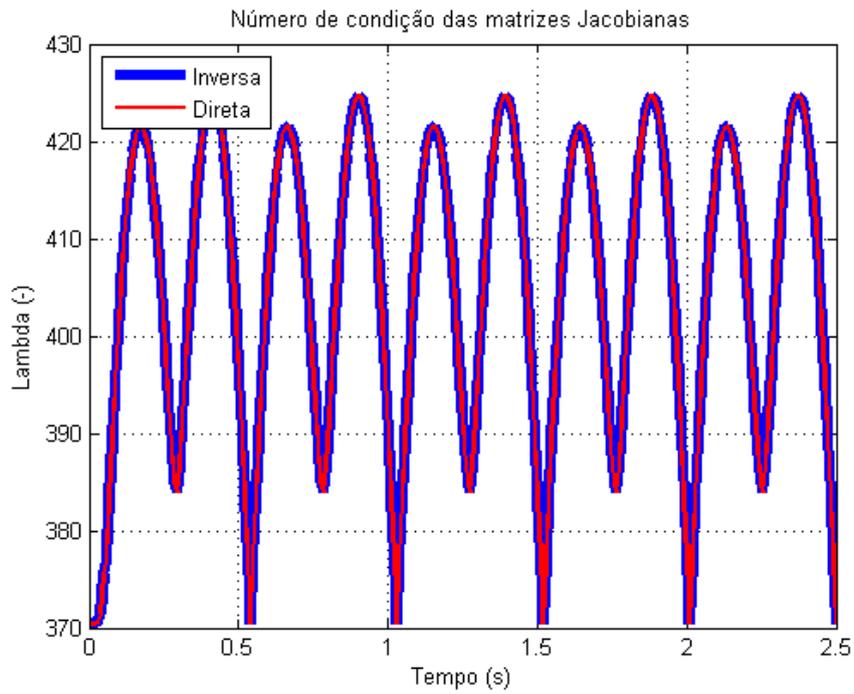


Figura 5.84: Números de condição das matrizes jacobianas inversa e direta da Plataforma Stewart.

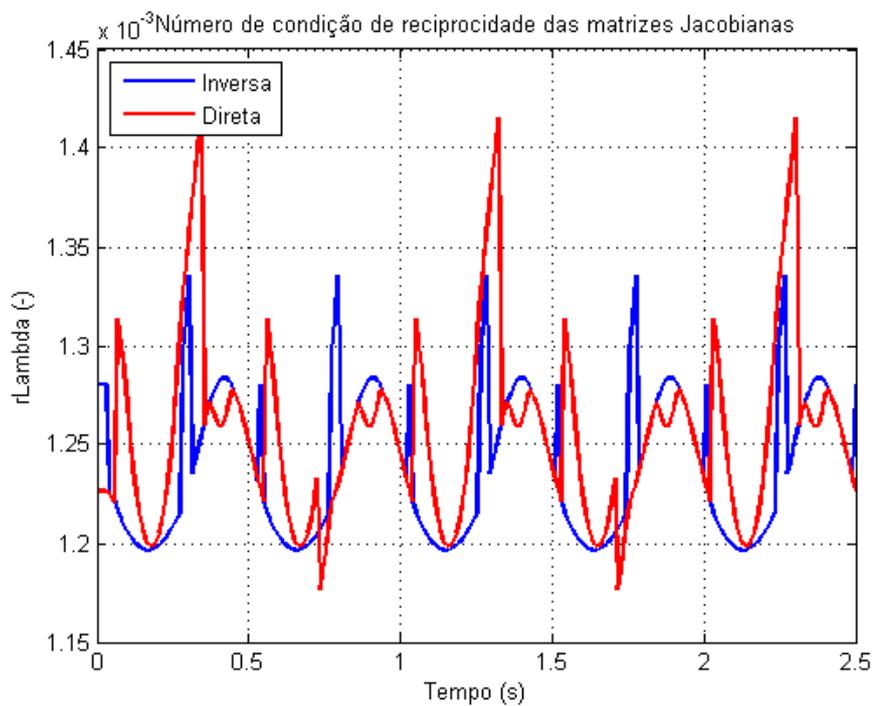


Figura 5.85: Números de condição de reciprocidade das matrizes jacobianas inversa e direta da Plataforma Stewart.

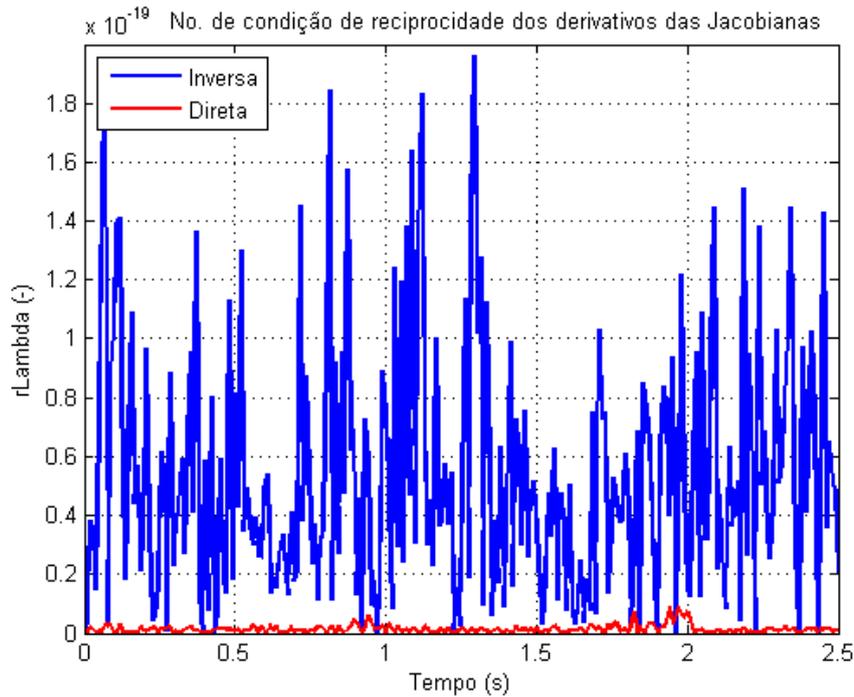


Figura 5.86: Números de condição de reciprocidade dos derivativos das jacobianas inversa e direta da Plataforma Stewart.

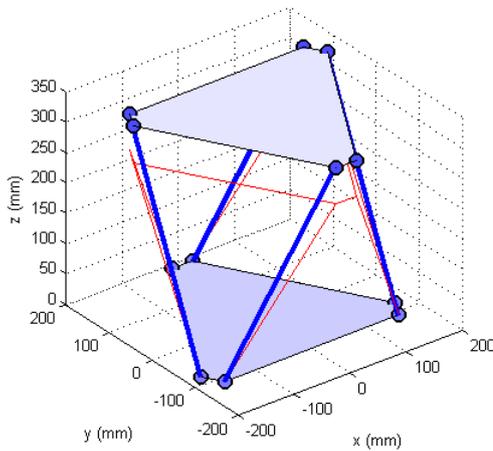
Os números de condição ficaram na ordem de 400 e os de reciprocidade na ordem de 0,001. A ordem de grandeza dos números de condição de reciprocidade para a matriz dos derivativos das jacobianas fica na ordem de 10^{-20} , porém com picos na ordem de 10^{-19} na matriz dos derivativos da jacobiana inversa.

5.3.5 Validação do modelo de equilíbrio estático

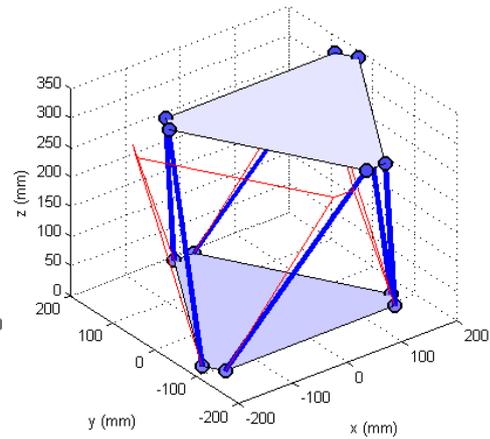
Para avaliar o modelo (Equações 3.64 e 3.65) com relação à distribuição dos carregamentos estáticos nos atuadores dada certa posição de orientação da plataforma móvel, foi dada uma entrada correspondente ao peso dos elementos suportados pelos atuadores. Os cálculo do jacobiano usado está na rotina `cininv.m` (CD Anexo). Em todas as avaliações o vetor de entradas foi $\mathbf{F} = [\mathbf{f}; \mathbf{n}] = [0 \ 0 \ 4461 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, com dimensões $[\text{gf} \ \text{gf} \ \text{gf} \ \text{gf.mm} \ \text{gf.mm} \ \text{gf.mm}]^T$. As dimensões usadas no vetor de posição e orientação da plataforma foram $[\mathbf{p}] = [\text{mm} \ \text{mm} \ \text{mm} \ \text{rad} \ \text{rad} \ \text{rad}]^T$ e $[\boldsymbol{\tau}] = [\text{gf} \ \text{gf} \ \text{gf} \ \text{gf} \ \text{gf} \ \text{gf}]^T$. As configurações estudadas

da Plataforma Stewart juntamente com as saídas encontradas para as forças nos atuadores são

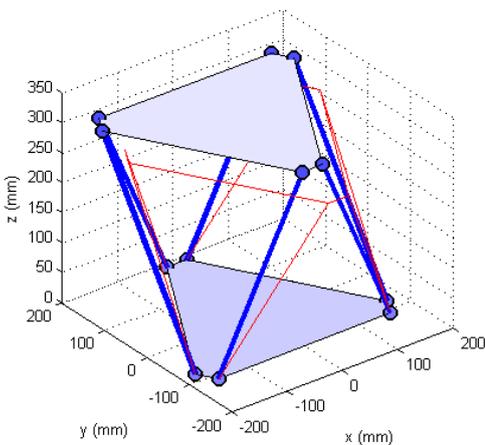
- $\mathbf{p} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$; $\boldsymbol{\tau} = [854 \ 854 \ 854 \ 854 \ 854 \ 854]^T$ (Figura 5.68.a);
- $\mathbf{p} = [0 \ 0 \ 60 \ 0 \ 0 \ 0]^T$; $\boldsymbol{\tau} = [820 \ 820 \ 820 \ 820 \ 820 \ 820]^T$ (Figura 5.87.a);
- $\mathbf{p} = [60 \ 0 \ 25 \ 0 \ 0 \ 0]^T$; $\boldsymbol{\tau} = [469 \ 1145 \ 1446 \ 155 \ 556 \ 1172]^T$ (Figura 5.87.b);
- $\mathbf{p} = [0 \ 60 \ 25 \ 0 \ 0 \ 0]^T$; $\boldsymbol{\tau} = [1370 \ 222 \ 880 \ 880 \ 222 \ 1370]^T$ (Figura 5.87.c);
- $\mathbf{p} = [0 \ 0 \ 35 \ 0.18 \ 0 \ 0]^T$; $\boldsymbol{\tau} = [787 \ 864 \ 847 \ 847 \ 864 \ 787]^T$ (Figura 5.87.d);
- $\mathbf{p} = [0 \ 0 \ 30 \ 0 \ 0.18 \ 0]^T$; $\boldsymbol{\tau} = [830 \ 866 \ 878 \ 793 \ 798 \ 846]^T$ (Figura 5.87.e);
- $\mathbf{p} = [0 \ 0 \ 25 \ 0 \ 0 \ 0.30]^T$; $\boldsymbol{\tau} = [1093 \ 548 \ 1093 \ 548 \ 1093 \ 548]^T$ (Figura 5.87.f).



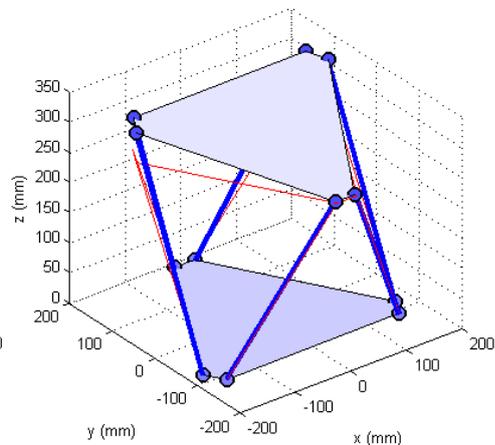
(a)



(b)



(c)



(d)

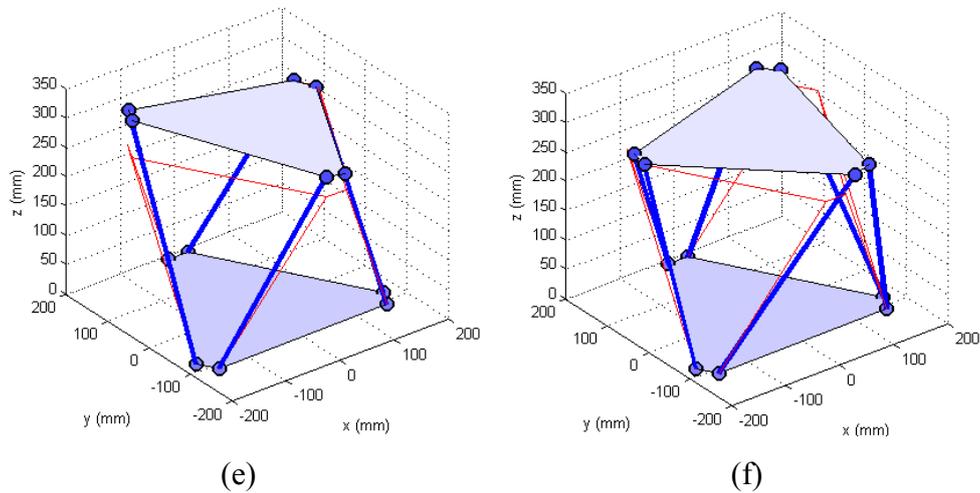


Figura 5.87: Configurações da Plataforma Stewart para a avaliação dos carregamentos estáticos.

5.3.6 Análise das estratégias de controle

A Figura 5.88 apresenta o diagrama de blocos para a simulação do sistema em malha fechada de controle e a Figura 5.89 apresenta o diagrama de blocos para a simulação das funções de transferência de cada atuador. Da mesma forma que nas simulações com a plataforma plana, os carregamentos nos atuadores (entrada mg) foram considerados iguais e a pressão da fonte considerada constante (entrada pf). Os parâmetros do sistema de atuação também se mantêm os mesmos em todas as simulações. A Tabela 5.1 (Seção 5.1) apresenta os valores de todos os parâmetros do sistema de atuação usados nas simulações.

Os valores dos zeros (z_{xv} , z_{pv} , z_{1g} e z_{2g}) e dos coeficientes k_{xv} , k_{pv} e k_{gv} foram obtidos a partir das relações descritas nas Equações 4.1, 4.2, 4.8 e 4.10 e dos valores da Tabela 5.1. Em todas as simulações os valores de mg e de pf foram 1,0 kgf e 0,05 kgf/mm² (4,9 bar), respectivamente. Em cada simulação os resultados serão comparados para diferentes ganhos do controlador.

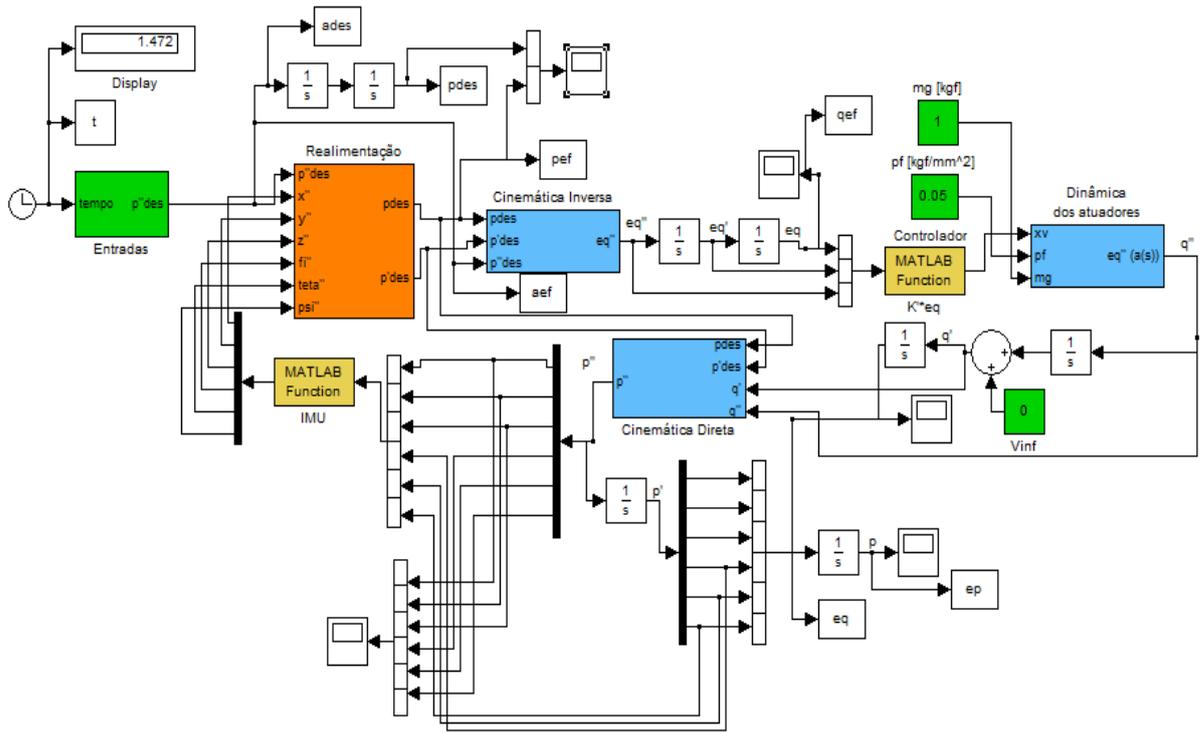


Figura 5.88: Diagrama de blocos para o sistema em malha fechada.

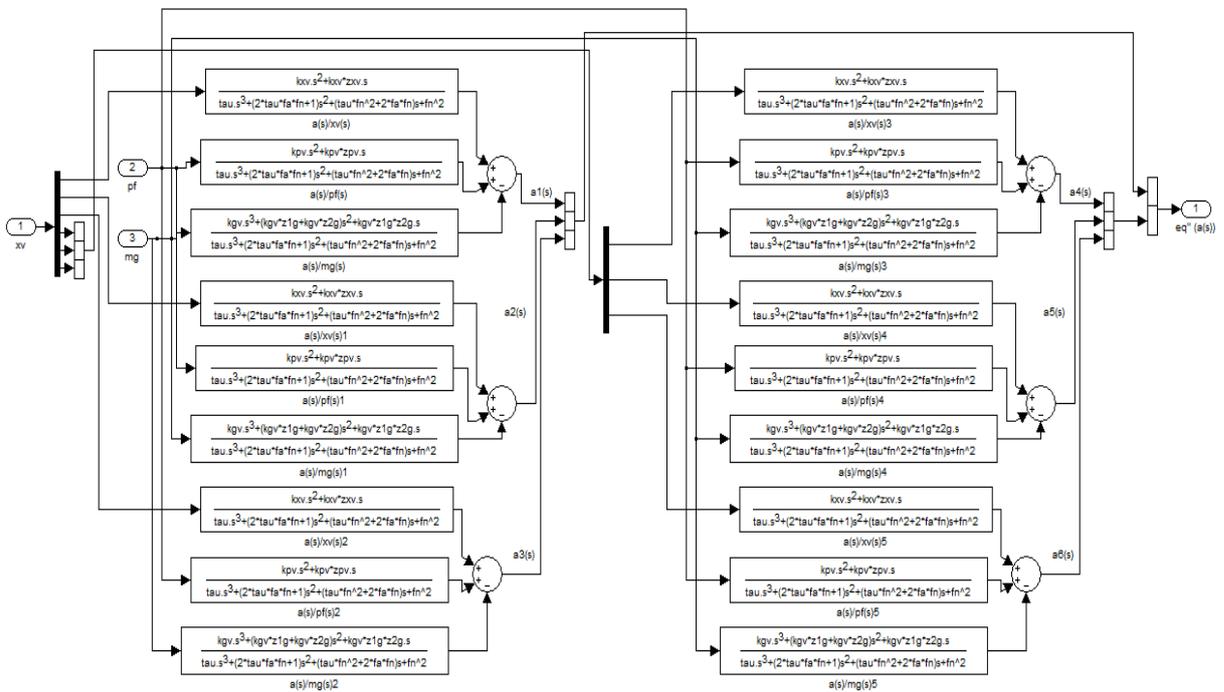


Figura 5.89: Funções de transferência da dinâmica dos atuadores.

Para uma entrada em cossenóide (Figura 4.6) na aceleração vertical desejada da plataforma móvel com $A = 20 \text{ mm/s}^2$ e $\omega = 6,28 \text{ rad/s}$, e ganhos no controlador todos iguais a 0,10 (mm/mm em K_P , mm.s/mm em K_V e mm.s²/mm em K_A), a resposta no tempo do deslocamento ficou como mostra a Figura 5.90. A Figura 5.91 apresenta a resposta no tempo para o deslocamento dos atuadores e as Figuras 5.92 e 5.93 apresentam os erros de deslocamento vertical da plataforma móvel e os erros de deslocamento dos atuadores, respectivamente. As Figuras 5.94 a 5.97 apresentam estas mesmas respostas no tempo para ganhos do controlador iguais a 1,00.

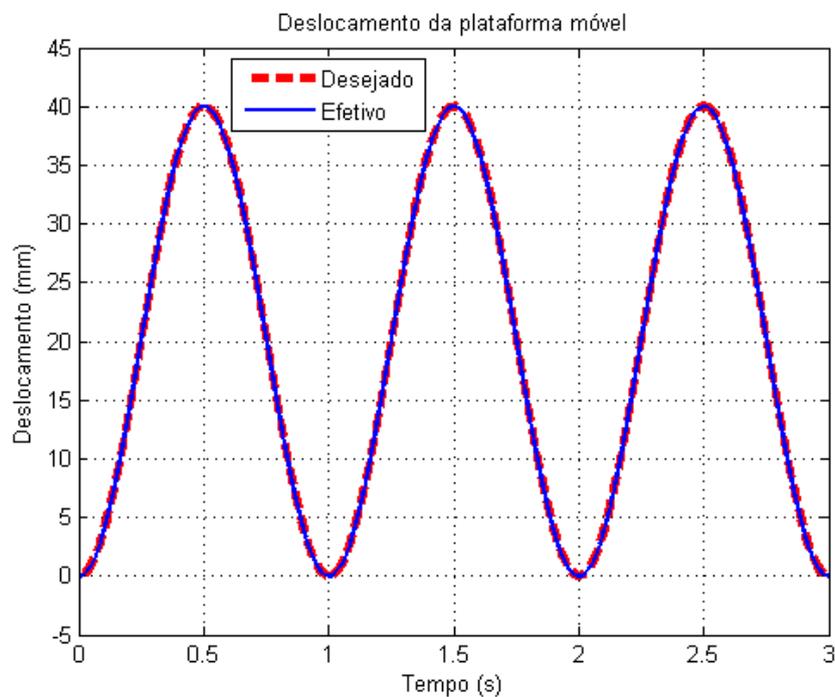


Figura 5.90: Deslocamento vertical da plataforma móvel para entrada em cossenóide e ganhos iguais a 0,10.

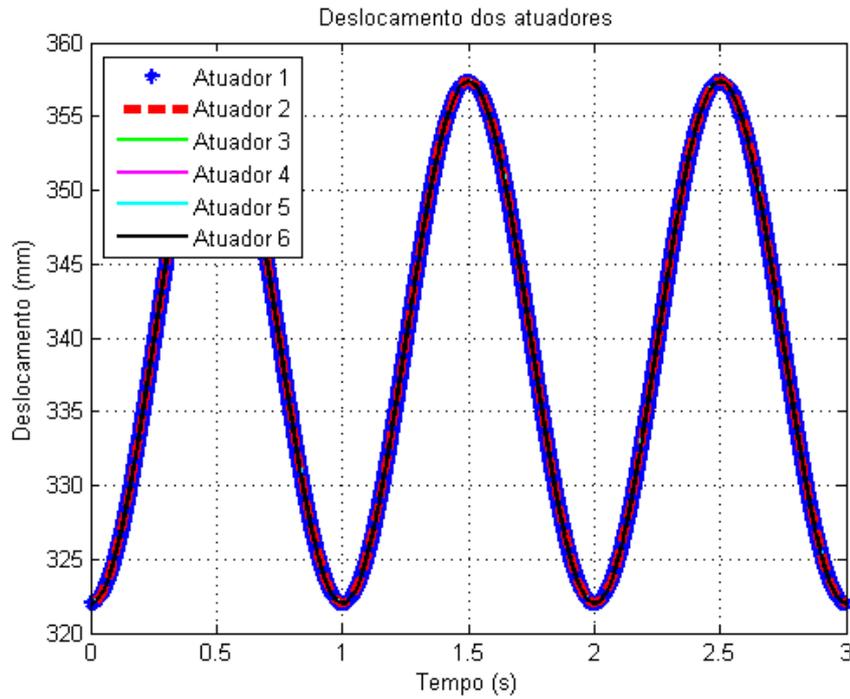


Figura 5.91: Deslocamento dos atuadores para entrada em cossenoide e ganhos iguais a 0,10.

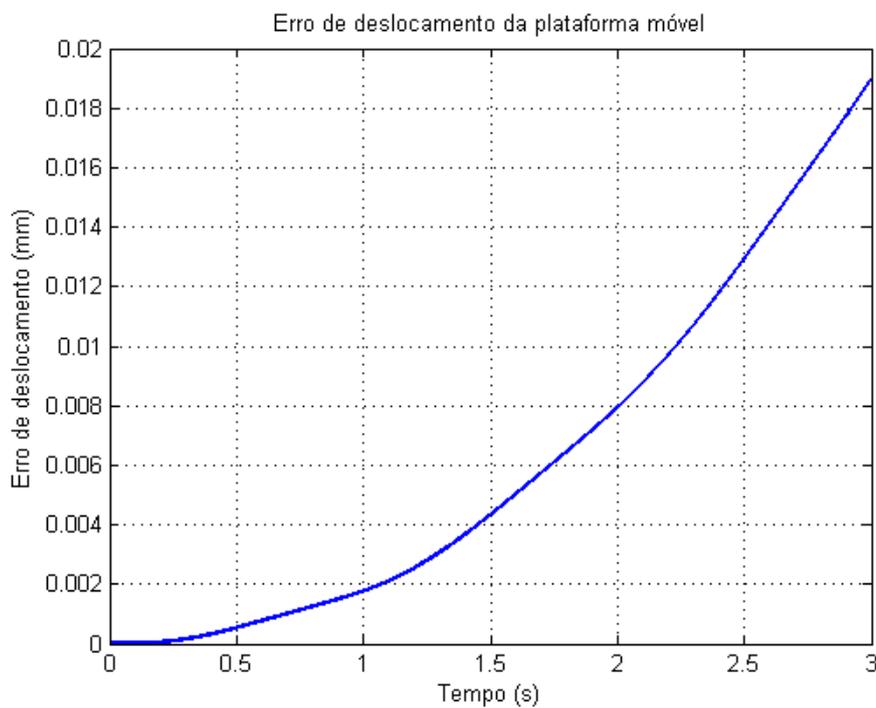


Figura 5.92: Erro de deslocamento vertical da plataforma móvel para entrada em cossenoide e ganhos iguais a 0,10.

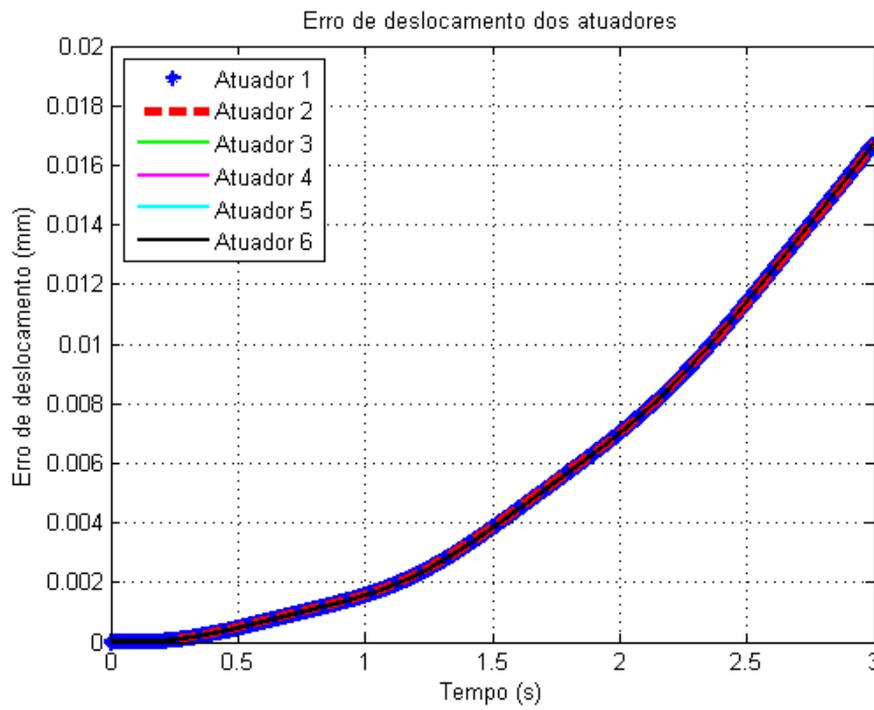


Figura 5.93: Erros de deslocamento dos atuadores para entrada em cossenóide e ganhos iguais a 0,10.

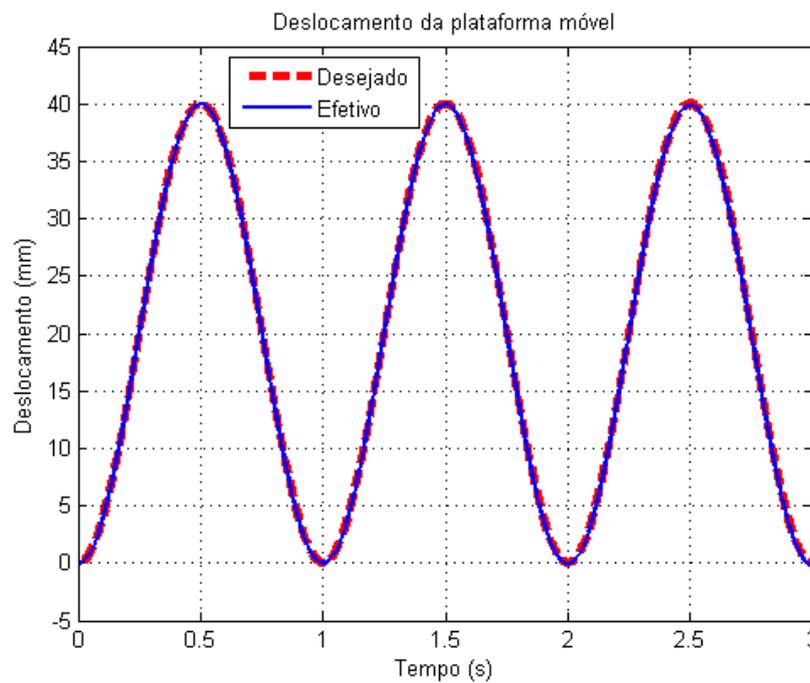


Figura 5.94: Deslocamento vertical da plataforma móvel para entrada em cossenóide e ganhos iguais a 1,00.

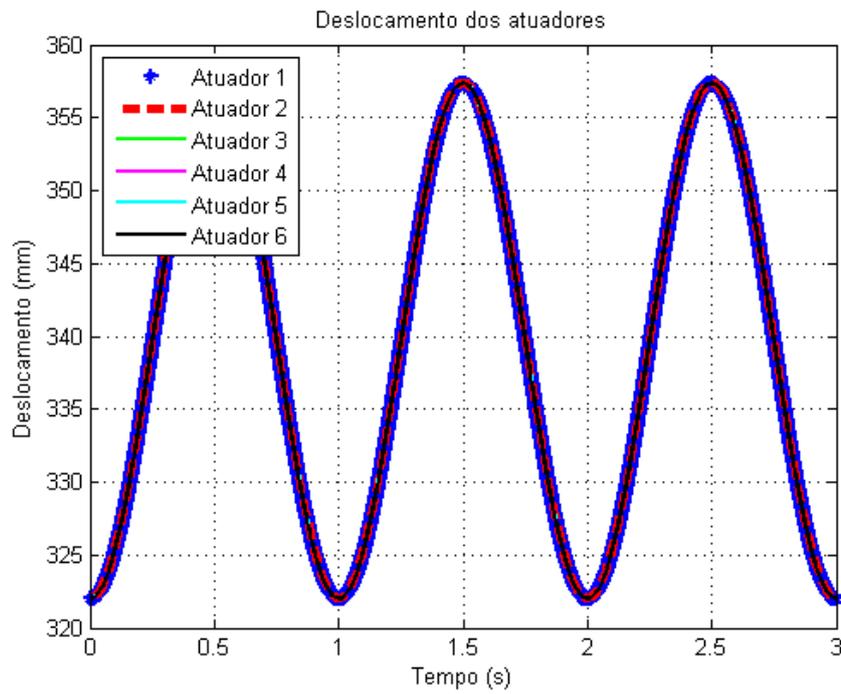


Figura 5.95: Deslocamento dos atuadores para entrada em cossenóide e ganhos iguais a 1,00.

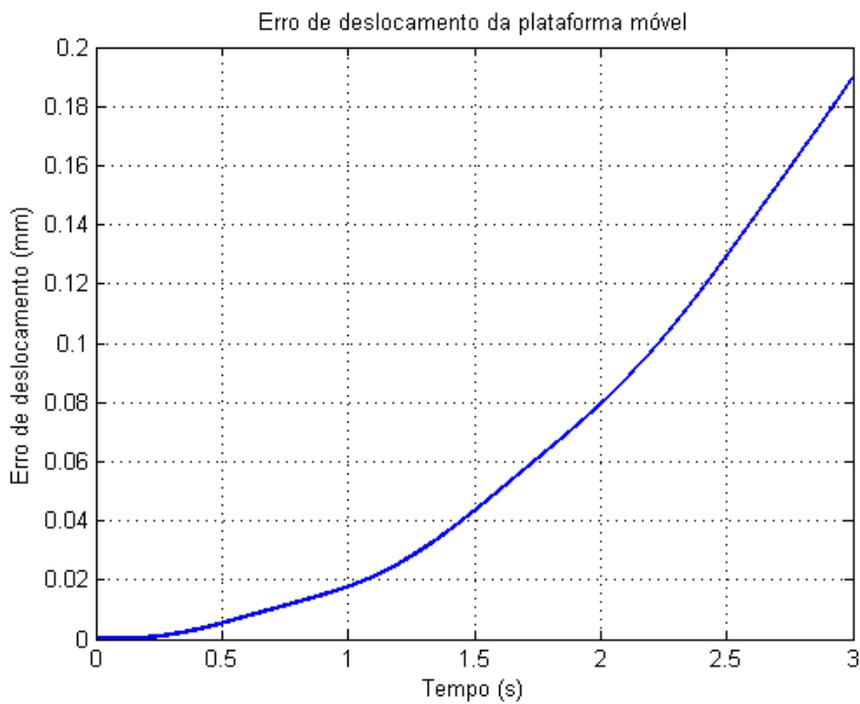


Figura 5.96: Erro de deslocamento vertical da plataforma móvel para entrada em cossenóide e ganhos iguais a 1,00.

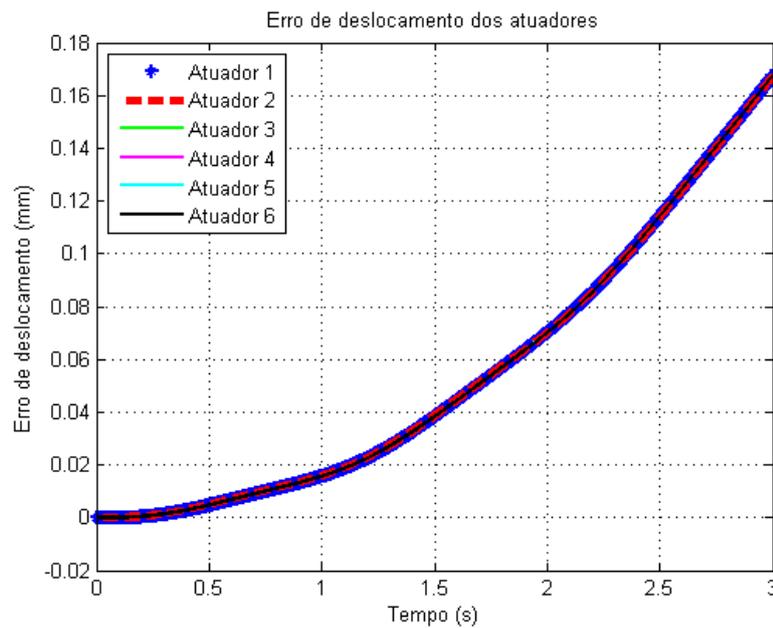


Figura 5.97: Erros de deslocamento dos atuadores para entrada em cossenóide e ganhos iguais a 1,00.

As respostas no tempo apresentadas nas Figuras 5.90 a 5.97, assim como nos resultados obtidos para a plataforma plana, indicam que neste caso, quanto menores os ganhos do controlador, mais eficiente fica o controle de posicionamento da plataforma. À medida que os ganhos diminuem o erro também decai na mesma ordem de grandeza. Para ganhos da ordem da unidade, observa-se claramente que a plataforma móvel não consegue acompanhar a trajetória desejada (os erros de deslocamento vertical da plataforma móvel ficam na ordem de 0,2 mm para uma amplitude de 20 mm e os erros dos atuadores alcançam 0,18 mm para amplitudes desejadas de 15 mm).

Para uma entrada em pulsos suavizados (Figura 4.8) com $A = 1 \text{ mm/s}^2$ e $\omega = 6,28 \text{ rad/s}$, e ganhos no controlador todos iguais a 10,0 (mm/mm em K_P , mm.s/mm em K_V e mm.s²/mm em K_A), a resposta no tempo do deslocamento ficou como mostra a Figura 5.98. A Figura 5.99 apresenta a resposta no tempo para o deslocamento dos atuadores e as Figuras 5.100 e 5.101 apresentam os erros de deslocamento vertical da plataforma móvel e os erros de deslocamento dos atuadores, respectivamente. As Figuras 5.102 a 5.105 apresentam estas mesmas respostas no tempo para ganhos do controlador iguais a 100.

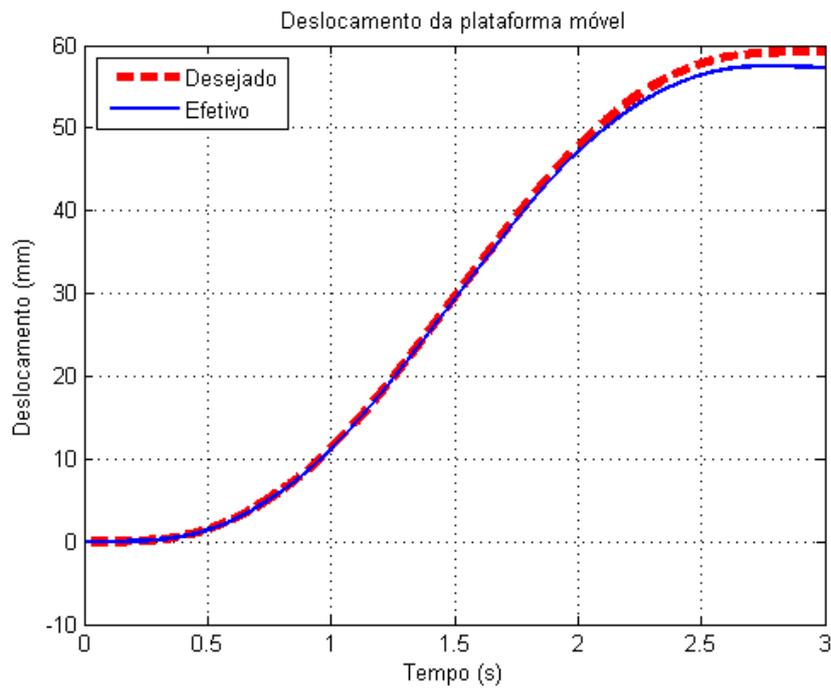


Figura 5.98: Deslocamento vertical da plataforma móvel para entrada em pulsos e ganhos iguais a 10,0.

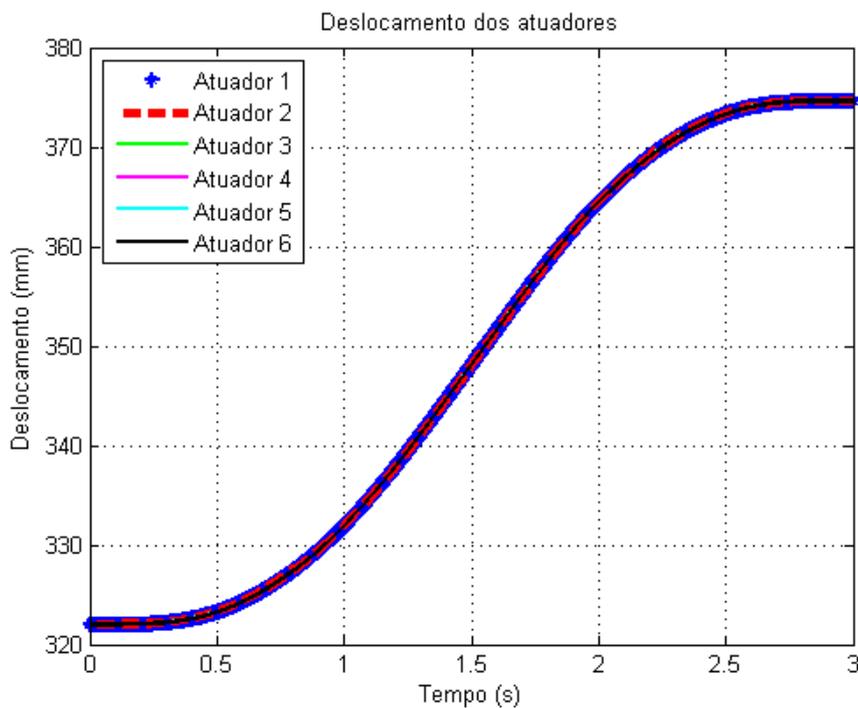


Figura 5.99: Deslocamento dos atuadores para entrada em pulsos e ganhos iguais a 10,0.

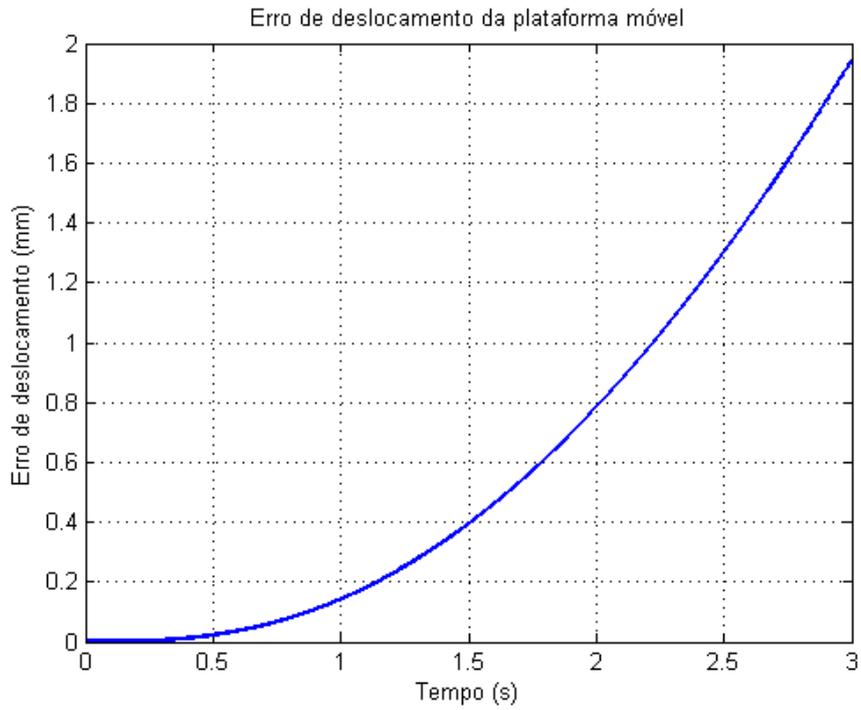


Figura 5.100: Erro de deslocamento vertical da plataforma móvel para entrada em pulsos e ganhos iguais a 10,0.

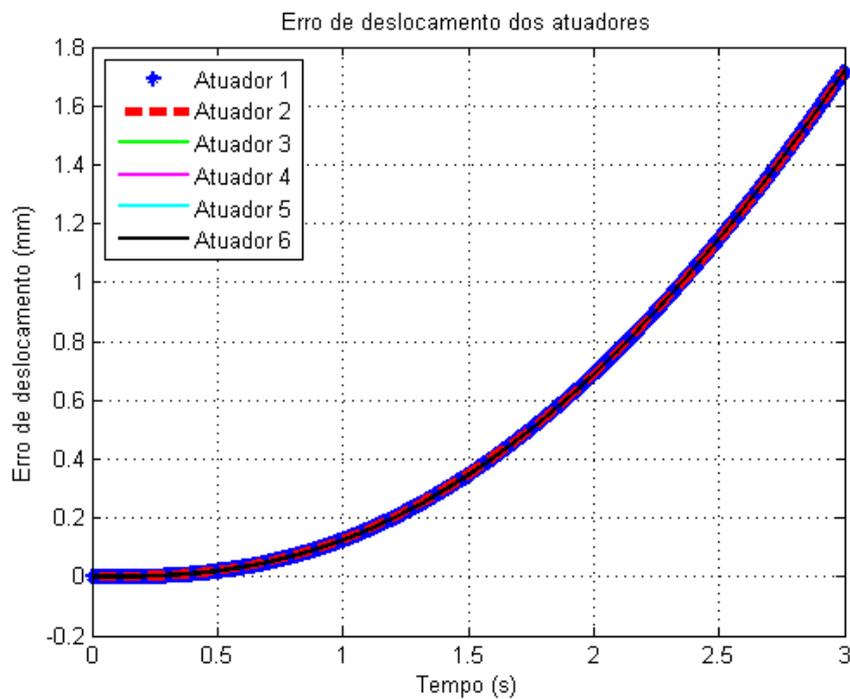


Figura 5.101: Erros de deslocamento dos atuadores para entrada em pulsos e ganhos iguais a 10,0.

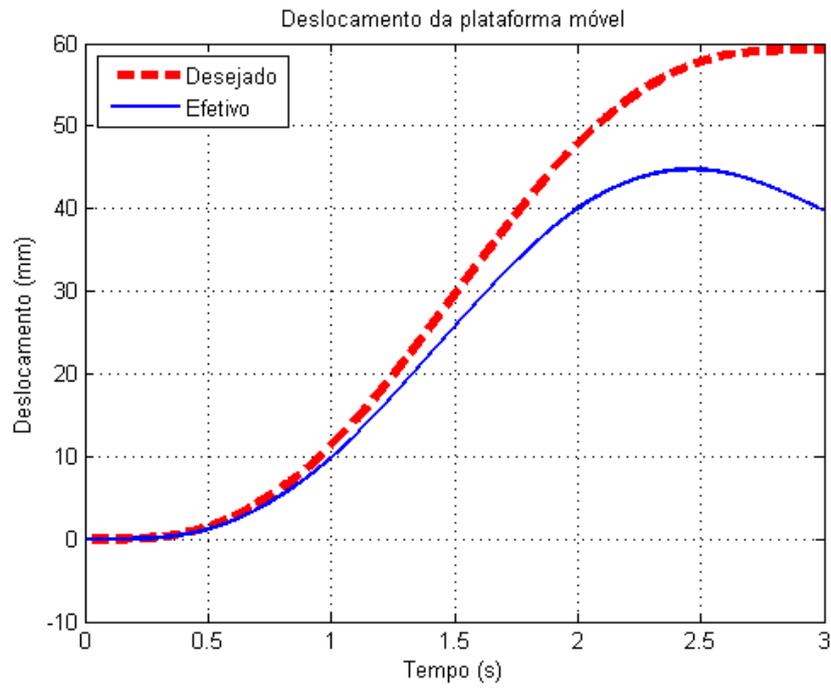


Figura 5.102: Deslocamento vertical da plataforma móvel para entrada em pulsos e ganhos iguais a 100.

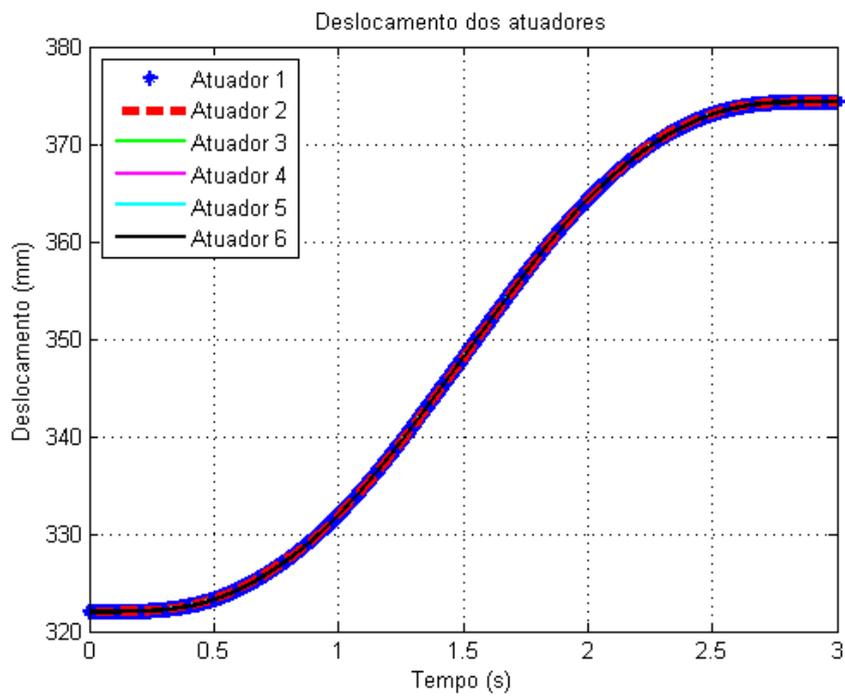


Figura 5.103: Deslocamento dos atuadores para entrada em pulsos e ganhos iguais a 100.

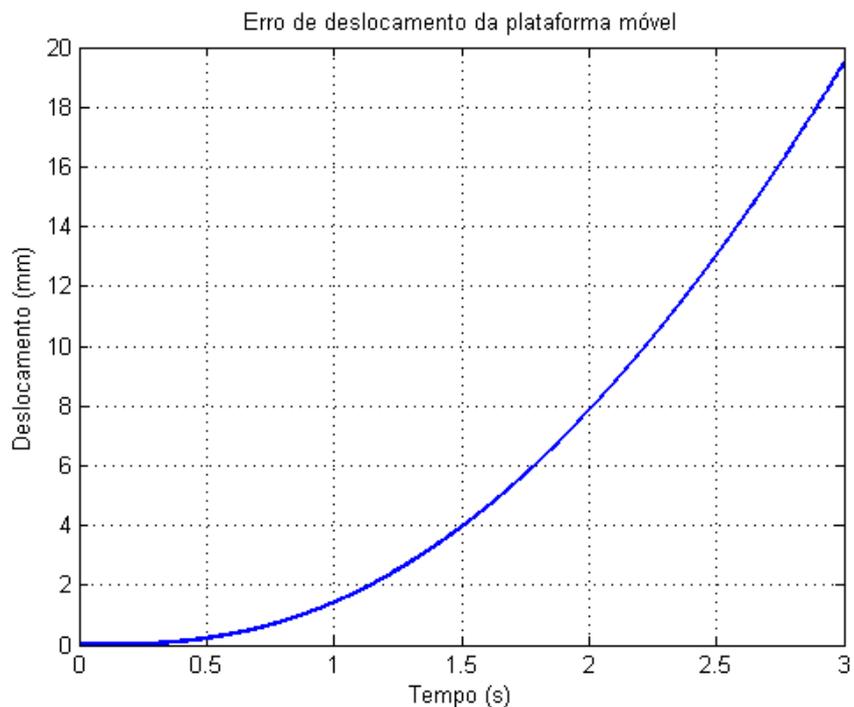


Figura 5.104: Erro de deslocamento vertical da plataforma móvel para entrada em pulsos e ganhos iguais a 100.

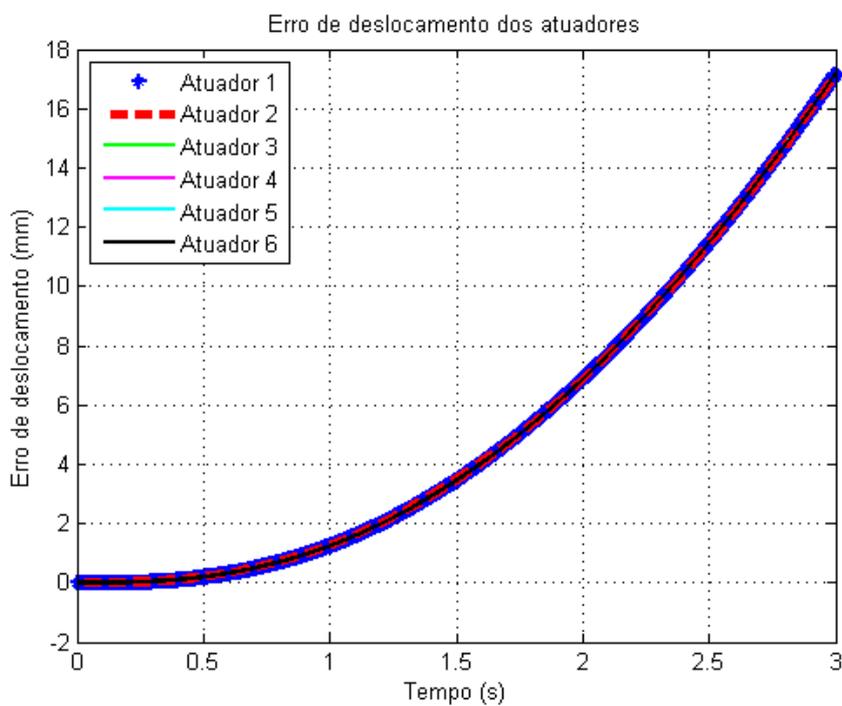


Figura 5.105: Erros de deslocamento dos atuadores para entrada em pulsos e ganhos iguais a 100.

As respostas no tempo apresentadas nas Figuras 5.98 a 5.105 também indicam que à medida que os ganhos diminuem o erro também decai na mesma ordem de grandeza. Para ganhos da ordem da unidade, observa-se claramente que a plataforma móvel não consegue acompanhar a trajetória desejada (os erros de deslocamento vertical da plataforma móvel ficam na ordem de 20 mm para um valor desejado de 60 mm e os erros dos atuadores também alcançam 16 mm para amplitudes desejadas de 50 mm).

Para ambas as entradas testadas, pode-se verificar que a forma da resposta dos erros se mantém a mesma: aumenta exponencialmente com o tempo. Com ganhos baixos no controlador, estes erros são muito pequenos, podendo-se considerar que a plataforma segue a trajetória desejada eficientemente, porém, este aumento exponencial indica que em algum momento os erros poderão alcançar valores tais que poderiam fazer com que a plataforma não cumprisse a tarefa ou trajetória desejada da forma planejada. Esta forma da resposta no tempo do erro pode ainda estar atrelada a alguma característica de instabilidade do sistema na forma como ele é proposto.

6

Conclusões e etapas futuras

6.1 Conclusões

Este trabalho apresentou uma metodologia para a modelagem da cinemática de mecanismos paralelos baseada nos derivativos das matrizes jacobianas destes. Com este modelo obtêm-se as acelerações dos membros em função das acelerações da plataforma móvel, no caso da cinemática inversa e as acelerações da plataforma móvel em função das acelerações dos membros, no caso da cinemática direta. Para uma plataforma plana de três graus de liberdade o modelo obtido é inteiramente analítico. Já para a Plataforma Stewart, devido à alta complexidade do problema, este modelo é quasi-analítico, tendo que contar com métodos numéricos de inversão de matrizes, por exemplo.

Além destes modelos cinemáticos, um modelo estático foi validado através de diversas simulações para ambos os mecanismos articulados. Também foi feita uma breve análise da singularidade das matrizes jacobianas e das matrizes dos derivativos da jacobiana. Esta análise indicou as ocasiões nas quais a inversa destas matrizes não pode ser obtida numericamente de forma confiável, como é o caso da inversa numérica da matriz dos derivativos da jacobiana direta (para obter a matriz dos derivativos direta) da Plataforma Stewart.

Com a validação destes modelos, foi estudada a implementação de uma estratégia de controle baseada no uso de uma central inercial para a obtenção da configuração espacial das plataformas móveis dos mecanismos analisados através das medidas de aceleração linear e velocidade angular destas plataformas. Os resultados das simulações indicaram que é possível controlar tais mecanismos através destes sinais.

6.2 Trabalhos em andamento e etapas futuras

Ainda com todos os resultados positivos encontrados nas validações dos modelos e da estratégia de controle, foram encontrados alguns pontos que precisam de aprimoramento, como os perfis de erro ao longo do tempo obtidos nas simulações, que mostram que este sempre aumenta e de forma exponencial. Mesmo com valores muito pequenos, deve-se trabalhar ainda na direção de fazer com que os erros diminuam ou ao menos estabilizem com o tempo para evitar que estes alcancem valores altos em tarefas que demandem muito tempo.

No modelo cinemático direto da Plataforma Stewart, ainda deve ser avaliada com maior cautela a influência dos termos que compõem a obtenção da aceleração. Também é necessário incrementar a análise das singularidades para estudar possíveis soluções para o problema encontrado e assim evitar o uso da simplificação usada (foi desprezado o termo que dependia da inversa da matriz dos derivativos da jacobiana inversa).

Apesar de serem necessárias melhorias no modelo, estas não impedem o início do processo de implementação da estratégia de controle experimentalmente. Para isto, poderá ser usada a Plataforma Stewart cuja construção é descrita no Apêndice B deste trabalho. Estes testes experimentais são fundamentais para completar a verificação da modelagem aqui proposta e da eficácia da estratégia de controle baseada na medição de acelerações e velocidades angulares via central inercial.

Testes experimentais envolvendo apenas um sistema de atuação para a obtenção dos parâmetros dos modelos dinâmicos deste sistema (como fatores de amortecimento e capacitâncias) estão em desenvolvimento e serão apresentados em (ASSAD, M. M., 2013). Com os parâmetros do sistema de atuação definidos, este sistema poderá ser usado em diversos mecanismos para avaliações experimentais e conseqüentemente, no desenvolvimento de simuladores de movimentos.

Referências bibliográficas

ADI, B. I. e GREVILLE, T. N. E. **Generalized inverses: Theory and applications**. Springer-Verlag, second edition, ISBN 0-387-00293-6. 2003.

ALBUQUERQUE, A. N. **Desenvolvimento de um simulador vertical com atuação pneumática**. Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Projeto Final de Graduação. Rio de Janeiro, Brasil. Agosto de 2009.

ASADA, H., SLOTINE, E. **Robot Analysis and Control**. Massachusetts Institute of Technology. John Wiley & Sons, Inc. 1986.

ASSAD, M. M., **Cinemática direta e inversa de mecanismos paralelos – Modelagem de um simulador de movimentos**. Departamento de Engenharia de Controle e Automação, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Projeto Final de Graduação. Rio de Janeiro, Brasil. Dezembro de 2010.

ASSAD, M. M., **Estratégias de controle em tempo real para compensação das não linearidades de um sistema de atuação pneumático**. Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Dissertação de Mestrado. Rio de Janeiro, Brasil. Março de 2013 (previsão).

BOUDREAU, R., TURKKAN, N. **Solving the forward kinematics of parallel manipulators with a genetic algorithm**. École de genie, Université de Moncton. Moncton, New Brunswick, E1A 3E9, Canada. Outubro de 2009.

CABRAL, L. A. L. **Desenvolvimento e avaliação de desempenho de válvula composta para controle de sistema pneumático**. Departamento de

Engenharia de Controle e Automação, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Projeto Final de Graduação. Rio de Janeiro, Brasil. Agosto de 2010.

CRAIG, J. J. **Introduction to robotics – Mechanics and control**. Addison-Wesley, Silma, Inc, Second Edition. USA. 1989.

DUTRÉ, S., BRUYNINCKX, H., DE SHUTTER, J. **The analytical Jacobian and its derivative for a parallel manipulator**. Department of Mechanical Engineering, Katholieke Universiteit Leuven. Heverlee, Belgium. Abril de 2007.

KARNOPP, D. C., MARGOLIS, D. L., ROSENBERG, R. C. **System dynamics: Modeling and simulation of mechatronic systems**. 4th Edition, Wiley. 2006.

HUANG, C. I., CHANG, C. F., YU, M Y. e FU, L. C. **Sliding-mode tracking control of the Stewart Platform**. Department of Electrical Engineering and Department of Computer Science and Information Engineering, National Taiwan University. Taipei, Taiwan, R.O.C. 2004.

INMETRO. **Guia para a Expressão da Incerteza de Medição**. Terceira edição brasileira em língua portuguesa. Rio de Janeiro. BNT, INMETRO. 2003.

HANIEH, A. A. **Active Isolation and Control of Vibrations via Stewart Platform**. Free University of Brussels. Publisher: VDM Verlag Dr.Müller Aktiengesellschaft & Co. KG. Brussels, Belgium. 2009.

LLERENA, R. W. A. **Modelagem para um simulador de movimentos para um veículo terrestre em escala**. Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Dissertação de Mestrado. Rio de Janeiro, Brasil. Fevereiro de 2000.

- MOLINA, F. A. L. **Ambiente de simulação de manipuladores paralelos: modelagem, simulação e controle de uma Plataforma Stewart.** Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas. Dissertação de Mestrado. Campinas, Brasil. Junho de 2008.
- NELLI SILVA, E. C. **Apostila de pneumática – sistemas fluido mecânicos.** Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos, Escola Politécnica da USP. São Paulo, Brasil. 2002.
- OGATA, K. **Modern control engineering.** 5th Edition, Prentice Hall. Setembro de 2009.
- SERENO, H. R. S. **Controle de veículos autônomos em alta velocidade a partir de trajetórias simuladas previamente definidas.** Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Dissertação de Mestrado. Rio de Janeiro, Brasil. 2012.
- SERRANO, F.; CABALLERO, A. A.; YEN, K. K.; BREZINA, T. **Control of a Stewart Platform used in Biomechanical Systems.** Florida International University. Miami, Florida, USA. Maio de 2007.
- SILVA, J. C. C. **Modelagem de um simulador de Movimentos.** Instituto Militar de Engenharia. Dissertação de Mestrado. Rio de Janeiro, Brasil. 1991.
- SIMAAN, N., SHOHAM, M. **Geometric interpretation of the derivatives of parallel robots jacobian matrix with application to stiffness control.** Robotics Laboratory, Department of Mechanical Engineering, Technion - Israel Institute of Technology. Haifa 32000, Israel. Março de 2003.
- STAMPER, R. E., TSAI, L. W., WALSH, G. C. **Optimization of a three DOF translational platform for well-conditioned workspace.** Mechanical Engineering Department and Institute for Systems Research, University of Maryland. College Park, MD 20742, Maryland, Estados Unidos. Agosto de 1997.

- TAYLOR, J. C. **Correction of general deformity with the Taylor spatial frame fixator**. *http://www.jcharlestaylor.com*, acessado em Novembro de 2011. Memphis, Tennessee, USA. 2002.
- TAPIA, B. C. e MÉNDEZ, S. J. T. **Robot paralelo planar para ensamble**. División de Estudios de Posgrado e Investigación, Instituto Tecnológico de Puebla. Maravillas, Colombia. 2009.
- TSAI, L. W. **Robot analysis – The mechanical of serial and parallel manipulators**. Department of Mechanical Engineering and Institute for Systems Research, University of Maryland. John Wiley & Sons, Inc. 1999.
- VARGAS, M. V. **Controle de uma plataforma de movimento de um simulador de voo**. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. Tese de Doutorado. São Carlos, Brasil. Outubro de 2009.
- WANG, Y. **Symbolic dynamics and controls of a parallel manipulator – A case study of Stewart Platform**. State University of New York. Publisher: VDM Verlag Dr.Müller Aktiengesellschaft & Co. KG. Buffalo, USA. 2009.
- WEBER, H. I. **Raciocinando dinâmica de rotação – Bases para o entendimento do movimento de rotação**. Notas de aula. Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, Brasil. 2009.
- WITTGENSTEIN, L. **Tractatus logico-philosophicus**. International Library of Psychology Philosophy and Scientific Method. Kegan Paul, Trench, Trubner & Co., Ltd. London, UK. 1922.

Apêndice A

Considerações sobre a cinemática e a dinâmica da Plataforma Stewart

A.1 Introdução

Neste Apêndice será apresentado outro caminho para análise da cinemática inversa da Plataforma Stewart e uma solução aproximada para sua cinemática direta, além das análises de sua rigidez e sua dinâmica.

A.2 Análise da cinemática inversa

Para exemplificar o uso da cinemática inversa da plataforma será considerada a trajetória descrita pela Equação A.1.

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} -1,5 + 0,2\text{sen}(3t) \\ 0,2\text{sen}(3t) \\ 1,0 + 0,2\text{sen}(3t) \end{bmatrix} m \text{ e } \phi = \theta = \psi = 0 \text{ rad.} \quad (\text{A.1})$$

A posição inicial da plataforma é dada então por $\mathbf{p} = [p_x \ p_y \ p_z]^T = [-1,5 \ 0,0 \ 1,0]^T m$ e os ângulos de rolagem, arfagem e guinada iniciais são $\phi = \theta = \psi = 0 \text{ rad}$, respectivamente. A velocidade inicial da plataforma é dada por $\dot{\mathbf{p}} = [v_{px} \ v_{py} \ v_{pz}]^T = [0,6 \ 0,6 \ 0,6]^T m/s$ e as velocidades angulares iniciais são $\boldsymbol{\omega}_p = [\omega_{px} \ \omega_{py} \ \omega_{pz}]^T = [\dot{\phi} \ \dot{\theta} \ \dot{\psi}]^T = [0 \ 0 \ 0]^T rad/s$ (WANG, Y., 2009).

As velocidades lineares e angulares também podem ser computadas através das velocidades Cartesianas independentes $v_{px}, v_{py}, v_{pz}, \omega_x, \omega_y, \omega_z$, sendo

que estes três últimos formam as componentes da velocidade angular da plataforma móvel $\boldsymbol{\omega}_p$, (WANG, Y., 2009). Assim, tem-se a relação

$$\mathbf{b}_i = \dot{\mathbf{d}}_{ir} + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{d}_i, i = 1, \dots, 6 \quad (\text{A.2})$$

na qual

$$\dot{\mathbf{d}}_{ir} = \begin{bmatrix} \dot{d}_i \cos \phi_i \sin \theta_i \\ \dot{d}_i \sin \phi_i \sin \theta_i \\ \dot{d}_i \cos \theta_i \end{bmatrix}, \mathbf{d}_i = \begin{bmatrix} d_i \cos \phi_i \sin \theta_i \\ d_i \sin \phi_i \sin \theta_i \\ d_i \cos \theta_i \end{bmatrix}, \boldsymbol{\omega}_i = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_i \sin \phi_i \\ \dot{\theta}_i \cos \phi_i \\ \dot{\phi}_i \end{bmatrix}$$

Expressando esta equação em sua forma matricial (WANG, Y., 2009), tem-se

$$\mathbf{C}_{bi} \boldsymbol{\lambda}_{bi} = \dot{\mathbf{b}}_i, i = 1, \dots, 6 \quad (\text{A.3})$$

na qual

$$\mathbf{C}_{bi} = \begin{bmatrix} \cos \phi_i \sin \theta_i & -d_i \sin \phi_i \sin \theta_i & d_i \cos \phi_i \cos \theta_i \\ \sin \phi_i \sin \theta_i & d_i \cos \phi_i \sin \theta_i & d_i \sin \phi_i \cos \theta_i \\ \cos \theta_i & 0 & -d_i \sin \theta_i \end{bmatrix}, \boldsymbol{\lambda}_{bi} = \begin{bmatrix} \dot{d}_i \\ \dot{\phi}_i \\ \dot{\theta}_i \end{bmatrix}$$

Resolvendo esta equação para $\boldsymbol{\lambda}_{bi}$, tem-se em evidência os termos \dot{d}_i , $\dot{\phi}_i$ e $\dot{\theta}_i$. Conhecendo estes valores, têm-se as velocidades dos corpos do i -ésimo elo (WANG, Y., 2009),

$$\boldsymbol{\lambda}_{bi} = (\mathbf{C}_{bi})^{-1} \dot{\mathbf{b}}_i, i = 1, \dots, 6. \quad (\text{A.4})$$

Calculando a velocidade inicial para o exemplo dado, obtêm-se os seguintes valores,

$$\dot{\mathbf{d}}(t=0) = [0,2906; -0,0923; 0,9292; 1,0318; -0,3638; -0,0832]^T \text{ m/s};$$

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}(t=0) = [0,7648; 0,6595; -0,3867; 0,0054; -0,3775; -0,6648]^T \text{ rad/s};$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}(t=0) = [-0,4162; -0,5801; -0,1425; -0,0984; -0,6964; -0,5762]^T \text{ rad/s}.$$

Outro exemplo pode ser dado com a trajetória

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} -1,5 \\ 0,0 \\ 1,0 \end{bmatrix} m \text{ e } \phi = \theta = 0 \text{ rad}, \psi = 0,35 \text{sen}(3t) \text{ rad}.$$

A posição inicial da plataforma é dada então por $\mathbf{p} = [p_x \ p_y \ p_z]^T = [-1,5 \ 0,0 \ 1,0]^T m$ e os ângulos de rolagem, arfagem e guinada iniciais são $\phi = \theta = \psi = 0 \text{ rad}$, respectivamente. A velocidade inicial da plataforma é dada por $\dot{\mathbf{p}} = [v_{px} \ v_{py} \ v_{pz}]^T = [0,6 \ 0,6 \ 0,6]^T m/s$ e as velocidades angulares iniciais são $\boldsymbol{\omega}_p = [\omega_{px} \ \omega_{py} \ \omega_{pz}]^T = [\dot{\phi} \ \dot{\theta} \ \dot{\psi}]^T = [0,00 \ 0,00 \ 1,05]^T rad/s$. Calculando os comprimentos iniciais d_i de cada elo e os ângulos iniciais das juntas θ_i e ϕ_i usando A.1 e A.2, obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(t=0) &= [1,2613; 1,2617; 1,2617; 1,2613; 1,2617; 1,2617]^T m; \\ \boldsymbol{\phi}(t=0) &= [-0,7784; -1,3158; 1,3158; 0,7784; -2,8726; 2,8726]^T rad; \\ \boldsymbol{\theta}(t=0) &= [1,0750; 1,0750; 1,0750; 1,0750; 1,0750; 1,0750]^T rad. \end{aligned}$$

Calculando agora as velocidades (lineares e angulares) de cada corpo dos elos, tem-se usando A.3 e A.4, obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{d}}(t=0) &= [-0,5015; 0,5013; -0,5013; 0,5015; -0,5018; 0,5018]^T m/s; \\ \dot{\boldsymbol{\phi}}(t=0) &= [-0,2808; -0,2805; -0,2805; -0,2808; -0,2803; -0,2803]^T rad/s; \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}(t=0) &= [-0,2150; 0,2148; -0,2148; 0,2150; -0,2150; 0,2150]^T rad/s. \end{aligned}$$

A aceleração angular da plataforma móvel pode ser obtida pela derivação da Equação 3.38 em relação ao tempo (TSAI, L. W., 1999), resultando na Equação A.3.

$$\boldsymbol{\omega}_p = \begin{bmatrix} \ddot{\psi}c\phi s\theta - \dot{\psi}\dot{\phi}s\phi s\theta + \dot{\psi}\dot{\theta}c\phi c\theta - \ddot{\theta}s\phi - \dot{\theta}\dot{\phi}c\phi \\ \ddot{\psi}s\phi s\theta + \dot{\psi}\dot{\phi}c\phi s\theta + \dot{\psi}\dot{\theta}s\phi c\theta + \ddot{\theta}c\phi - \dot{\theta}\dot{\phi}s\phi \\ \ddot{\psi}c\theta - \dot{\psi}\dot{\theta}s\theta + \ddot{\phi} \end{bmatrix} \quad (A.3)$$

A aceleração do ponto B_i expressa no referencial fixo (Equação A.4) pode ser encontrada pela derivação no tempo da Equação 3.39 (TSAI, L. W., 1999).

$$\dot{\mathbf{v}}_{bi} = \dot{\mathbf{v}}_p + \dot{\boldsymbol{\omega}}_p \times \mathbf{b}_i + \boldsymbol{\omega}_p \times (\boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{b}_i) \quad (\text{A.4})$$

Escrevendo ${}^i\dot{\mathbf{v}}_{bi}$ em relação ao sistema de referência do i -ésimo membro, tem-se

$${}^i\dot{\mathbf{v}}_{bi} = {}^iR_A \dot{\mathbf{v}}_{bi} \quad (\text{A.5})$$

A aceleração de B_i também pode ser expressa em termos da aceleração angular do i -ésimo membro pela derivada da Equação 3.41 em relação ao tempo (TSAI, L. W., 1999), que resulta na Equação A.6.

$${}^i\dot{\mathbf{v}}_{bi} = \ddot{d}_i {}^i\mathbf{s}_i + d_i {}^i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times {}^i\mathbf{s}_i + d_i {}^i\boldsymbol{\omega}_i \times ({}^i\boldsymbol{\omega}_i \times {}^i\mathbf{s}_i) + 2\dot{d}_i {}^i\boldsymbol{\omega}_i \times {}^i\mathbf{s}_i \quad (\text{A.6})$$

Uma vez que nenhum membro gira em relação ao seu próprio eixo, ${}^i\dot{\omega}_{iz} = 0$. Realizando a multiplicação escalar dos dois lados da equação A.6 por ${}^i\mathbf{s}_i$, obtém-se

$$\ddot{d}_i = {}^i\dot{v}_{biz} + d_i {}^i\boldsymbol{\omega}_i^2 = {}^i\dot{v}_{biz} + \frac{{}^iv_{bix}^2 + {}^iv_{biy}^2}{d_i} \quad (\text{A.7})$$

Multiplicando ambos os lados da Equação A.7 por ${}^i\mathbf{s}_i$, obtém-se a aceleração angular do membro i ,

$${}^i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i = \frac{1}{d_i} {}^i\mathbf{s}_i \times {}^i\dot{\mathbf{v}}_{bi} - \frac{2\dot{d}_i}{d_i} {}^i\boldsymbol{\omega}_i = \frac{1}{d_i} \begin{bmatrix} -{}^i\dot{v}_{biy} + \frac{2}{}^iv_{biz} \frac{{}^iv_{biy}}{d_i} \\ {}^i\dot{v}_{bix} - \frac{2}{}^iv_{biz} \frac{{}^iv_{bix}}{d_i} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

A.3 Soluções analíticas aproximadas da cinemática direta

O problema da cinemática direta consiste em encontrar a posição (vetor \mathbf{p}) e orientação final (matriz de rotação ${}^A R_B$) de um mecanismo a partir dos ângulos (ou deslocamentos lineares, no caso de juntas prismáticas) de entrada. A formulação deste problema leva a um sistema de equações algébricas não lineares acoplado. Usualmente, não há uma solução fechada para este problema no caso de manipuladores paralelos. Métodos por iteração numérica (como o de Newton-Raphson, por exemplo) e soluções polinomiais vêm sendo desenvolvidas (TSAI, L. W., 1999).

O vetor de posição contém três incógnitas escalares, enquanto que a matriz de rotação contém nove incógnitas escalares. No entanto, estas nove incógnitas estão relacionadas com as seis condições de ortogonalidade dadas na Seção 3.2 (Equações 3.4 a 3.9).

Assumindo que a origem O do sistema fixo é localizada no centro da junta esférica fixa A_I e que a origem P do sistema móvel é localizada no centro da junta esférica (ou universal) B_I , tem-se que $a_{Ix} = a_{Iy} = a_{Iz} = 0$ e $b_{Iu} = b_{Iv} = b_{Iw} = 0$. Assim, a Equação 3.11 para $i = 1$ se reduz a

$$d_1^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \quad (\text{A.9})$$

Expandindo a Equação 3.12 para $i = 2, 3, 4, 5, 6$ e depois subtraindo a Equação A.9 de cada uma das equações resultantes, tem-se (TSAI, L. W., 1999)

$$\begin{aligned} & b_{iu}(p_x u_x + p_y u_y + p_z u_z) + b_{iv}(p_x v_x + p_y v_y + p_z v_z) + b_{iw}(p_x w_x + \\ & p_y w_y + p_z w_z) - a_{ix} p_x - a_{iy} p_y - a_{iz} p_z - b_{iu}(a_{ix} u_x - a_{iy} u_y - a_{iz} u_z) - \\ & b_{iv}(a_{ix} v_x - a_{iy} v_y - a_{iz} v_z) - b_{iw}(a_{ix} w_x - a_{iy} w_y - a_{iz} w_z) + k_i = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

para $i = 2, 3, 4, 5, 6$, na qual $k_i = (a_{ix}^2 + a_{iy}^2 + a_{iz}^2 + b_{iu}^2 + b_{iv}^2 + b_{iw}^2 + d_1^2 - d_i^2)/2$.

As Equações A.9 e A.10 para $i = 2$ a 6 , em conjunto com as seis condições de ortogonalidade, resultam em 12 equações e 12 incógnitas. Estas 12 equações podem ser resolvidas para o problema da Plataforma Stewart. Estas equações são extremamente não-lineares. A cinemática direta da Plataforma Stewart possui 40 soluções, o que torna complicada a verificação da continuidade das soluções achadas (TSAI, L. W., 1999).

Assumindo que as seis juntas esféricas da plataforma móvel se situam no plano $u-v$ e que as seis juntas esféricas da plataforma fixa se localizam no plano $x-y$, tem-se que $a_{iz} = b_{iw} = 0$ para $i = 1, 2, \dots, 6$. Assim, a Equação A.10 se reduz a

$$b_{iu}\xi_1 + b_{iv}\xi_2 - a_{ix}p_x - a_{iy}p_y - a_{ix}b_{iu}u_x - a_{iy}b_{iu}u_y - a_{ix}b_{iv}v_x - a_{iy}b_{iv}v_y + k_i = 0 \quad (\text{A.11})$$

para $i = 2, 3, 4, 5, 6$, na qual $k_i = (a_{ix}^2 + a_{iy}^2 + a_{iz}^2 + b_{iu}^2 + b_{iv}^2 + b_{iw}^2 + d_1^2 - d_i^2)/2$ e ξ_1 e ξ_2 são dados por

$$\xi_1 = p_x u_x + p_y u_y + p_z u_z \quad (\text{A.12})$$

$$\xi_2 = p_x v_x + p_y v_y + p_z v_z \quad (\text{A.13})$$

Note que o vetor unitário \mathbf{w} desaparece da Equação A.10. Conseqüentemente, apenas três das seis condições de ortogonalidade são necessárias para a análise. Considerando ξ_1 e ξ_2 como duas variáveis intermediárias, tem-se um sistema 11 equações e 11 incógnitas. Este sistema de equações tem pelo menos 40 soluções da cinemática direta (TSAI, L. W., 1999).

Para evitar o problema associado à existência destas múltiplas soluções, outras configurações desta plataforma já foram propostas. Dentre as propostas mais comuns, está a de usar juntas esféricas concêntricas, tanto na plataforma móvel quanto na base fixa (TSAI, L. W., 1999). A Figura A.1 mostra uma Plataforma Stewart 3-3 na qual os seis membros se encontram em forma de pares em três pontos na plataforma móvel e na base. Este tipo de construção torna a solução da cinemática direta mais viável.

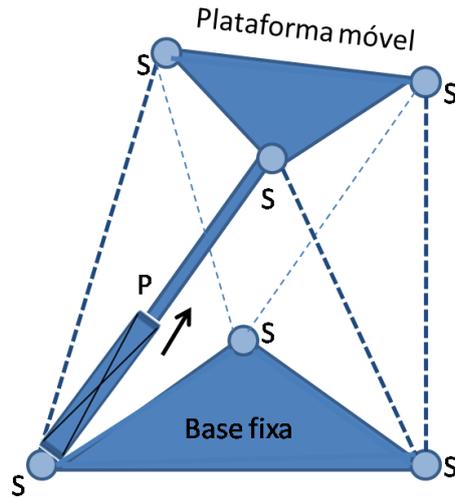


Figura A.1: Plataforma Stewart 3-3.

A Figura A.2 mostra a vista superior desta configuração da Plataforma Stewart. Para a análise, atribui-se um sistema de coordenadas cartesianas à base fixa com sua origem localizada no ponto A_1 , como mostra a Figura A.2. Por causa desta configuração especial, uma vez que o comprimento dos membros é dado, os três triângulos $\Delta A_1A_2B_1$, $\Delta A_2A_3B_2$ e $\Delta A_3A_1B_3$ podem ser unicamente determinados. Com isto, o lugar geométrico de B_i é restrito a um círculo que é centrado em e perpendicular à linha A_iA_{i+1} . Esta restrição é equivalente a um par de juntas RS (rotativa-esférica; TSAI, L. W., 1999). Este mecanismo é equivalente ao mostrado na Figura A.3.

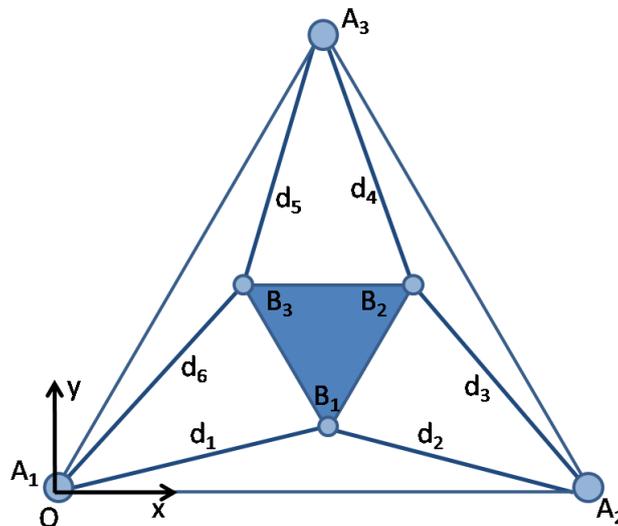


Figura A.2: Vista superior da Plataforma Stewart 3-3.

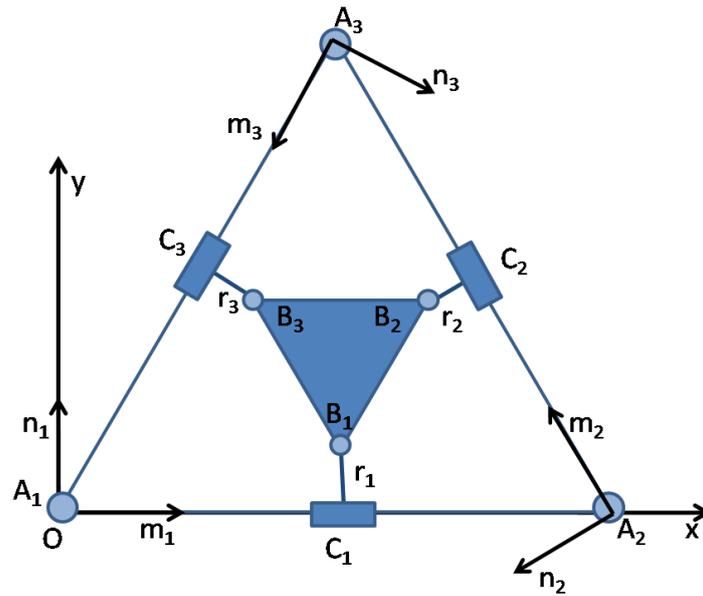


Figura A.3: Mecanismo equivalente.

Para fazer a análise, primeiramente analisa-se o centro C_i e o raio equivalente r_i do círculo no qual o ponto B_i reside. Depois, expressam-se as coordenadas do ponto B_i em termos do ângulo ϕ_i que o triângulo $\Delta A_i A_{i+1} B_i$ faz com o plano da base (TSAI, L. W., 1999):

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{c}_i + r_i(\mathbf{n}_i c\phi_i + \mathbf{k}s\phi_i) \quad (\text{A.14})$$

para $i = 1, 2$ e 3 , na qual \mathbf{b}_i e \mathbf{c}_i indicam os vetores de posição B_i e C_i , respectivamente; \mathbf{n}_i é um vetor unitário que reside no plano de base e é perpendicular à linha $A_i A_{i+1}$ como mostra a Figura A.3; e \mathbf{k} é o vetor unitário que aponta para o sentido positivo na direção do eixo z . Uma vez que as distâncias entre os pontos B_i e B_{i+1} é constante, tem-se

$$[\mathbf{b}_i - \mathbf{b}_{i+1}]^T [\mathbf{b}_i - \mathbf{b}_{i+1}] = h_i^2 \quad (\text{A.15})$$

para $i = 1, 2$ e 3 , na qual $h_i = |B_i \text{ e } B_{i+1}|$. Substituindo a Equação A.14 na A.15, tem-se

$$e_{1i}c\phi_i c\phi_{i+1} + e_{2i}s\phi_i s\phi_{i+1} + e_{3i}c\phi_i + e_{4i}c\phi_{i+1} + e_{5i} = 0 \quad (\text{A.16})$$

para $i = 1, 2$ e 3 , na qual

$$\begin{aligned} e_{1i} &= r_i r_{i+1} \mathbf{n}_i^T \mathbf{n}_{i+1} \\ e_{2i} &= r_i r_{i+1} \\ e_{3i} &= r_i \mathbf{n}_i^T [\mathbf{c}_{i+1} - \mathbf{c}_i] \\ e_{4i} &= -r_{i+1} \mathbf{n}_{i+1}^T [\mathbf{c}_{i+1} - \mathbf{c}_i] \\ e_{5i} &= \frac{h_i^2 - r_i^2 - r_{i+1}^2 - (\mathbf{c}_{i+1} - \mathbf{c}_i)^2}{2} \end{aligned}$$

Com isto, existem 16 soluções que formam 8 pares de soluções espelhadas na base do manipulador (plano definido por A_1 , A_2 e A_3) para a cinemática direta desta configuração da Plataforma Stewart.

A.4 Análise da rigidez

Para realizar a análise da rigidez na Plataforma Stewart será usada a aproximação na qual as juntas esféricas são concêntricas duas a duas (Plataforma Stewart 3-3), como no esquema da Figura A.4. Assim pode-se assumir que os dois conjuntos de juntas esféricas formam dois triângulos equiláteros. Uma vez que a matriz de rigidez depende da posição e orientação da plataforma móvel, assume-se no que segue que a plataforma móvel está localizada numa configuração central, na qual esta não está rotacionada em relação à base fixa e o centroide da plataforma móvel está em uma elevação $\overline{OP} = h$ acima do centroide da base fixa, como mostram as Figuras A.4 e A.5 (TSAI, L. W., 1999).

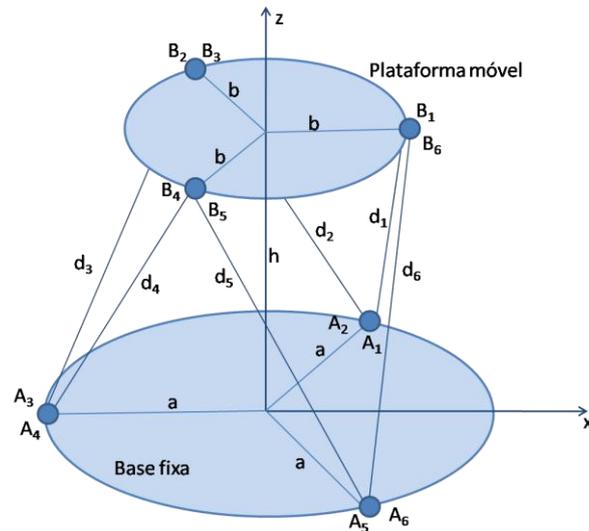


Figura A.4: Esquema da Plataforma Stewart 3-3.

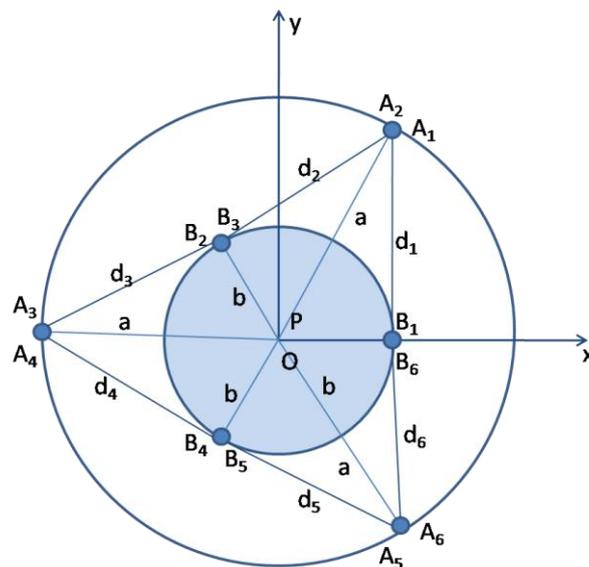


Figura A.5: Vista superior da Plataforma Stewart 3-3.

Da geometria da plataforma mostrada nas Figuras A.4 e A.5 obtêm-se os vetores \mathbf{a}_i , \mathbf{b}_i e \mathbf{d}_i , expressados no sistema fixo (x, y, z) , como a seguir:

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 = \left[\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2}, 0 \right]^T$$

$$\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_4 = [-a, 0, 0]^T$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}_5 = \mathbf{a}_6 &= \left[\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}a}{2}, 0 \right]^T \\
 \mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_6 &= [b, 0, 0]^T \\
 \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_3 &= \left[-\frac{b}{2}, \frac{\sqrt{3}b}{2}, 0 \right]^T \\
 \mathbf{b}_4 = \mathbf{b}_5 &= \left[-\frac{b}{2}, -\frac{\sqrt{3}b}{2}, 0 \right]^T \\
 \mathbf{d}_1 &= \left[\frac{2b-a}{2}, -\frac{\sqrt{3}a}{2}, h \right]^T \\
 \mathbf{d}_2 &= \left[\frac{-b-a}{2}, \frac{\sqrt{3}(b-a)}{2}, h \right]^T \\
 \mathbf{d}_3 &= \left[\frac{-b+2a}{2}, \frac{\sqrt{3}b}{2}, h \right]^T \\
 \mathbf{d}_4 &= \left[\frac{-b+2a}{2}, -\frac{\sqrt{3}b}{2}, h \right]^T \\
 \mathbf{d}_5 &= \left[\frac{-b-a}{2}, \frac{\sqrt{3}(-b+a)}{2}, h \right]^T \\
 \mathbf{d}_6 &= \left[\frac{2b-a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2}, h \right]^T
 \end{aligned}$$

Nesta configuração central todos os membros estão estendidos em comprimentos iguais (i.e., $d_1 = d_2 = \dots = d_6 = d$). Isto leva à relação entre a , b , h e d (Equação A.17),

$$d^2 = a^2 - ab + b^2 + h^2 \quad (\text{A.17})$$

Substituindo as expressões anteriores na jacobiana inversa da Plataforma Stewart, obtém-se

$$J^{-1} = \frac{1}{2d} \begin{bmatrix} 2b - a & -\sqrt{3}a & 2h & 0 & -2bh & -\sqrt{3}ab \\ -b - a & \sqrt{3}(b - a) & 2h & \sqrt{3}bh & bh & \sqrt{3}ab \\ -b + 2a & \sqrt{3}b & 2h & \sqrt{3}bh & bh & -\sqrt{3}ab \\ -b + 2a & -\sqrt{3}b & 2h & -\sqrt{3}bh & bh & \sqrt{3}ab \\ -b - a & \sqrt{3}(-b + a) & 2h & -\sqrt{3}bh & bh & -\sqrt{3}ab \\ 2b - a & \sqrt{3}a & 2h & 0 & -2bh & \sqrt{3}ab \end{bmatrix} \quad (\text{A.18})$$

Substituindo a Equação A.18 e sua transposta na equação da estática da Plataforma Stewart, obtém-se a matriz de rigidez K (Equação A.19),

$$K = \frac{3k}{d^2} \begin{bmatrix} a^2 + b^2 - ab & 0 & 0 & 0 & bh(\frac{a}{2} - b) & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 - ab & 0 & -bh(\frac{a}{2} - b) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2h^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -bh(\frac{a}{2} - b) & 0 & b^2h^2 & 0 & 0 \\ bh(\frac{a}{2} - b) & 0 & 0 & 0 & b^2h^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3a^2b^2}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.19})$$

A submatriz 3 x 3 da parte superior esquerda representa a rigidez translacional, a submatriz 3 x 3 da parte inferior direita representa a rigidez torcional e as outras sub matrizes representam os efeitos de acoplamento entre forças e momentos e entre rotações e translações, respectivamente (TSAI, L. W., 1999).

Na prática, é desejável eliminar os termos de acoplamento. Neste caso, usando $a = 2b$ como condição de projeto, pode-se conseguir isto, como mostra a Equação A.20.

$$K = \frac{3k}{d^2} \begin{bmatrix} 3b^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3b^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2h^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b^2h^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b^2h^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6b^4 \end{bmatrix} \quad (\text{A.20})$$

A observação da Equação A.20 mostra que se $h^2 = 1,5b^2$ a rigidez se torna translacional isotrópica e se $h^2 = 6b^2$ a rigidez se torna torcional isotrópica (TSAI, L. W., 1999). Separando os centros das juntas esféricas, outros parâmetros de projeto da plataforma móvel e da base fixa serão capazes de levar a estas condições de rigidez isotrópicas.

A.5 Dinâmica Inversa

Enquanto que a cinemática dos manipuladores paralelos foi extensivamente estudada nos últimos anos, poucos trabalhos podem ser encontrados sobre sua dinâmica. A existência de diversas cadeias fechadas torna a análise da dinâmica complicada. Várias abordagens já foram usadas, tais como a formulação de Newton-Euler, a formulação Lagrangeana e o princípio do trabalho virtual (TSAI, L. W., 1999).

Primeiramente, serão definidas as posições, velocidades e acelerações dos centros de massa dos elementos de cada um dos membros. Como mostrado na Figura A.6, cada membro consiste de um cilindro (elo 1) e um pistão (elo 2). Denominando-se e_1 a distância entre A_i e o centro de massa do i -ésimo cilindro e e_2 a distância entre B_i e o centro de massa do i -ésimo pistão, os vetores de posição dos centros de massa dos i -ésimos cilindro e pistão, \mathbf{r}_{1i} e \mathbf{r}_{2i} , são

$$\mathbf{r}_{1i} = \mathbf{a}_i + e_1 \mathbf{s}_i \quad (\text{A.21})$$

$$\mathbf{r}_{2i} = \mathbf{a}_i + (d_i - e_2) \mathbf{s}_i \quad (\text{A.22})$$

As velocidades dos centros de massa dos i -ésimos cilindro e pistão, ${}^i\mathbf{v}_{1i}$ e ${}^i\mathbf{v}_{2i}$, são encontradas derivando as Equações A.21 e A.22 em relação ao tempo,

$${}^i\mathbf{v}_{1i} = e_1 {}^i\boldsymbol{\omega}_i \times {}^i\mathbf{s}_i = \frac{e_1}{d_i} \begin{bmatrix} {}^i v_{bix} \\ {}^i v_{biy} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.23})$$

$${}^i\mathbf{v}_{2i} = (d_i - e_2) {}^i\boldsymbol{\omega}_i \times {}^i\mathbf{s}_i + \dot{d}_i {}^i\mathbf{s}_i = \frac{1}{d_i} \begin{bmatrix} (d_i - e_2) {}^i v_{bix} \\ (d_i - e_2) {}^i v_{biy} \\ d_i {}^i v_{biz} \end{bmatrix} \quad (\text{A.24})$$

As acelerações dos centros de massa dos i -ésimos cilindro e pistão são encontradas derivando as Equações A.23 e A.24 em relação ao tempo (Equações A.25 e A.26).

$${}^i\dot{\mathbf{v}}_{1i} = e_1 {}^i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times {}^i\mathbf{s}_i + e_1 {}^i\boldsymbol{\omega}_i \times ({}^i\boldsymbol{\omega}_i \times {}^i\mathbf{s}_i) = \frac{e_1}{d_i} \begin{bmatrix} {}^i\dot{v}_{bix} - \frac{2 {}^i v_{biz} {}^i v_{bix}}{d_i} \\ {}^i\dot{v}_{biy} - \frac{2 {}^i v_{biz} {}^i v_{biy}}{d_i} \\ -\frac{{}^i v_{bix}^2 + {}^i v_{biy}^2}{d_i} \end{bmatrix} \quad (\text{A.25})$$

$${}^i\dot{\mathbf{v}}_{2i} = \ddot{d}_i {}^i\mathbf{s}_i + (d_i - e_2) {}^i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times {}^i\mathbf{s}_i + (d_i - e_2) {}^i\boldsymbol{\omega}_i \times ({}^i\boldsymbol{\omega}_i \times {}^i\mathbf{s}_i) + 2\dot{d}_i {}^i\boldsymbol{\omega}_i \times {}^i\mathbf{s}_i = \frac{1}{d_i} \begin{bmatrix} (d_i - e_2) {}^i\dot{v}_{bix} + \frac{2e_2 {}^i v_{biz} {}^i v_{bix}}{d_i} \\ (d_i - e_2) {}^i\dot{v}_{biy} + \frac{2e_2 {}^i v_{biz} {}^i v_{biy}}{d_i} \\ d_i {}^i\dot{v}_{biz} + \frac{e_2({}^i v_{bix}^2 + {}^i v_{biy}^2)}{d_i} \end{bmatrix} \quad (\text{A.26})$$

Para analisar a dinâmica do manipulador o manipulador será decomposto em uma plataforma móvel e seis cadeias abertas (membros). O Diagrama de Corpo Livre de um membro do manipulador é mostrado na Figura A.6. O cilindro e o pistão de cada membro serão decomposto em um subsistema. A formulação da dinâmica será realizada diretamente para cada subsistema. Assim, as forças e momentos de reação entre o cilindro e o pistão não entrarão nas equações de movimento. A equação de movimento de Euler, escrita em relação ao ponto A é

$${}^i \mathbf{n}_i^A = \frac{d}{dt} ({}^i \mathbf{h}_i^A) \quad (\text{A.27})$$

na qual ${}^i \mathbf{n}_i^A$ é o momento resultante exercido no i -ésimo membro em relação ao ponto A_i e ${}^i \mathbf{h}_i^A$ é a quantidade de movimento angular do cilindro e do pistão combinados em relação ao mesmo ponto. Este quantidade de movimento angular combinado é dado por

$${}^i \mathbf{h}_i^A = m_1 e_1 ({}^i \mathbf{s}_i \times {}^i \mathbf{v}_{1i}) + m_2 (d_i - e_2) ({}^i \mathbf{s}_i \times {}^i \mathbf{v}_{2i}) + {}^i \mathbf{h}_{1i}^C + {}^i \mathbf{h}_{2i}^C \quad (\text{A.28})$$

na qual

$$\begin{cases} {}^i \mathbf{h}_{1i}^C = {}^i I_{1i} {}^i \boldsymbol{\omega}_i \\ {}^i \mathbf{h}_{2i}^C = {}^i I_{2i} {}^i \boldsymbol{\omega}_i \end{cases}$$

são as quantidades de movimento angulares do cilindro e do pistão em relação aos seus respectivos centros de massa e ${}^i I_{1i}$ e ${}^i I_{2i}$ são as matrizes dos momentos de inércia do cilindro e do pistão em relação aos seus respectivos centros de massa.

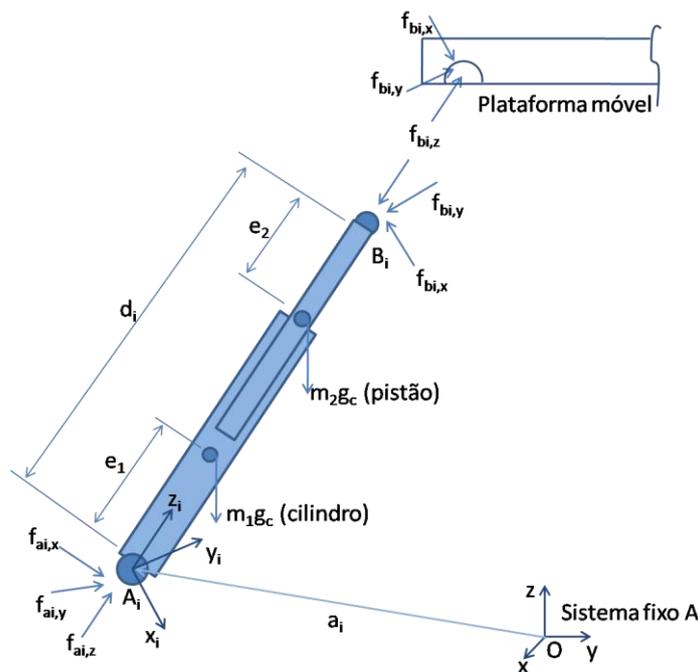


Figura A.6: Diagrama de Corpo Livre de um membro da plataforma.

Diferenciando a Equação A.28 em relação ao tempo, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}({}^i \mathbf{h}_i^A) &= m_1 e_1 ({}^i \mathbf{s}_i \times {}^i \dot{\mathbf{v}}_{1i}) + m_2 (d_i - e_2) ({}^i \mathbf{s}_i \times {}^i \dot{\mathbf{v}}_{2i}) + {}^i I_{1i} {}^i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \\ & {}^i \boldsymbol{\omega}_i \times ({}^i I_{1i} {}^i \boldsymbol{\omega}_i) + {}^i I_{2i} {}^i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + {}^i \boldsymbol{\omega}_i \times ({}^i I_{2i} {}^i \boldsymbol{\omega}_i) \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Os momentos exercidos no membro i em relação a A_i são devidos à força gravitacional exercida nos centros de massa dos dois elos e às forças de reação exercidas na junta esférica B_i . Uma vez que a aceleração da gravidade \mathbf{g} é definida no sistema fixo, esta deve ser transformada para ser representada no sistema de referência do membro. De acordo com a Figura A.6, tem-se que ${}^i \mathbf{f}_{bi} = [{}^i f_{bix}, {}^i f_{biy}, {}^i f_{biz}]^T$ é a força do i -ésimo membro que atua na plataforma móvel e ${}^A \mathbf{g} = [0, 0, -g_c]^T$ é a aceleração da gravidade. Então, o momento resultante que age no i -ésimo membro sobre o ponto A_i é dado por

$$\begin{aligned} {}^i \mathbf{n}_i^A &= d_i {}^i \mathbf{s}_i \times (-{}^i \mathbf{f}_{bi}) + [m_1 e_1 + m_2 (d_i - e_2)] ({}^i \mathbf{s}_i \times {}^i R_A {}^A \mathbf{g}) = \\ & \begin{bmatrix} d_i {}^i f_{biy} \\ -d_i {}^i f_{bix} + m_1 e_1 g_c s\theta_i + m_2 (d_i - e_2) g_c s\theta_i \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

As equações dinâmicas do movimento do i -ésimo membro são obtidas substituindo as Equações A.29 e A.30 na A.27. Estas equações de movimento podem ser simplificadas assumindo que os membros são feitos de hastes cilíndricas esbeltas. Usando o fato de que os produtos de inércia são todos iguais a zero, I_{iz} é insignificamente pequeno e ${}^i \omega_{iz} = 0$, obtém-se

$$\begin{aligned} {}^i f_{bix} &= \frac{1}{d_i} [m_1 e_1 g_c s\theta_i + m_2 (d_i - e_2) g_c s\theta_i - m_1 e_1 {}^i \dot{v}_{1ix} - m_2 (d_i - \\ & e_2) {}^i \dot{v}_{2ix} - I_{1iy} {}^i \dot{\omega}_{iy} - I_{2iy} {}^i \dot{\omega}_{iy}] \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

$$\begin{aligned} {}^i f_{biy} &= \frac{1}{d_i} [-m_1 e_1 {}^i \dot{v}_{1iy} - m_2 (d_i - e_2) {}^i \dot{v}_{2iy} + I_{1ix} {}^i \dot{\omega}_{ix} + I_{2ix} {}^i \dot{\omega}_{ix}] \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

na qual I_{jix} e I_{jij} são as componentes x e y dos momentos de inércia principais do cilindro ($j = 1$) e do pistão ($j = 2$) sobre seus respectivos centros de massa e expressados no sistema de referência do i -ésimo membro.

Lembrando que, como as forças de reação, ${}^i\mathbf{f}_{bi}$, são expressas no sistema de referência do i -ésimo membro, estas devem ser transformadas para o sistema fixo A ou o sistema móvel B antes de serem substituídas nas equações de movimento da plataforma móvel. Aplicando a equação de Newton de movimento à plataforma móvel e expressando a equação resultante no sistema fixo, tem-se:

$$\sum_{i=1}^6 {}^A\mathbf{f}_{bi} + m_p {}^A\mathbf{g} = m_p {}^A\dot{\mathbf{v}}_p \quad (\text{A.33})$$

na qual

$${}^A\mathbf{f}_{bi} = {}^A R_i {}^i\mathbf{f}_{bi} \quad (\text{A.34})$$

denota a força de reação exercida na plataforma móvel pelo i -ésimo membro na junta esférica B_i e expressa no sistema fixo A . Substituindo a matriz de rotação na Equação A.34 e a equação resultante na A.33, obtém-se

$$\sum_{i=1}^6 ({}^i f_{bix} c\phi_i c\theta_i - {}^i f_{biy} s\phi_i + {}^i f_{biz} c\phi_i s\theta_i) = m_p \dot{v}_{px} \quad (\text{A.35})$$

$$\sum_{i=1}^6 ({}^i f_{bix} s\phi_i c\theta_i + {}^i f_{biy} c\phi_i + {}^i f_{biz} s\phi_i s\theta_i) = m_p \dot{v}_{py} \quad (\text{A.36})$$

$$\sum_{i=1}^6 (-{}^i f_{bix} s\theta_i + {}^i f_{biz} c\theta_i) = m_p \dot{v}_{px} + m_p g_c \quad (\text{A.37})$$

O momento resultante, ${}^B\mathbf{n}_p$, obtido em relação ao centro de massa da plataforma móvel e expresso no sistema móvel B é

$${}^B\mathbf{n}_p = \sum_{i=1}^6 {}^B\mathbf{b}_i \times {}^B\mathbf{f}_{bi} \quad (\text{A.38})$$

na qual

$${}^B \mathbf{f}_{bi} = {}^B R_A {}^A \mathbf{f}_{bi} = {}^B R_i {}^i \mathbf{f}_{bi} \quad (\text{A.39})$$

denota a força de reação exercida na plataforma móvel pelo i -ésimo membro na junta esférica B_i expressa no sistema de referência B . Definindo as equações de movimento de Euler como

$$\begin{cases} n_x = I_{xx} \dot{\omega}_x - \omega_y \omega_z (I_{yy} - I_{zz}), \\ n_y = I_{yy} \dot{\omega}_y - \omega_z \omega_x (I_{zz} - I_{xx}), \\ n_z = I_{zz} \dot{\omega}_z - \omega_x \omega_y (I_{xx} - I_{yy}) \end{cases} \quad (\text{A.40})$$

e assumindo que u , v e w são os eixos principais da plataforma móvel, substituindo a Equação A.38 nas Equações A.40, usando o fato de que os produtos de inércia são todos iguais a zero e que $I_{pu} = I_{pv}$, obtém-se

$$\sum_{i=1}^6 b_{iv} (a_{31} {}^i f_{bix} + a_{32} {}^i f_{biy} + a_{33} {}^i f_{biz}) = I_{pu} \dot{\omega}_{pu} - \omega_{pv} \omega_{pw} (I_{pv} - I_{pw}) \quad (\text{A.41})$$

$$\sum_{i=1}^6 -b_{iu} (a_{31} {}^i f_{bix} + a_{32} {}^i f_{biy} + a_{33} {}^i f_{biz}) = I_{pv} \dot{\omega}_{pv} - \omega_{pw} \omega_{pu} (I_{pw} - I_{pu}) \quad (\text{A.42})$$

$$\sum_{i=1}^6 [b_{iu} (a_{21} {}^i f_{bix} + a_{22} {}^i f_{biy} + a_{23} {}^i f_{biz}) - b_{iv} (a_{11} {}^i f_{bix} + a_{12} {}^i f_{biy} + a_{13} {}^i f_{biz})] = I_{pw} \dot{\omega}_{pw} \quad (\text{A.43})$$

nas quais a_{ij} são os elementos (i, j) de ${}^B R_i$, ${}^B \boldsymbol{\omega}_p = [\omega_{pu}, \omega_{pv}, \omega_{pw}]^T$ é a velocidade angular da plataforma móvel expressa no sistema de referência B e I_{pu} , I_{pv} e I_{pw} são os componentes u , v e w dos momentos de inércia principais da plataforma móvel em relação ao seu centro de massa e expressa no sistema de referência B .

Portanto, uma vez determinados ${}^i f_{bix}$ e ${}^i f_{biy}$ pelas equações A.31 e A.32, as equações A.35 a A.37 e A.41 a A.43 passam a constituir um sistema de seis equações lineares com seis incógnitas, ${}^i f_{biz}$ para $i = 1, 2, \dots, 6$. Estas seis equações podem ser resolvidas pelo método de eliminação de Gauss, por exemplo.

A força de atuação τ_i pode ser obtida somando todas as forças que atuam no i -ésimo pistão ao longo do eixo z_i (Equação A.44).

$$\tau_i = {}^i f_{biz} + m_2 g_c c \theta_i + m_2 {}^i \dot{v}_{2iz} \quad (\text{A.44})$$

Note que o momento na Equação A.40 é obtido em relação ao sistema fixo da junta esférica A_i . Assim, as forças de reação \mathbf{f}_{ai} nas juntas esféricas fixas não entram na equação de movimento. Estas forças de reação podem ser encontradas pela formulação da equação de Newton um membro por vez, como mostra a Equação A.45.

$${}^i \mathbf{f}_{ai} + {}^i \mathbf{f}_{bi} + (m_1 + m_2) {}^i R_A {}^A \mathbf{g} = m_1 {}^i \dot{\mathbf{v}}_{1i} + m_2 {}^i \dot{\mathbf{v}}_{2i} \quad (\text{A.45})$$

Apesar de não terem sido usados neste trabalho, os resultados apresentados neste Apêndice possibilitarão o desenvolvimento do modelo dinâmico baseado nas matrizes jacobianas direta e inversa e nas matrizes de seus derivativos em trabalhos futuros.

Apêndice B

Projeto e construção da Plataforma Stewart em escala

B.1 Introdução

Como descrito no Capítulo 3, a Plataforma Stewart é constituída de uma base fixa e uma plataforma móvel, que são acoplados através de juntas universais e esféricas por seis membros constituídos pelos atuadores. No caso do controle via transdutores de deslocamento linear, estes também constituem os membros, atuando em paralelo com os atuadores. Já no caso do controle via central inercial, esta é fixada na plataforma móvel.

Neste Apêndice são apresentados os modelos em CAD destes elementos que constituem o sistema, são descritos os processos de especificação e de fabricação envolvidos. São também apresentados os elementos do sistema de atuação, acionamento e controle. Além disso, são apresentadas fotos da Plataforma Stewart construída.

B.2 Elementos mecânicos e transdutores

O projeto de todos os elementos mecânicos foi desenvolvido usando a ferramenta para CAD *SolidWorks*. Neste programa foram feitos modelos tridimensionais em ambiente virtual de todas as peças que compõem a Plataforma Stewart. No projeto mecânico desta estrutura, podem-se dividir os componentes em dois grupos: os componentes especificados e adquiridos para atender os requisitos do projeto e os componentes fabricados para realizar a montagem da Plataforma. A especificação dos componentes é, na verdade, um processo um pouco mais complexo do que o apresentado no Item B.2.1, pois este processo envolve pesquisa de mercado, avaliação de custos, avaliação de tempos de entrega, estudo de compatibilidade com outros elementos presentes no laboratório

no qual o projeto foi desenvolvido, além de outros detalhes. Nestes itens, é feito um resumo do processo de especificação focado no atendimento aos requisitos básicos do projeto.

B.2.1 Elementos especificados

Foram especificados os componentes adquiridos para ser montados junto aos elementos fabricados. Estes componentes são os atuadores, as juntas universais, as juntas esféricas, os transdutores de deslocamento linear e a central inercial.

O elemento chave para a especificação dos componentes do sistema neste projeto é o atuador, pois a ele estão atreladas as variáveis de deslocamento e força de cada um dos membros da cadeia cinemática/dinâmica. Para especificar a geometria básica do atuador (comprimento recolhido e curso) foram avaliados os valores das variáveis de deslocamento necessárias (d_1, d_2, \dots, d_6) para se obter desejadas posições e orientações da plataforma móvel ($u, v, w, \varphi, \theta, \psi$). Para isto, fez-se uma série de estimativas do tamanho da base fixa e da plataforma móvel respeitando o requisito básico de se construir um equipamento em escala (principalmente por motivos de custo e facilidade de transporte). Com esta geometria da base e do topo foram calculados os deslocamentos necessários (detalhes do procedimento usado no cálculo nos Capítulos 3 e 5). Com estes deslocamentos, foram avaliados os atuadores de mercado que atenderiam aos comprimentos achados (lembrando da existência de componentes intermediários de fixação, para obter uma melhor estimativa do comprimento final do elo).

Com o comprimento e o curso especificados, foi necessário estimar a força necessária ao atuador para realizar simulações de posicionamentos com elementos de certa massa presos no centro do topo da plataforma móvel. Usando um procedimento semelhante ao da escolha da geometria (desta vez baseado na estática da Plataforma Stewart) foi especificada a força mínima necessária para mover esta massa em certas posições e com certas velocidades. Um estudo dos componentes pneumáticos de mercado (atuadores, válvulas, conexões, compressores de ar, entre outros) levou a estabelecer uma pressão de alimentação

do sistema próxima de 0,5 MPa, devido ao fato da maioria dos componentes com geometria próxima à desejada sofrerem avarias se submetidos a pressões maiores que esta. Com este valor de pressão, chega-se ao valor da área mínima do pistão do atuador. Com isto, foi especificado o atuador de dupla ação pneumático marca SMC, modelo C85 N16-50 (dupla ação, 50 mm de curso e 16 mm de diâmetro interno). A Figura B.1 mostra uma imagem do atuador e a Figura B.2 mostra o modelo em CAD do mesmo.



Figura B.1: Atuador pneumático SMC C85 N16-50.



Figura B.2: Desenho em CAD do atuador SMC CD85 N16-50 R.

Como descrito na Seção 3.1, são usadas na plataforma 6 juntas esféricas e 6 juntas universais, formando uma configuração U-P-S, para eliminar graus de liberdade passivos. As Figuras B.3.a e B.3.b mostram a imagem da junta esférica especificada (marca McMaster-Carr, modelo 8412K11) e seu desenho em CAD, respectivamente. Já as Figuras B.4.a e B.4.b mostram a imagem da junta universal

especificada (marca McMaster-Carr, modelo 6443K46) e seu desenho em CAD, respectivamente.

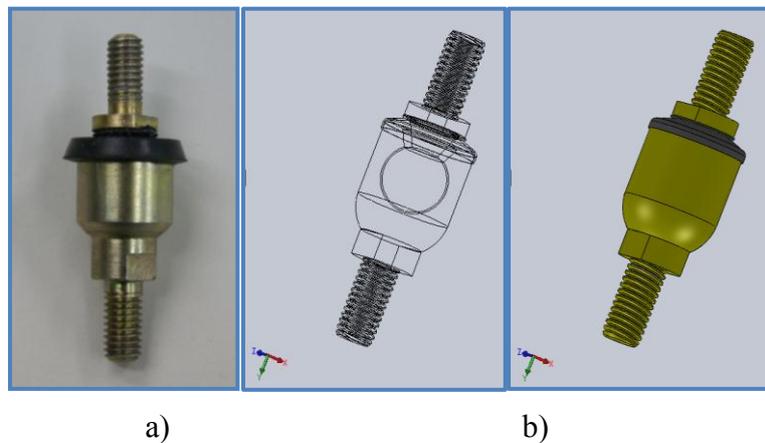


Figura B.3: Junta esférica 8412K11 (a) e seu desenho em CAD (b).

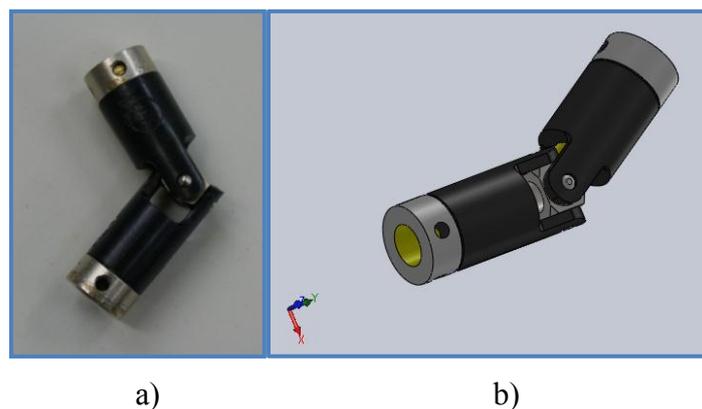


Figura B.4: Junta universal 6443K46 (a) e seu desenho em CAD (b).

Para a medição do deslocamento linear do atuador pneumático para o fechamento da malha em uma das rotinas de controle da Plataforma Stewart foi especificado um transdutor de deslocamento linear resistivo (comparador modelo PY2 – C – 50, marca Gefran) com uma faixa nominal de escala compatível com o curso máximo do atuador (50 mm). Este, quando usada uma estratégia de controle convencional, será montado em paralelo com o atuador para realizar a medição das variáveis d_i , com $i = 1$ a 6. A Figura B.5 mostra uma imagem dos seis transdutores e a Figura B.6 mostra o modelo em CAD do mesmo.



Figura B.5: Transdutores de deslocamento linear PY2 – C - 50.

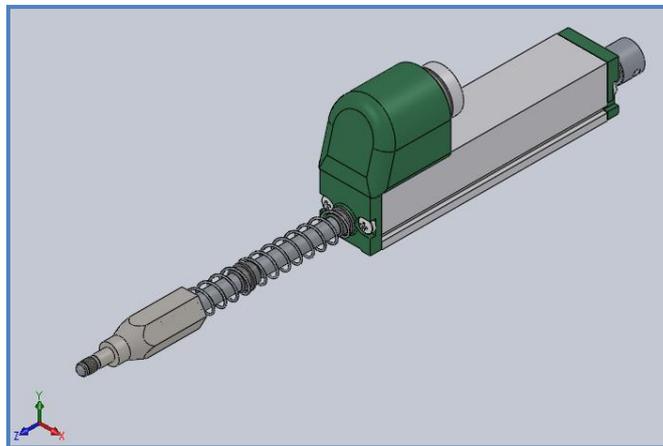


Figura B.6: Desenho em CAD do transdutor de deslocamento linear.

Para a medição das acelerações lineares e velocidades angulares da plataforma móvel para o fechamento da malha em uma das rotinas de controle da Plataforma Stewart foi especificado uma central inercial (central inercial modelo Atomic IMU 6DOF v4, marca Sparkfun) que é constituída de acelerômetros triaxiais e girômetros triaxiais. Este, na estratégia não convencional de controle estudada (Capítulo 4), será montado junto ao centro de massa da plataforma móvel para realizar a medição das variáveis $\ddot{u}, \ddot{v}, \ddot{w}, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$. A Figura B.7 mostra uma imagem desta central inercial e a Figura B.8 mostra o modelo em CAD do mesmo.



Figura B.7: Central inercial Sparkfun Atomic IMU.

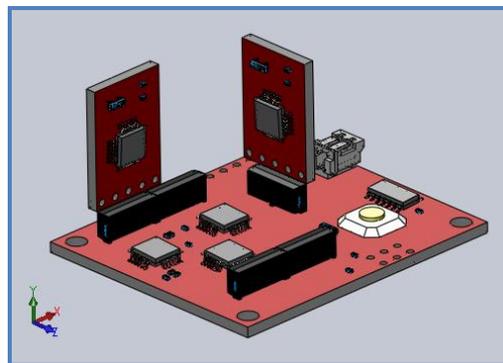


Figura B.8: Desenho em CAD da central inercial Sparkfun Atomic IMU.

B.2.2 Elementos fabricados

A base fixa e a plataforma móvel foram projetadas de forma que os ângulos dos elos com a base fixa (θ_i e φ_i) fosse de 60° quando os atuadores estiverem no ponto mínimo de seu curso. Ao invés de usar uma geometria hexagonal para as estruturas da base e do topo, como é comum neste tipo de estrutura, foi usada uma geometria circular para melhorar a distribuição de massa nos elos da Plataforma. O material usado foi o alumínio série 2048 (duralumínio ou alumínio aeronáutico), por apresentar boas propriedades mecânicas (Módulo de elasticidade = 70 GPa; Tensão de escoamento = 415 MPa; Tensão de ruptura = 455 MPa; Tenacidade = $33 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$; Dureza = 122 HB – massa de 500 kg, esfera de 10 mm; fonte: matweb.com, 2011) e uma massa específica relativamente baixa ($2,75 \text{ g/cm}^3$; fonte: matweb.com, 2011). As Figuras B.9 e B.10 mostram os desenhos em CAD da base fixa e da base móvel, respectivamente.

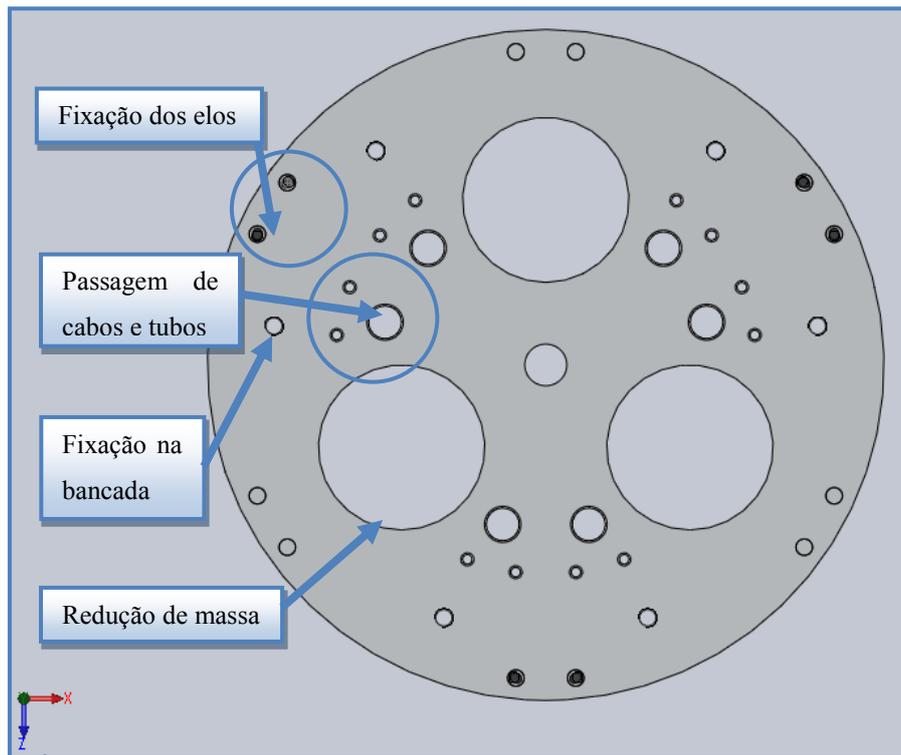


Figura B.9: Desenho em CAD da base fixa.

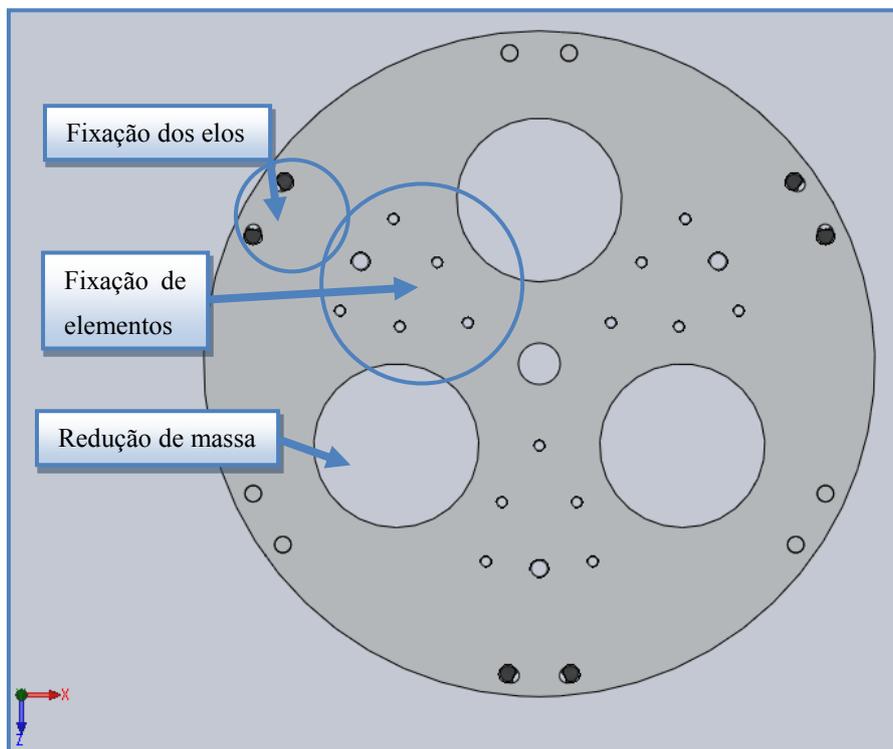


Figura B.10: Desenho em CAD da plataforma móvel.

O diagrama apresentado na Figura B.11 mostra um esquema da montagem dos componentes de um dos elos da Plataforma Stewart (sem o transdutor de deslocamento linear).

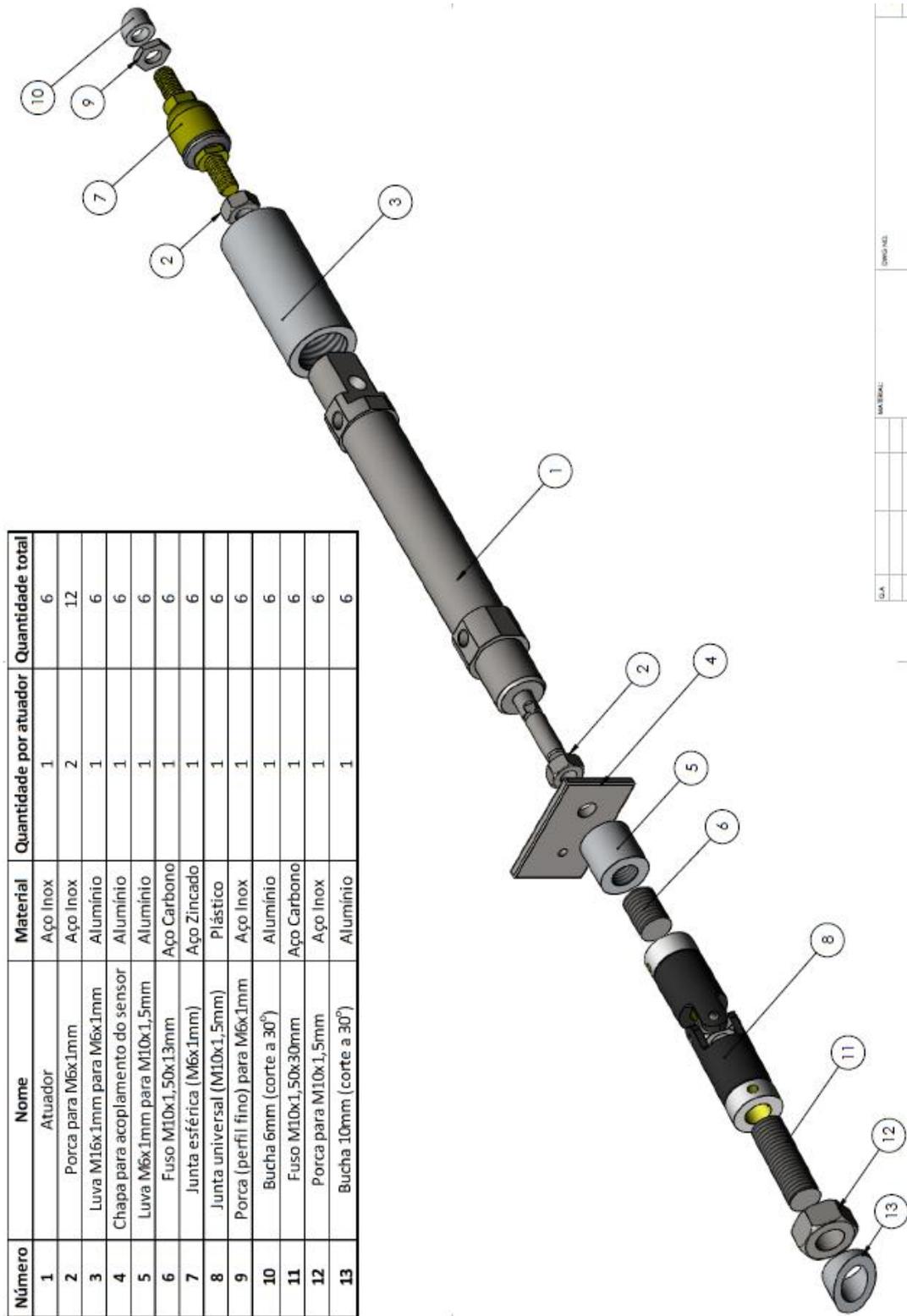


Figura B.11: Montagem de um elo.

B.3 Elementos pneumáticos

Um sistema como o que será desenvolvido é composto basicamente pelo compressor, que é responsável pelo fornecimento de vazão de fluido para a transmissão de potência, por válvulas eletropneumáticas e também pelos atuadores, que são os responsáveis por converter a potência pneumática em potência mecânica. Transforma a vazão do fluido em velocidade de massa e, sendo de dupla ação, pode atuar tanto num sentido como no outro.

Existe uma válvula eletropneumática desta para cada atuador do sistema. Neste mesmo sistema também se tem filtros cuja função é impedir a contaminação do fluido de trabalho por partículas sólidas e válvulas que cumprem diversas funções como direcionar o fluxo, controle de pressão, controle de vazão e retenção do fluxo. Existem ainda os acumuladores que impedem variações bruscas de pressão na linha. As Figuras B.12 e B.13 mostram possíveis arquiteturas para este tipo de sistema.

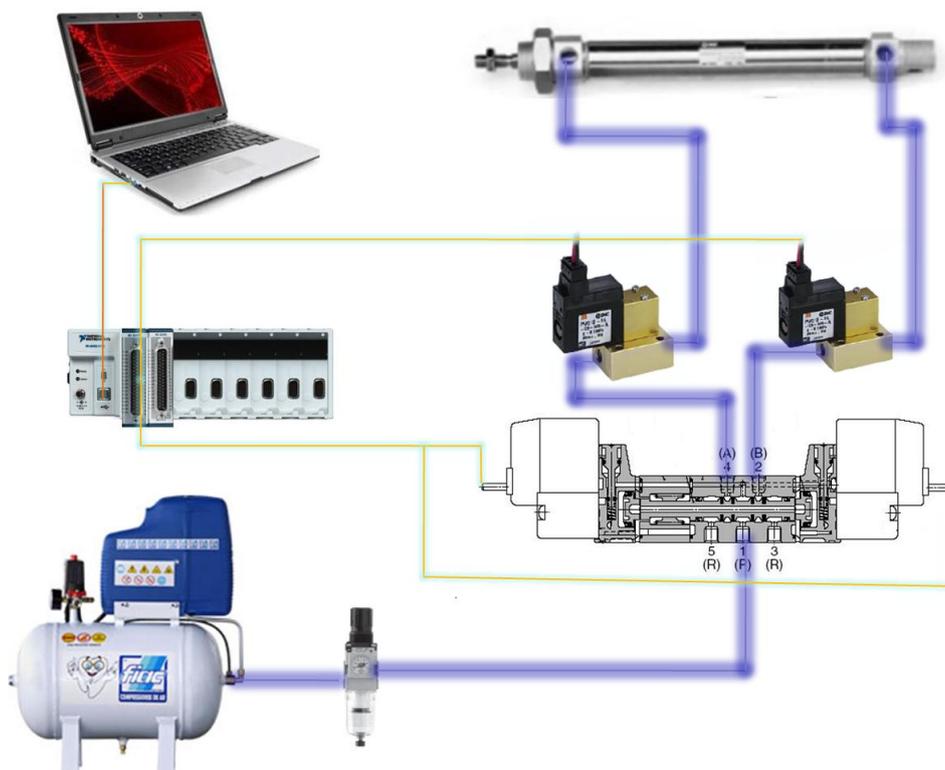


Figura B.12: Esquema do sistema pneumático.

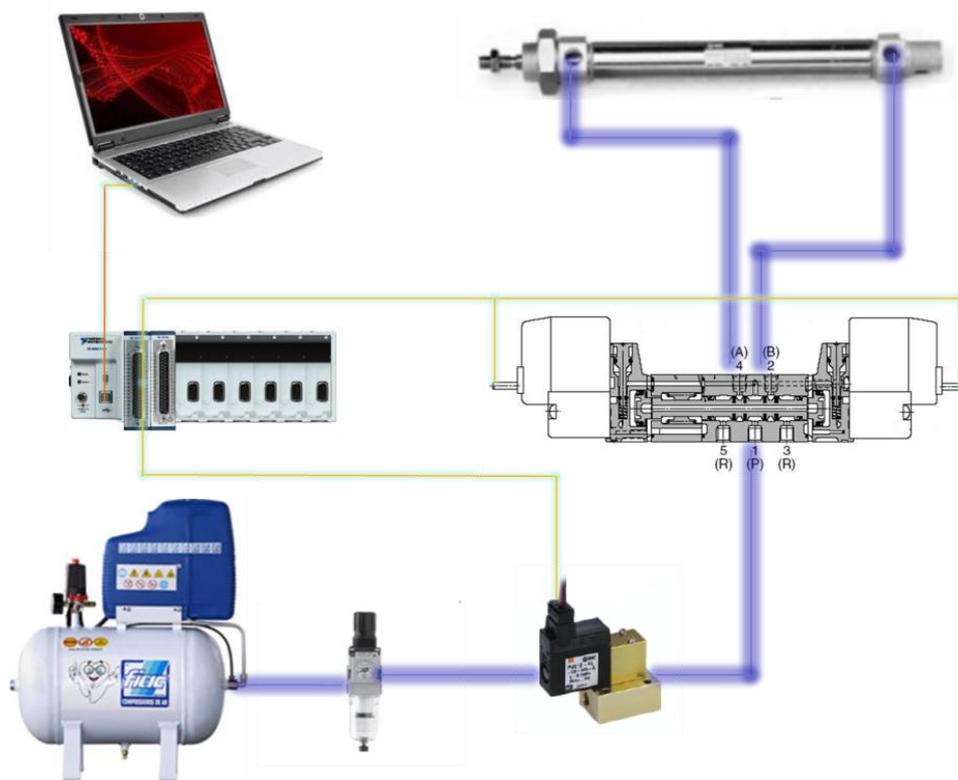


Figura B.13: Esquema do sistema pneumático – arquitetura alternativa.

Na arquitetura apresentada na Figura B.12 tem-se o controle de vazão em cada uma das linhas de alimentação das câmaras do cilindro pneumático. Já na arquitetura da Figura B.13 este controle é exercido na linha de alimentação da válvula bidirecional, restringindo as possibilidades de controle de vazão nas câmaras, porém, tornando a sincronização do sistema mais fácil. Inicialmente, a arquitetura com duas válvulas proporcionais foi considerada para construção, mas a substituição de arquitetura é um processo simples, que dependerá fundamentalmente do ajuste da rotina de controle implementada no sistema.

A válvula reguladora de pressão usada na saída do compressor tem a função de manter constante a pressão no sistema. Ela somente funciona quando a pressão a ser regulada (pressão secundária) for inferior que a pressão de alimentação da rede (pressão primária). Assim essa válvula pode reduzir a pressão, mas jamais aumentá-la. A Figura B.14 descreve uma válvula reguladora juntamente com o seu símbolo.

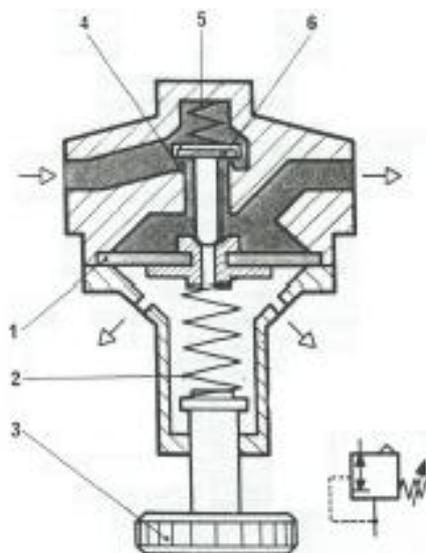


Figura B.14: Válvula reguladora de pressão.

O seu funcionamento ocorre da seguinte forma. Se a pressão secundária diminui em relação a um valor especificado, a mola 2 empurra o êmbolo 6 que abre a comunicação com a pressão primária. Se a pressão secundária aumenta, em relação a um valor especificado (por exemplo, devido a um excesso de carga no atuador) então a membrana 1 é atuada pressionando a mola 2 e o êmbolo 6 fecha a comunicação até que a pressão secundária diminua. Se a pressão secundária aumentar demais, então além de ocorrer a situação anterior, a membrana 1 se separa do êmbolo 6, abrindo a comunicação com os furos de exaustão, ocorrendo o escape de ar, o que reduz a pressão secundária. O parafuso 3 permite regular a rigidez da mola 2 e, portanto, a pressão secundária (NELLI SILVA, E. C., 2002).

Para efetuar o controle de posição e velocidade do atuador, será usada uma montagem acoplando duas válvulas proporcionais a uma válvula solenóide bidirecional. As válvulas proporcionais recebem um sinal de corrente elétrica e a vazão de saída é proporcional a este sinal (Figura B.17.a e b). A válvula bidirecional direcionará o fluxo de ar sem controle da vazão desejada. O controle de vazão será efetuado pela válvula proporcional que pode vir em seguida, em cada saída da válvula bidirecional, como mostra o esquema da Figura B.12 ou na entrada da válvula bidirecional, como apresenta a Figura B.13.

As válvulas direcionais têm a função de comandar a partida, a parada e o sentido de movimento do atuador. Neste sistema, as válvulas solenóides

(eletromecânicas) são comandadas por um micro-controlador, uma placa na qual a rotina de programação é praticada. O sistema pneumático é alimentado por um compressor cuja pressão de alimentação pode ser de até aproximadamente 5 bar, pois mais do que isto, pode danificar alguns dos componentes do sistema (ALBUQUERQUE, A. N., 2009).

Para esta plataforma, foram usadas válvulas solenóides 5/3 vias (5 vias e 3 posições; Figuras B.15) com posição central bloqueada para melhorar seu controle e posicionamento. Assim, dando os pulsos de maneira correta, pode-se parar a haste do pistão em posições intermediárias. Por exemplo, um comando aplicado a um dos lados da válvula, abre a via que libera a passagem de ar pressurizado do compressor para um dos lados do pistão, fazendo este se mover. Se no meio do percurso a passagem para o outro lado for acionada, os dois lados do pistão estarão pressurizados e assim ele ficará na posição desejada (ALBUQUERQUE, A. N., 2009).

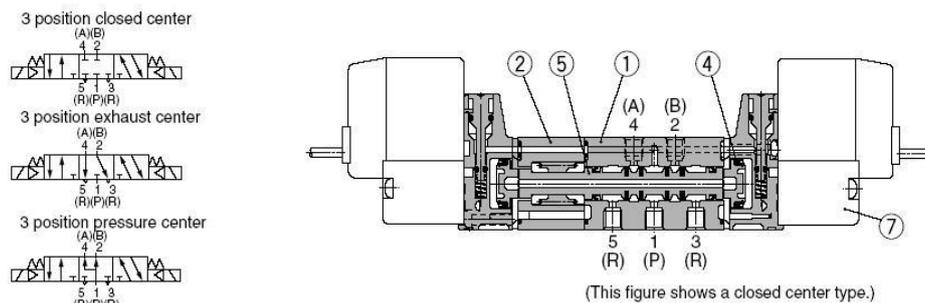


Figura B.15: Válvula 5/3 vias com centro fechado.

O circuito pneumático da Plataforma Stewart ficou como mostrado na Figura B.16 (sem as válvulas proporcionais). A numeração dos componentes segue o seguinte padrão: os elementos atuadores recebem seus números na seqüência 1.0, 2.0, *etc.* Para as válvulas, o primeiro número está relacionado à qual elemento de trabalho elas influem. No caso, como são válvulas de comando, que acionam diretamente o pistão, recebem o número 1 à direita do ponto. Para os elementos de regulagem, o número à direita do ponto é um número par maior que zero. Para os elementos de alimentação o primeiro número é 0 e o número depois do ponto corresponde à seqüência com que eles aparecem (NELLI SILVA, E. C., 2002). A Figura B.18 apresenta o circuito pneumático do conjunto de válvulas.

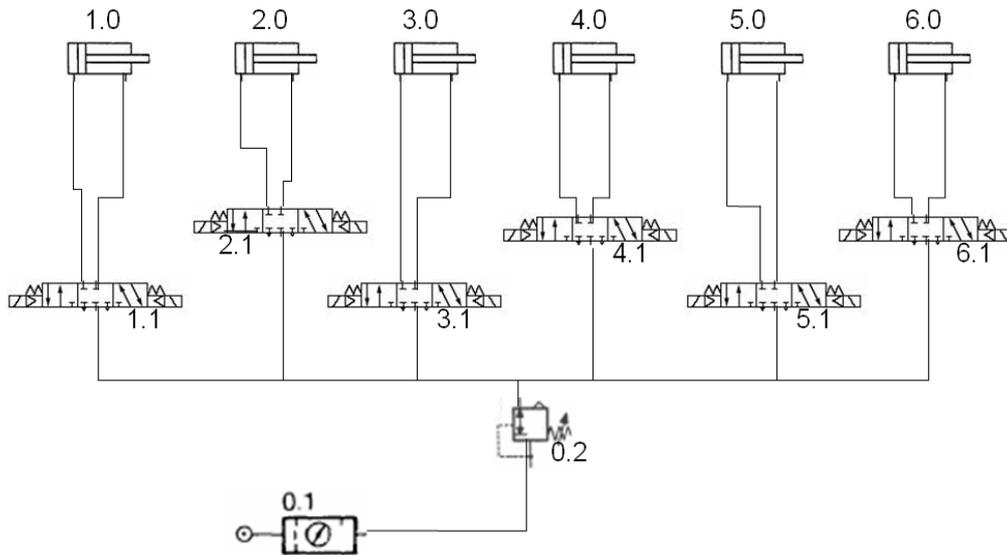


Figura B.16: Circuito pneumático da primeira versão da Plataforma Stewart construída.

PUC-Rio - Certificação Digital N° 0921499/CC

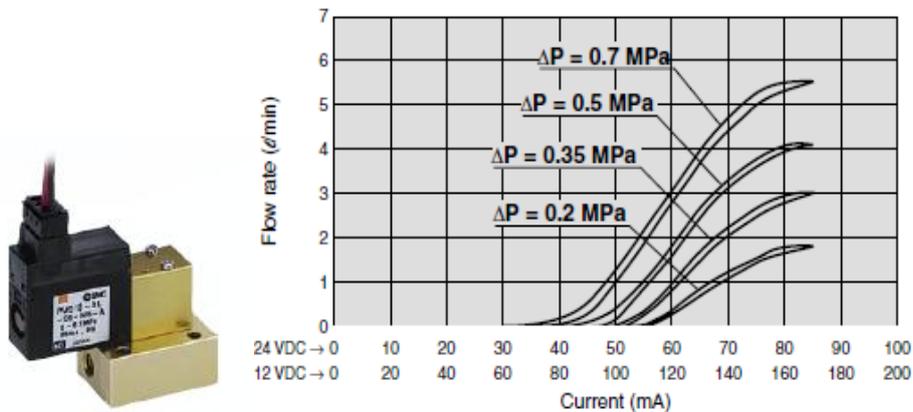


Figura B.17: (a) Válvula proporcional; (b) Curva corrente elétrica x vazão da válvula proporcional.

Esta composição com o uso de duas válvulas proporcionais e uma válvula bidirecional visa atender a necessidade do controle de aceleração, velocidade e posição do pistão através do controle de vazão em cada câmara do atuador. Para o acionamento das válvulas proporcionais foi desenvolvido um circuito cuja saída seria o sinal desejado com a corrente necessária para controlar a válvula. As Figuras B.19 e B.20 mostram o esquema feito no software *Circuit Maker* para

simulação e o circuito montado. Neste circuito foram usados basicamente, para cada válvula proporcional, um amplificador operacional modelo LM358 e dois transistores modelo BC547 (CABRAL, L. A. L., 2010). Esta solução composta (Figura B.18) surgiu como uma inovação justamente para suprir a falta de um equipamento que funcionasse como este conjunto de válvulas no mercado.

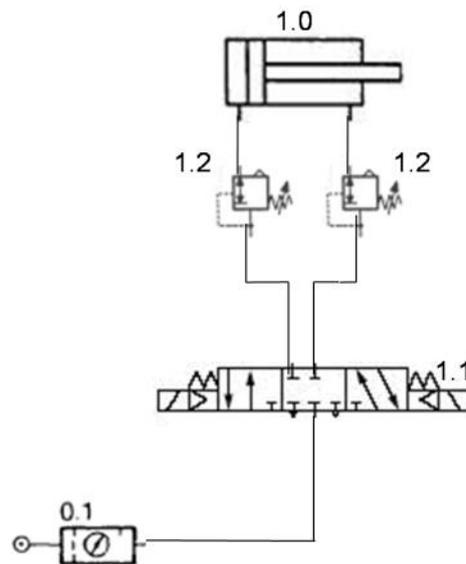


Figura B.18: Circuito pneumático do conjunto de válvulas.

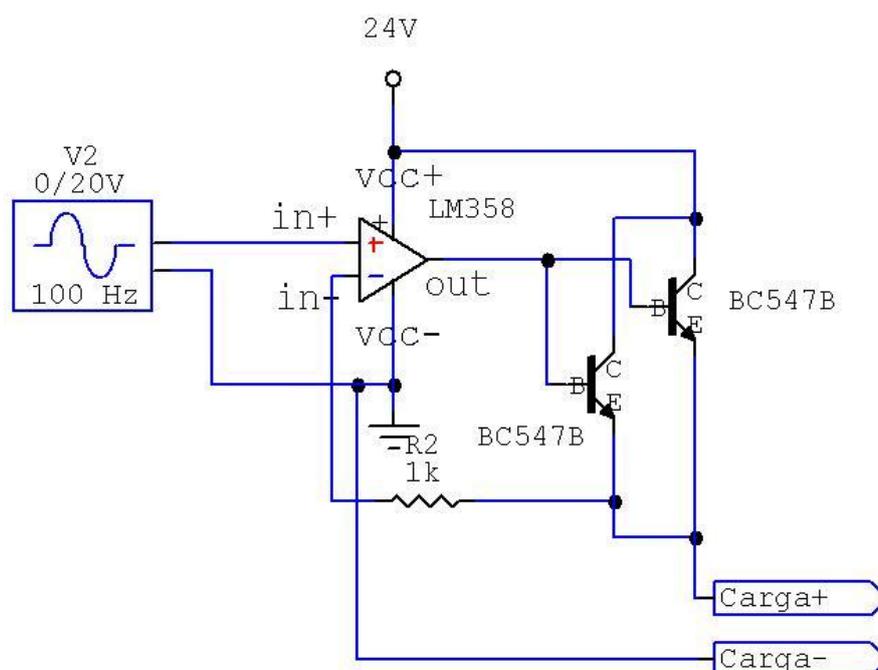


Figura B.19: Esquema do circuito seguidor de corrente.

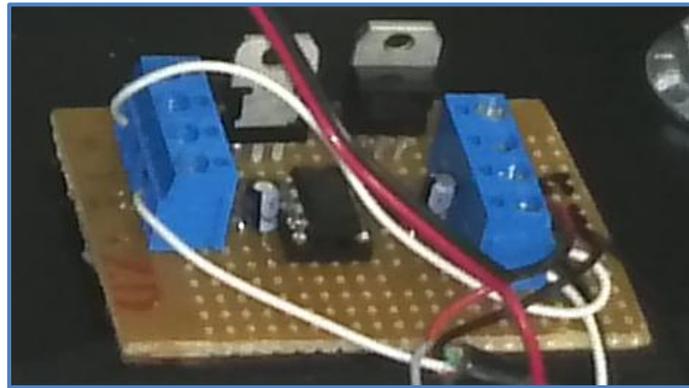


Figura B.20: Circuito seguidor de corrente.

Estas válvulas proporcionais reguladoras de vazão foram tratadas levando em conta o comportamento da vazão de saída em função da diferença de pressão à montante e à jusante da válvula descrita pelo fornecedor. As quatro curvas foram aproximadas por alguns pontos observados no gráfico apresentado pelo fabricante. Para encontrar a vazão de saída da válvula, foram feitas interpolações entre as curvas e entre os valores de corrente para aproximar ao máximo o valor de vazão em um ΔP intermediário.

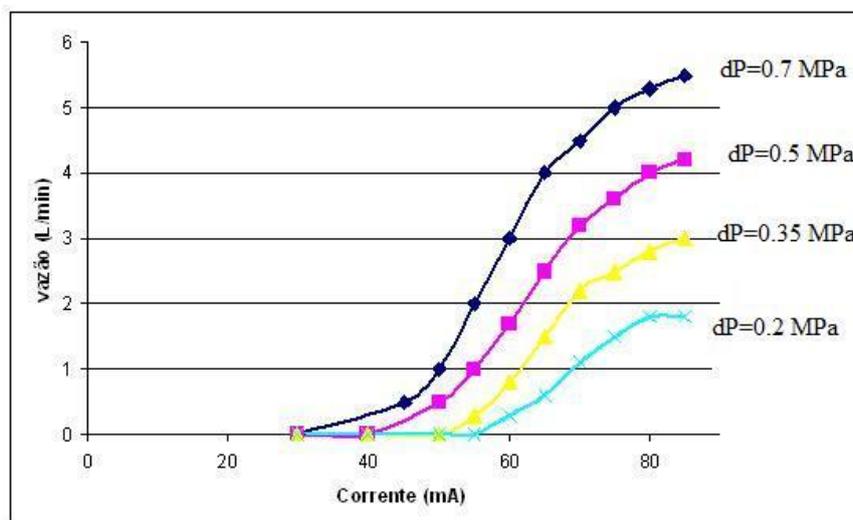


Figura B.21: Aproximação da curva da vazão de saída da válvula proporcional.

O fabricante fornece curvas que determinam a variação da pressão à montante da válvula em função da vazão que percorre por ela, dependendo da pressão imposta. Uma aproximação foi feita para que as interpolações pudessem fornecer valores razoáveis de pressões na mangueira após a válvula. Levando em conta que a pressão de alimentação do sistema é de 0,5 MPa, somente uma das curvas foi usada. No caso da vazão ser negativa, a interpolação é feita com a curva espelhada, ou seja, quando a vazão for máxima, a pressão à montante da válvula é a menor possível (pressão atmosférica).

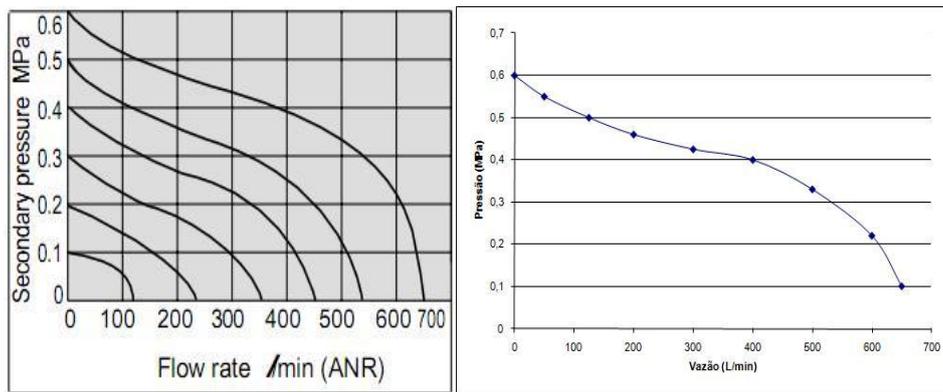


Figura B.22: Aproximação da curva de perda de carga da válvula proporcional.

Para a válvula direcional, foi feita uma tabela veritativa (Tabela B.1) para explicar seu funcionamento, ou seja, dependendo do par de tensões de entrada, têm-se diferentes pressões na entrada da válvula.

Tabela B.1: Tabela veritativa de entradas e saídas da válvula direcional.

U_1 (V)	U_2 (V)	P_a (MPa)	P_b (MPa)
0	0	0	0
24	0	P_s	P_a
0	24	P_a	P_s
24	24	0	0

Quando as tensões de entrada nas bobinas são iguais, as pressões nas mangueiras permanecem constantes. Para o caso quando a tensão U_1 é maior que U_2 , a força gerada no interior da bobina 1 empurrará o carretel da válvula para a

direita. Isso faz com que a pressão na entrada 1 seja a mesma do compressor e na entrada 2 seja a pressão atmosférica, ocasionando o escape do ar. Analogamente, o mesmo acontece quando a tensão na bobina direita é maior que na esquerda. Quando a pressão aparece na válvula e uma vazão é gerada, a pressão na mangueira tende à da válvula enquanto a vazão decresce.

B.4 Montagem final

Os componentes descritos na Seção B.2 foram previamente montados em ambiente virtual, usando o software *SolidWorks* (Figura B.23) para então, após adquiridos ou fabricados, serem montados no laboratório como mostra a Figura B.24. Desta forma, toda a estrutura mecânica da Plataforma Stewart está pronta para os primeiros testes e experimentações.

Dentre os testes que poderão ser conduzidos nesta plataforma, está o estudo da simulação de movimentos de veículos em escala, como apresentado na Figura B.25. Fora isto, pode ser feita toda a verificação de diferentes estratégias de controle implementadas na plataforma.

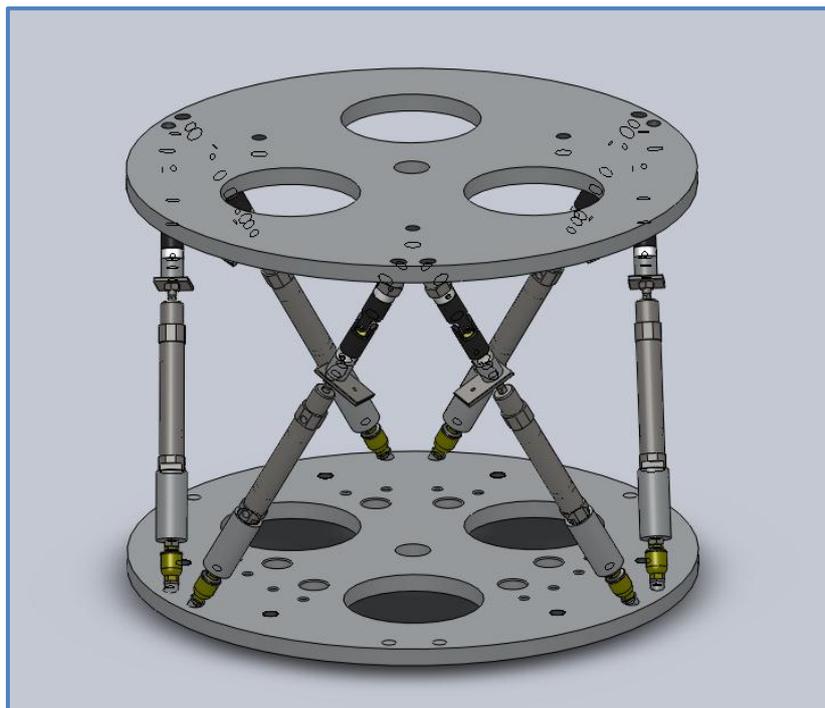


Figura B.23: Montagem dos componentes da Plataforma Stewart em CAD.



Figura B.24: Plataforma Stewart construída.

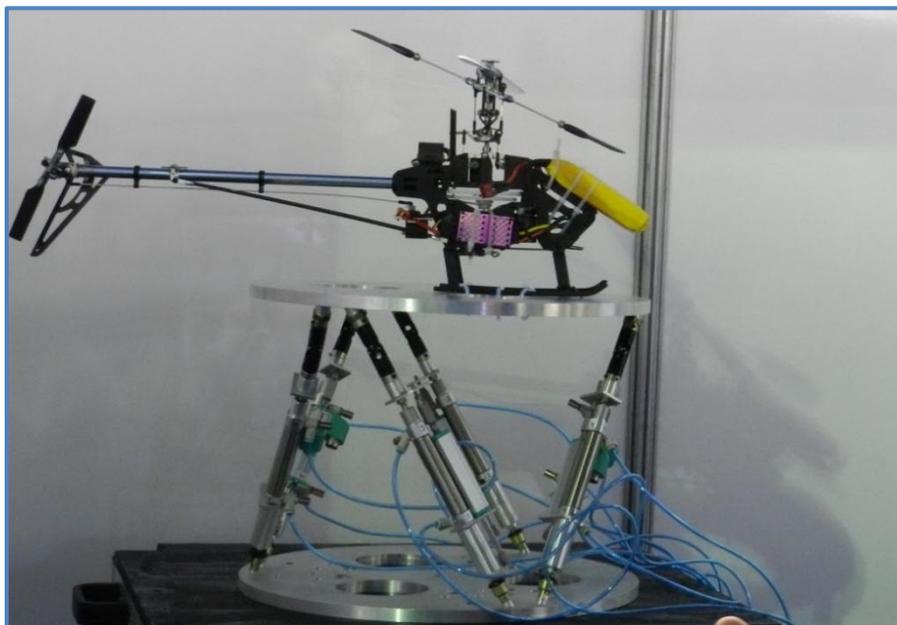


Figura B.25: Demonstração do uso da Plataforma Stewart construída como simulador de movimentos em escala.

B.5 Aquisição de dados e controle

Nesta Seção serão apresentadas as estratégias de controle que poderão ser usadas no posicionamento do simulador construído baseado em uma Plataforma Stewart.

A primeira estratégia (convencional) consiste no controle do simulador usando sensores de deslocamento linear, que podem ser do tipo resistivo (potenciométrico) ou indutivo (LVDT). Neste tipo de controle, é feita a medição direta de cada deslocamento do atuador linear da plataforma ($\mathbf{q} - \mathbf{q}_0$), ou seja, a variável medida é justamente a variável controlável diretamente. Porém, apesar de ser uma estratégia mais simples, esta possui alguns pontos negativos, tais como o custo dos sensores, pois no caso de uma Plataforma Stewart (que tem seis atuadores) são usados seis sensores de deslocamento linear. Outro ponto importante é a carga gerada no sistema, pois os sensores devem ficar acoplados aos atuadores, o que diminui a eficiência do equipamento.

Nesta estratégia de controle são usados sensores de deslocamento linear do tipo resistivo como o mostrado na Figura B.5. No CD Anexo encontra-se o catálogo do transdutor de deslocamento linear, no qual há mais informações sobre este equipamento. Esta estratégia consiste em, dada uma entrada com a trajetória desejada da plataforma móvel, medir diretamente o deslocamento linear de seus atuadores (variável controlável) e usar a cinemática inversa para calcular e comparar os valores desejados dos deslocamentos dos atuadores. Um esquema mostrando a montagem experimental do sistema de controle é mostrado na Figura B.26.

Por causa das dificuldades geradas pela estratégia convencional descritas ao longo do texto, como o elevado custo dos transdutores e sua grande influência na inércia do sistema, pode ser usada uma estratégia não convencional baseada no uso de uma central inercial. Nesta estratégia, um único equipamento (Figura B.7) é usado para realizar as medições das velocidades angulares e acelerações lineares (nos três eixos) da plataforma móvel da Plataforma Stewart. Assim, não é feita a medida direta das variáveis controláveis do sistema, pois estas estão relacionadas

ao deslocamento linear dos atuadores da plataforma. Na Seção 4.3 encontram-se mais detalhes sobre este procedimento.

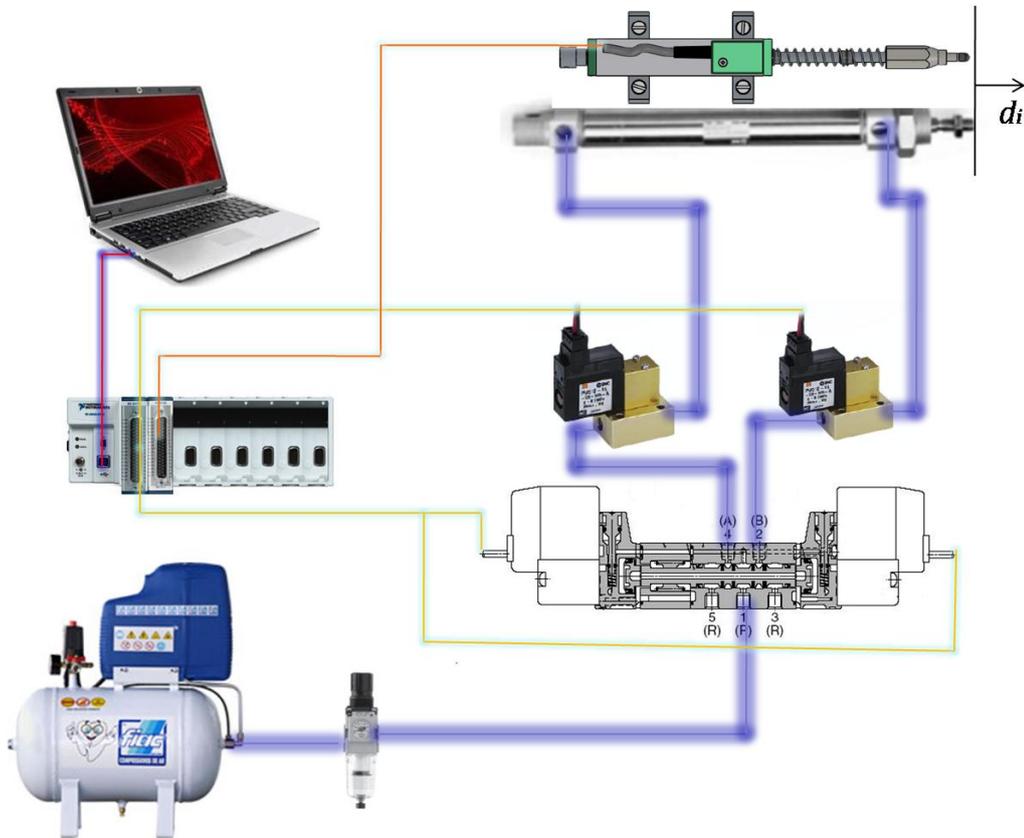


Figura B.26: Esquema da montagem experimental do sistema de controle dos atuadores.

Nesta estratégia de controle é usada uma central inercial, um equipamento que possui um girômetro e um acelerômetro, ambos tri axiais. No CD Anexo encontra-se o catálogo da central inercial, no qual há mais informações sobre este equipamento. Esta estratégia consiste em medir as acelerações lineares nos três eixos de orientação (x , y e z) e as velocidades angulares ao redor dos mesmos três eixos. Esta medição é feita em um ponto peculiar da Plataforma Stewart, podendo ser escolhido para isto, seu CG ou o ponto central de sua base móvel (topo). Como as variáveis controláveis diretamente são os deslocamentos lineares dos atuadores da plataforma, o sinal obtido deste sensor tem que passar pelo modelo dinâmico da plataforma antes de ser comparado com os deslocamentos lineares desejados do atuador.

Para desenvolver rotinas de controle e monitoramento do simulador é usado o programa *LabView*. Para controlar a plataforma usando este programa, são usadas placas de aquisição de dados da *National Instruments*. Como a válvula bidirecional usada funciona apenas com entradas digitais, ou seja, recebe apenas comandos de aberto ou fechado em cada uma de suas vias para controlar a posição do pistão, a placa de emissão (NI 9476) é digital. Possui 32 canais, para assim enviar sinais para cada um dos dois lados das seis válvulas usadas na Plataforma. Esta saída é de 24 V, pois é esta a tensão de trabalho da válvula. Esta placa tem um período de envio de dados de 500 μ s (ALBUQUERQUE, A. N., 2009).

Para a leitura dos sinais dos transdutores (de deslocamento) é usada a placa de aquisição NI 9205 (Figura B.26) de entradas analógicas e para o envio de sinais analógicos às válvulas proporcionais é usada a placa NI 9264. Os catálogos de todas as placas usadas encontram-se no CD Anexo.



Figura B.27: Placas NI usadas no controle da plataforma (NI 9205 à esquerda e NI 9476 à direita).

B.6 Calibração dos transdutores

Nas duas estratégias de controle avaliadas, duas categorias de elementos sensores são usadas. Em cada uma delas, o valor do mensurando depende de uma correlação entre os valores dos sinais de tensão elétrica (sinal de medição) e os valores na unidade da grandeza física que se deseja medir. Os Itens a seguir descrevem o processo de obtenção desta correlação para cada um dos tipos de transdutores usados.

B.6.1 Transdutor de deslocamento linear

O transdutor de deslocamento linear usado é um comparador resistivo, ou seja, ao deslocar sua ponta de medição, varia-se o valor de sua resistência elétrica interna tal qual um potenciômetro. Com isto, varia-se o valor da saída dada uma tensão de entrada constante em corrente contínua. Realizando o deslocamento da ponta de medição do transdutor de forma que se possa medir este deslocamento em sua grandeza (metro, em unidade SI, seus múltiplos e submúltiplos) pode-se obter a curva de calibração (curva analítica) do instrumento de medição.

Para obter tal correlação foi usada a Máquina de Medição Universal do Comprimento, marca Carl Mahr, modelo 828 PC, número de série 4630202, (Figura B.28) situada no Laboratório de Metrologia Dimensional do Instituto Tecnológico da Universidade Católica (LMD/ITUC/PUC-Rio). Esta máquina tem menor divisão de 0,0001 mm e incerteza de medição na faixa usada neste procedimento de $\pm 0,0007$ mm, de acordo com o Certificado número 0338-2/07, expedido pelo ITUC/PUC-Rio.

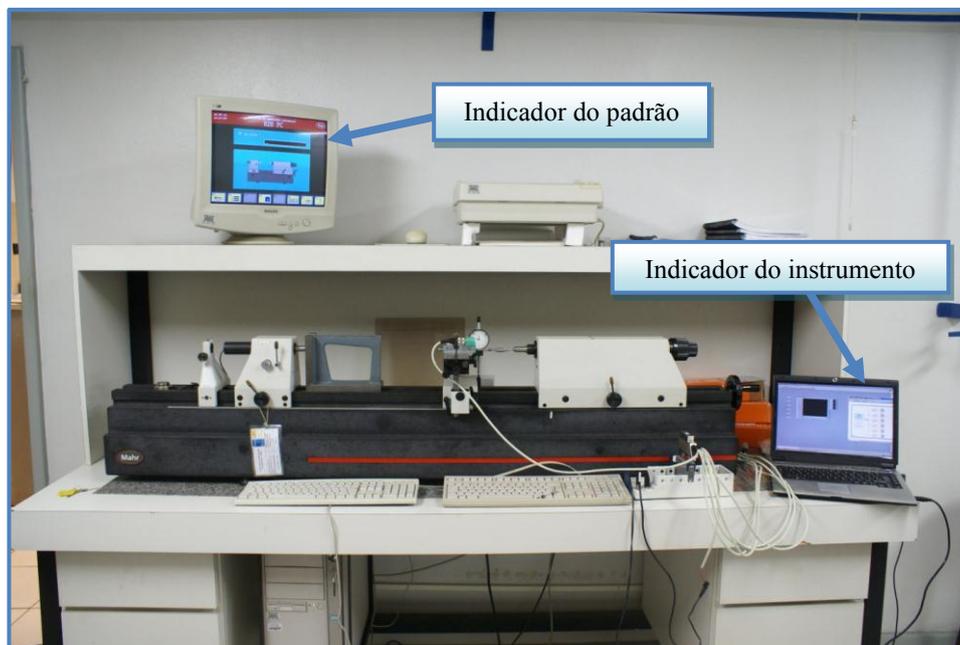


Figura B.28: Máquina de Medição Universal do Comprimento.

Na Figura B.28 estão indicadas as posições dos indicadores do padrão e do instrumento usados na obtenção da curva analítica. A montagem do transdutor na base de medição da máquina é mostrada com mais detalhamento na Figura B.29.

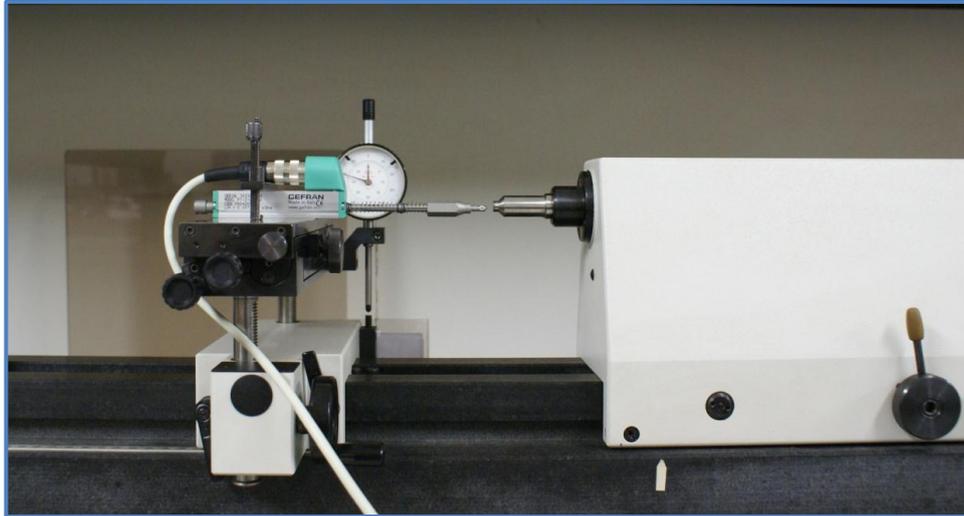


Figura B.29: Montagem do transdutor de deslocamento no sistema de medição.

Neste procedimento, a obtenção dos pontos para o ajuste da curva de calibração foi dividida em três séries de aperto e três séries de retorno da ponta de medição, sendo que em cada uma delas são feitas onze medições (valor de zero + dez pontos igualmente espaçados dentro da faixa nominal do instrumento). Como existe um “espaço morto” no transdutor de deslocamento linear, antes de iniciar as medições, a ponta de medição do transdutor é encostada na ponta do padrão de medição e então, desloca-se a ponta do padrão (empurrando a ponta do transdutor) 2,500 mm no sentido do aperto do comparador. A Figura B.30 mostra um esquema com a montagem dos elementos e a Figura B.31 elucida o posicionamento dos pontos obtidos na curva.

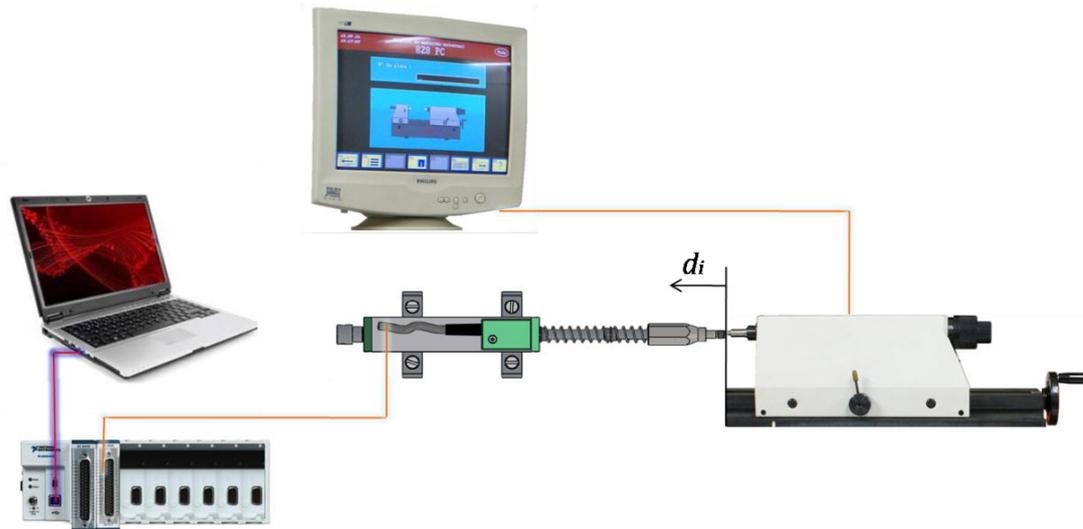


Figura B.30: Esquema da montagem do transdutor de deslocamento no sistema de medição.

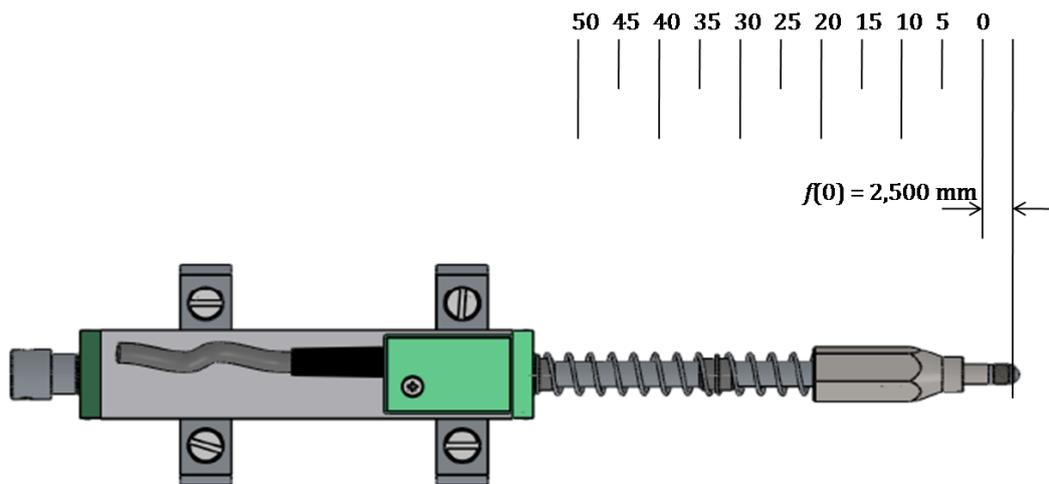


Figura B.31: Pontos que constituem uma série de medição na obtenção da curva de calibração.

As leituras do valor do mensurando foram obtidas com o auxílio de uma rotina desenvolvida em *LabView*. As Figuras B.32 e B.33 mostram o diagrama de blocos da rotina e o painel de visualização, respectivamente.

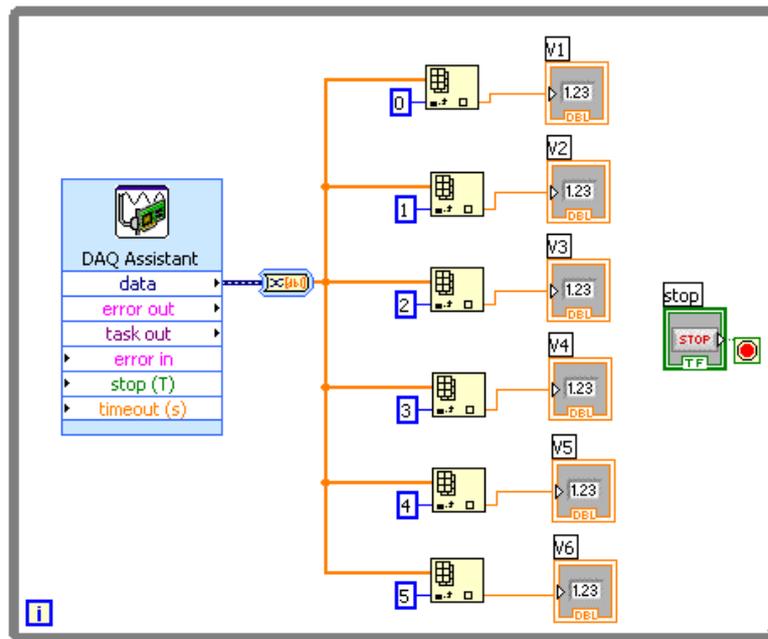


Figura B.32: Diagrama de blocos para leitura do valor indicado pelos transdutores de deslocamento.

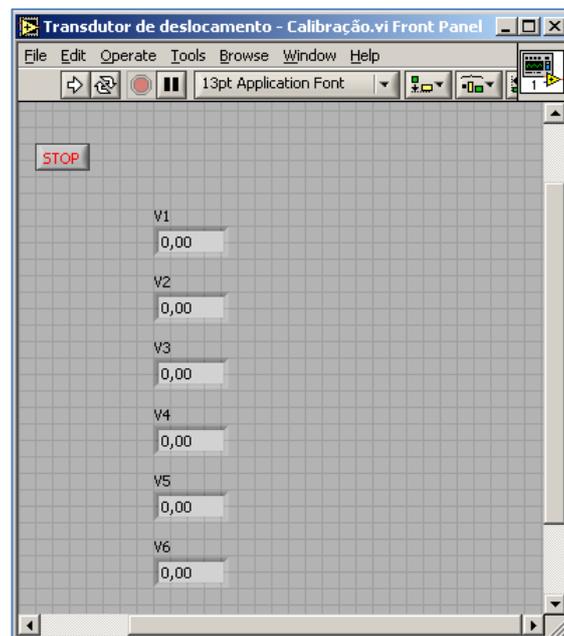


Figura B.33: Painel de visualização do valor indicado pelos transdutores de deslocamento.

As Tabelas B.2 a B.7 apresentam o resultado obtido nas séries de leitura para cada um dos seis transdutores de deslocamento. Já as Figuras B.34 a B.39

apresentam as curvas de calibração obtidas. Para a menor divisão de leitura observada na resposta em tensão do instrumento, não foi observado efeito da histerese nas séries de aperto e retorno da ponta de medição. Portanto, a curva de calibração será a mesma para os dois sentidos de movimento.

Tabela B.2: Pontos obtidos na curva de calibração (transdutor PY-2 1).

Leituras no padrão (mm)	Leituras no instrumento: PY-2 1						Média das leituras (V)
	Série 1		Série 2		Série 3		
	Aperto (V)	Retorno (V)	Aperto (V)	Retorno (V)	Aperto (V)	Retorno (V)	
0,000	0,08	0,08	0,08	0,08	0,07	0,07	0,08
5,000	0,59	0,59	0,59	0,59	0,58	0,58	0,59
10,000	1,10	1,10	1,10	1,10	1,09	1,09	1,10
15,000	1,62	1,61	1,62	1,62	1,61	1,61	1,61
20,000	2,12	2,13	2,13	2,13	2,12	2,12	2,12
25,000	2,63	2,64	2,63	2,63	2,62	2,63	2,63
30,000	3,15	3,15	3,15	3,16	3,14	3,15	3,15
35,000	3,65	3,68	3,67	3,66	3,65	3,66	3,66
40,000	4,18	4,18	4,19	4,18	4,18	4,17	4,18
45,000	4,70	4,69	4,69	4,67	4,69	4,67	4,68
50,000	5,20	5,19	5,21	5,20	5,20	5,19	5,20

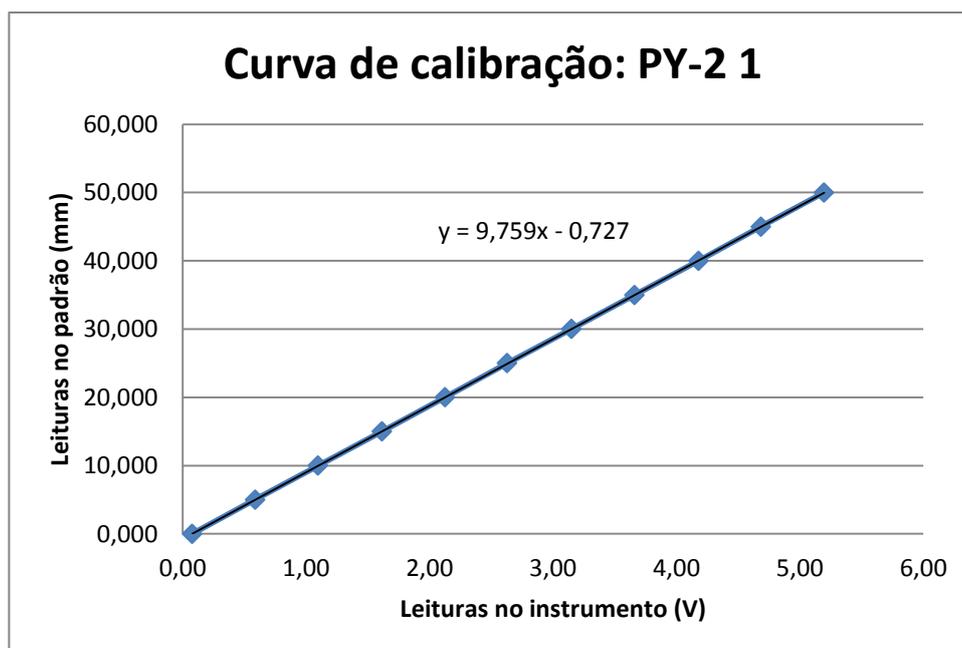


Figura B.34: Curva de calibração (transdutor PY-2 1).

Tabela B.3: Pontos obtidos na curva de calibração (transdutor PY-2 2).

Leituras no padrão (mm)	Leituras no instrumento: PY-2 2						Média das leituras (V)
	Série 1		Série 2		Série 3		
	Aperto (V)	Retorno (V)	Aperto (V)	Retorno (V)	Aperto (V)	Retorno (V)	
0,000	0,01	0,01	0,01	0,01	0,02	0,02	0,01
5,000	0,51	0,51	0,52	0,52	0,52	0,52	0,52
10,000	1,02	1,03	1,02	1,03	1,03	1,04	1,03
15,000	1,53	1,54	1,54	1,55	1,54	1,55	1,54
20,000	2,04	2,05	2,06	2,05	2,06	2,06	2,05
25,000	2,56	2,55	2,56	2,57	2,57	2,57	2,56
30,000	3,06	3,05	3,08	3,06	3,08	3,06	3,06
35,000	3,58	3,59	3,58	3,60	3,59	3,60	3,59
40,000	4,09	4,11	4,11	4,10	4,11	4,11	4,10
45,000	4,61	4,63	4,64	4,60	4,63	4,62	4,62
50,000	5,11	5,09	5,12	5,11	5,12	5,11	5,11

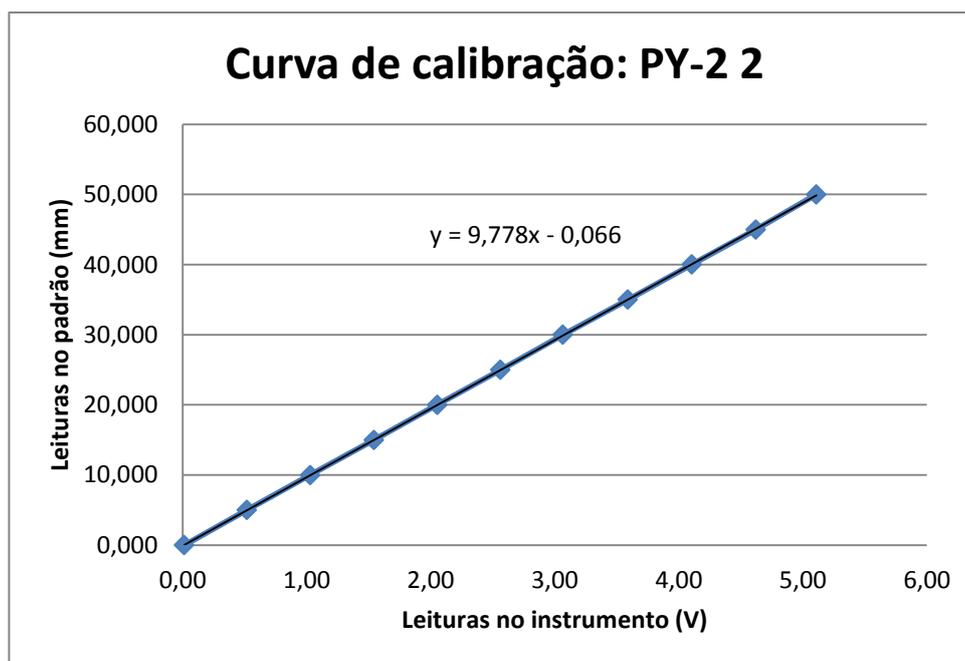


Figura B.35: Curva de calibração (transdutor PY-2 2).

Tabela B.4: Pontos obtidos na curva de calibração (transdutor PY-2 3).

Leituras no padrão (mm)	Leituras no instrumento: PY-2 3						Média das leituras (V)
	Série 1		Série 2		Série 3		
	Aperto (V)	Retorno (V)	Aperto (V)	Retorno (V)	Aperto (V)	Retorno (V)	
0,000	0,11	0,11	0,09	0,09	0,08	0,08	0,09
5,000	0,62	0,62	0,60	0,61	0,59	0,59	0,61
10,000	1,13	1,14	1,12	1,11	1,10	1,10	1,12
15,000	1,64	1,65	1,63	1,62	1,61	1,62	1,63
20,000	2,16	2,16	2,14	2,14	2,13	2,13	2,14
25,000	2,68	2,67	2,64	2,66	2,64	2,64	2,66
30,000	3,18	3,20	3,17	3,18	3,16	3,16	3,18
35,000	3,71	3,71	3,69	3,68	3,65	3,68	3,69
40,000	4,20	4,21	4,20	4,18	4,17	4,18	4,19
45,000	4,73	4,70	4,70	4,71	4,68	4,70	4,70
50,000	5,25	5,25	5,20	5,22	5,20	5,18	5,22

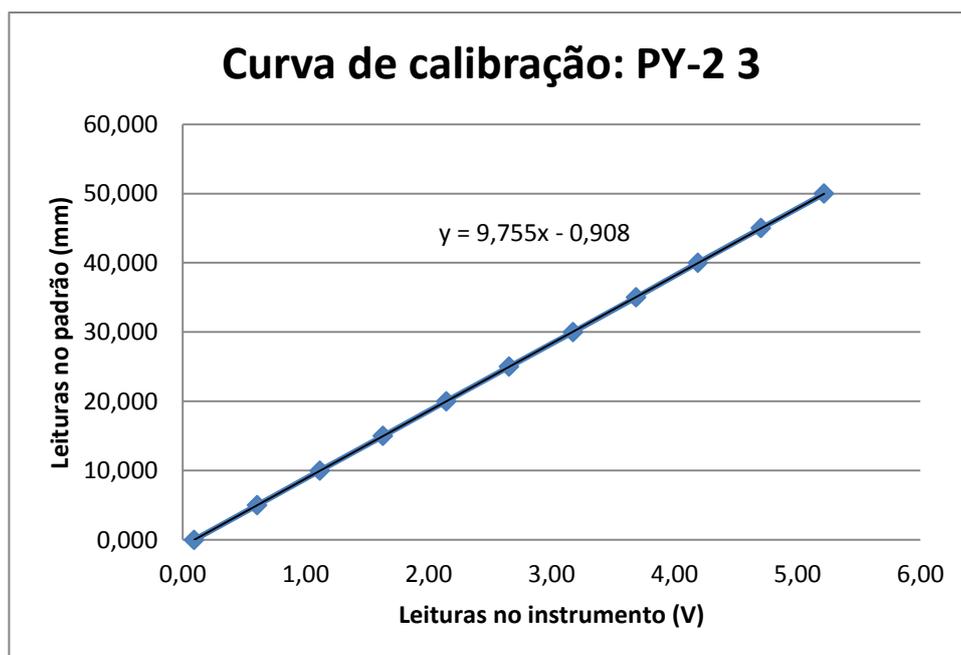


Figura B.36: Curva de calibração (transdutor PY-2 3).

Tabela B.5: Pontos obtidos na curva de calibração (transdutor PY-2 4).

Leituras no padrão	Leituras no instrumento: PY-2 4						Média das leituras
	Série 1		Série 2		Série 3		
	Aperto	Retorno	Aperto	Retorno	Aperto	Retorno	
(mm)	(V)	(V)	(V)	(V)	(V)	(V)	(V)
0,000	0,11	0,11	0,11	0,11	0,11	0,11	0,11
5,000	0,61	0,61	0,62	0,62	0,61	0,61	0,61
10,000	1,13	1,12	1,13	1,13	1,13	1,12	1,13
15,000	1,64	1,64	1,64	1,63	1,64	1,63	1,64
20,000	2,15	2,13	2,15	2,15	2,15	2,14	2,14
25,000	2,65	2,66	2,67	2,66	2,66	2,66	2,66
30,000	3,16	3,18	3,16	3,17	3,16	3,17	3,17
35,000	3,68	3,69	3,69	3,68	3,68	3,68	3,68
40,000	4,21	4,20	4,19	4,20	4,20	4,20	4,20
45,000	4,71	4,72	4,72	4,69	4,71	4,70	4,71
50,000	5,23	5,21	5,24	5,23	5,23	5,22	5,23

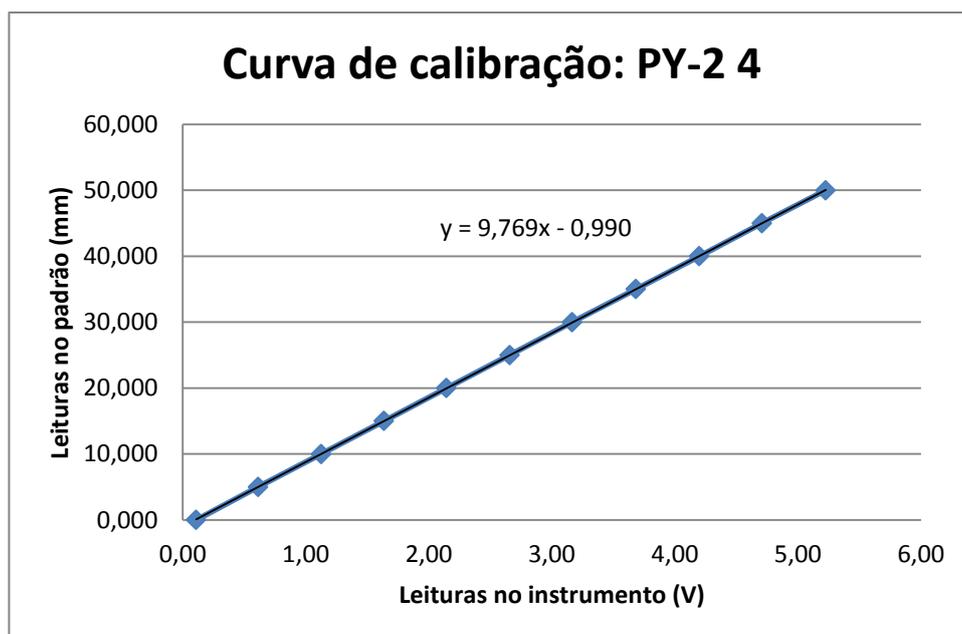


Figura B.37: Curva de calibração (transdutor PY-2 4).

Tabela B.6: Pontos obtidos na curva de calibração (transdutor PY-2 5).

Leituras no padrão (mm)	Leituras no instrumento: PY-2 5						Média das leituras (V)
	Série 1		Série 2		Série 3		
	Aperto (V)	Retorno (V)	Aperto (V)	Retorno (V)	Aperto (V)	Retorno (V)	
0,000	0,07	0,07	0,06	0,06	0,07	0,07	0,07
5,000	0,58	0,58	0,57	0,57	0,57	0,58	0,58
10,000	1,08	1,09	1,08	1,08	1,08	1,08	1,08
15,000	1,61	1,60	1,59	1,60	1,60	1,60	1,60
20,000	2,11	2,12	2,10	2,10	2,11	2,12	2,11
25,000	2,63	2,62	2,64	2,63	2,62	2,62	2,63
30,000	3,14	3,15	3,14	3,14	3,15	3,14	3,14
35,000	3,68	3,64	3,65	3,64	3,65	3,65	3,65
40,000	4,18	4,16	4,19	4,16	4,17	4,18	4,17
45,000	4,70	4,70	4,69	4,67	4,70	4,69	4,69
50,000	5,20	5,19	5,20	5,19	5,18	5,19	5,19

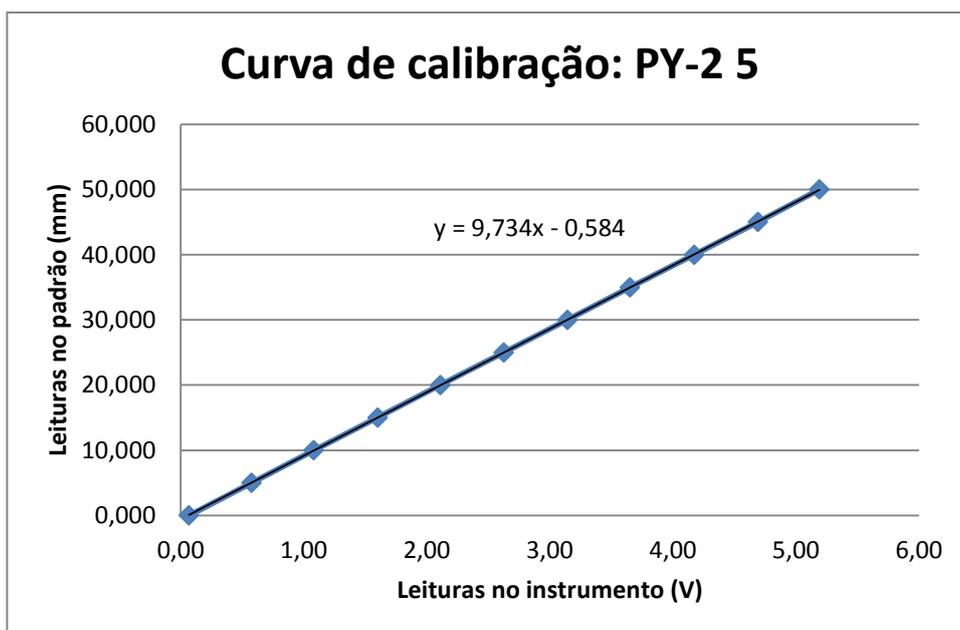


Figura B.38: Curva de calibração (transdutor PY-2 5).

Tabela B.7: Pontos obtidos na curva de calibração (transdutor PY-2 6).

Leituras no padrão (mm)	Leituras no instrumento: PY-2 6						Média das leituras (V)
	Série 1		Série 2		Série 3		
	Aperto (V)	Retorno (V)	Aperto (V)	Retorno (V)	Aperto (V)	Retorno (V)	
0,000	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08
5,000	0,59	0,59	0,59	0,59	0,59	0,59	0,59
10,000	1,10	1,10	1,10	1,11	1,10	1,10	1,10
15,000	1,61	1,61	1,62	1,61	1,61	1,61	1,61
20,000	2,12	2,13	2,12	2,13	2,12	2,13	2,12
25,000	2,63	2,63	2,64	2,63	2,63	2,63	2,63
30,000	3,15	3,14	3,13	3,15	3,14	3,14	3,14
35,000	3,65	3,67	3,65	3,68	3,65	3,67	3,66
40,000	4,18	4,19	4,18	4,16	4,18	4,17	4,18
45,000	4,70	4,68	4,70	4,69	4,70	4,68	4,69
50,000	5,18	5,19	5,21	5,19	5,19	5,19	5,19

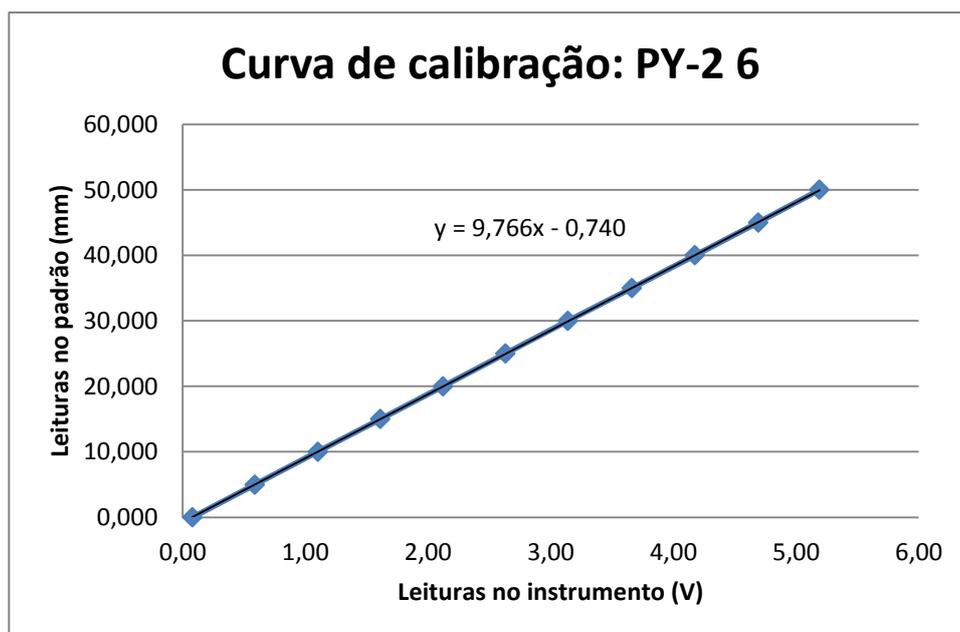


Figura B.39: Curva de calibração (transdutor PY-2 6).

Feitas as curvas analíticas dos transdutores, passou-se então para o processo de calibração dos mesmos, para a verificação dos erros e incertezas dos valores indicados. O padrão usado e o procedimento foram o mesmo da curva de calibração. Este último corresponde ao Procedimento de Calibração PR046 do LMD/ITUC/PUC-Rio. Porém, desta vez, são comparados os valores já na mesma grandeza. As Tabelas B.8 a B.13 apresentam os resultados da calibração, com os valores de média das três séries de leitura, os erros de indicação e reprodutibilidade, os desvios padrão e a incerteza expandida do instrumento. A incerteza padrão do instrumento foi calculada usando o Tipo A (análise estatística de séries de observações) e para a incerteza expandida foi usado um fator de abrangência igual a 2 ($k = 2$, para um nível de confiança de aproximadamente 95 %; INMETRO, 2003).

Tabela B.8: Resultado da calibração (transdutor PY-2 1).

Leituras no padrão	Leituras no instrumento: PY-2 1				
	Média das leituras	Erro de indicação	Erro de reprodutibilidade	Desvio padrão	Incerteza expandida
(mm)	(mm)	(mm)	(mm)	(mm)	(mm)
5,000	5,00	0,00	0,10	0,05	0,10
10,000	9,98	-0,02	0,10	0,05	0,10
15,000	15,03	0,03	0,15	0,06	0,13
20,000	20,00	0,00	0,15	0,06	0,13
25,000	24,93	-0,07	0,20	0,06	0,13
30,000	30,01	0,01	0,20	0,06	0,13
35,000	35,01	0,01	0,29	0,11	0,23
40,000	40,06	0,06	0,20	0,06	0,13
45,000	44,99	-0,01	0,29	0,12	0,23
50,000	49,99	-0,01	0,24	0,09	0,17

Tabela B.9: Resultado da calibração (transdutor PY-2 2).

Leituras no padrão	Leituras no instrumento: PY-2 2				
	Média das leituras	Erro de indicação	Erro de reprodutibilidade	Desvio padrão	Incerteza expandida
(mm)	(mm)	(mm)	(mm)	(mm)	(mm)
5,000	4,99	-0,01	0,10	0,05	0,10
10,000	9,97	-0,03	0,15	0,06	0,12
15,000	15,01	0,01	0,20	0,07	0,15
20,000	20,00	0,00	0,20	0,07	0,13
25,000	24,98	-0,02	0,20	0,07	0,13
30,000	29,90	-0,10	0,29	0,11	0,22
35,000	35,03	0,03	0,20	0,09	0,18
40,000	40,06	0,06	0,20	0,08	0,16
45,000	45,12	0,12	0,39	0,14	0,29
50,000	49,89	-0,11	0,29	0,11	0,22

Tabela B.10: Resultado da calibração (transdutor PY-2 3).

Leituras no padrão	Leituras no instrumento: PY-2 3				
	Média das leituras	Erro de indicação	Erro de reprodutibilidade	Desvio padrão	Incerteza expandida
(mm)	(mm)	(mm)	(mm)	(mm)	(mm)
5,000	4,99	-0,01	0,29	0,13	0,27
10,000	9,99	-0,01	0,39	0,16	0,32
15,000	14,98	-0,02	0,39	0,14	0,29
20,000	20,00	0,00	0,29	0,13	0,27
25,000	24,99	-0,01	0,39	0,17	0,34
30,000	30,06	0,06	0,39	0,15	0,30
35,000	35,06	0,06	0,59	0,22	0,44
40,000	39,97	-0,03	0,39	0,15	0,30
45,000	44,97	-0,03	0,49	0,16	0,32
50,000	49,98	-0,02	0,68	0,28	0,56

Tabela B.11: Resultado da calibração (transdutor PY-2 4).

Leituras no padrão	Leituras no instrumento: PY-2 4				
	Média das leituras	Erro de indicação	Erro de reprodutibilidade	Desvio padrão	Incerteza expandida
(mm)	(mm)	(mm)	(mm)	(mm)	(mm)
5,000	5,00	0,00	0,10	0,05	0,10
10,000	10,01	0,01	0,10	0,05	0,10
15,000	14,99	-0,01	0,10	0,05	0,10
20,000	19,95	-0,05	0,20	0,09	0,17
25,000	24,98	-0,02	0,20	0,07	0,13
30,000	29,94	-0,06	0,24	0,09	0,18
35,000	34,99	-0,01	0,10	0,05	0,10
40,000	40,02	0,02	0,20	0,07	0,13
45,000	45,01	0,01	0,29	0,11	0,23
50,000	50,06	0,06	0,29	0,11	0,22

Tabela B.12: Resultado da calibração (transdutor PY-2 5).

Leituras no padrão	Leituras no instrumento: PY-2 5				
	Média das leituras	Erro de indicação	Erro de reprodutibilidade	Desvio padrão	Incerteza expandida
(mm)	(mm)	(mm)	(mm)	(mm)	(mm)
5,000	5,01	0,01	0,10	0,05	0,11
10,000	9,94	-0,06	0,10	0,04	0,08
15,000	14,99	-0,01	0,19	0,06	0,12
20,000	19,95	-0,05	0,19	0,09	0,17
25,000	24,98	-0,02	0,19	0,08	0,16
30,000	30,01	0,01	0,10	0,05	0,10
35,000	34,96	-0,04	0,39	0,14	0,29
40,000	40,04	0,04	0,29	0,12	0,24
45,000	45,08	0,08	0,29	0,11	0,23
50,000	49,95	-0,05	0,19	0,07	0,15

Tabela B.13: Resultado da calibração (transdutor PY-2 6).

Leituras no padrão	Leituras no instrumento: PY-2 6				
	Média das leituras	Erro de indicação	Erro de reprodutibilidade	Desvio padrão	Incerteza expandida
(mm)	(mm)	(mm)	(mm)	(mm)	(mm)
5,000	5,01	0,01	0,05	0,03	0,05
10,000	10,01	0,01	0,15	0,05	0,10
15,000	14,99	-0,01	0,15	0,05	0,10
20,000	20,00	0,00	0,15	0,06	0,12
25,000	24,95	-0,05	0,15	0,05	0,10
30,000	29,93	-0,07	0,20	0,08	0,16
35,000	35,01	0,01	0,34	0,14	0,28
40,000	40,04	0,04	0,29	0,10	0,20
45,000	45,07	0,07	0,20	0,09	0,18
50,000	49,95	-0,05	0,29	0,10	0,20

B.6.2 Unidade de medição inercial

Um método de validação e calibração da unidade de medição inercial (IMU) foi desenvolvido no Laboratório de Desenvolvimento de Controle (LDC) e é descrito em (SERENO, H. R. S, 2012) para a determinação da posição para realimentação no sistema de controle de veículos autônomos em alta velocidade a partir de trajetórias simuladas previamente definidas. Este procedimento também será usado em (ASSAD, M. M., 2013) no estudo do comportamento de sistemas pneumáticos.

O uso deste método de validação e calibração na central inercial da Plataforma Stewart para que desta forma seja implementada a estratégia de controle aqui descrita se dará como seguimento deste trabalho (Seção 6.2).

CD Anexo

I Códigos usados nas simulações

- I.1 Sistema de atuação**
- I.2 Plataforma plana com três graus de liberdade**
 - I.2.1 Parâmetros (função principal)**
 - I.2.2 Geometria inversa**
 - I.2.3 Cinemática inversa**
 - I.2.4 Cinemática direta**
 - I.2.5 Análise das singularidades e controle**
 - I.2.6 Gráficos e animações**
 - I.2.7 Arquivos *Simulink* (.mdl)**
- I.3 Plataforma Stewart**
 - I.3.1 Parâmetros (função principal)**
 - I.3.2 Geometria inversa**
 - I.3.3 Cinemática inversa**
 - I.3.4 Cinemática direta**
 - I.3.5 Análise das singularidades e controle**
 - I.3.6 Gráficos e animações**
 - I.3.7 Arquivos *Simulink* (.mdl)**

CD Anexo

II Controle de uma Plataforma Stewart via *SimMechanics*

II.1 Tutorial

II.2 Código usado nas simulações

CD Anexo

III Catálogos dos elementos da Plataforma Stewart em escala

III.1 Componentes mecânicos

III.1.1 Junta universal

III.1.2 Junta esférica

III.2 Transdutores

III.2.1 Transdutor de deslocamento linear

III.2.2 Central inercial

III.3 Componentes pneumáticos

III.3.1 Atuador de dupla ação

III.3.2 Válvula bidirecional

III.3.3 Válvula proporcional

III.3.4 Compressor de ar

III.3.5 Regulador de pressão

III.4 Aquisição de dados e controle

III.4.1 NI 9476

III.4.2 NI 9205

III.4.3 NI 9264

CD Anexo