

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM DINÂMICA E CONTROLE  
DE SISTEMAS ROBÓTICOS**

**MODELAGEM DE UM MANIPULADOR ROBÓTICO PLANO  
DE TRÊS GRAUS DE LIBERDADE**

**ADRIANDERSON FREIRE ARAÚJO DA ROCHA**

**MANAUS  
2006**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM DINÂMICA E CONTROLE  
DE SISTEMAS ROBÓTICOS**

**MODELAGEM DE UM MANIPULADOR ROBÓTICO PLANO  
DE TRÊS GRAUS DE LIBERDADE**

**ADRIANDERSON FREIRE ARAÚJO DA ROCHA**

**MANAUS  
2006**

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM DINÂMICA E CONTROLE DE  
SISTEMAS ROBÓTICOS

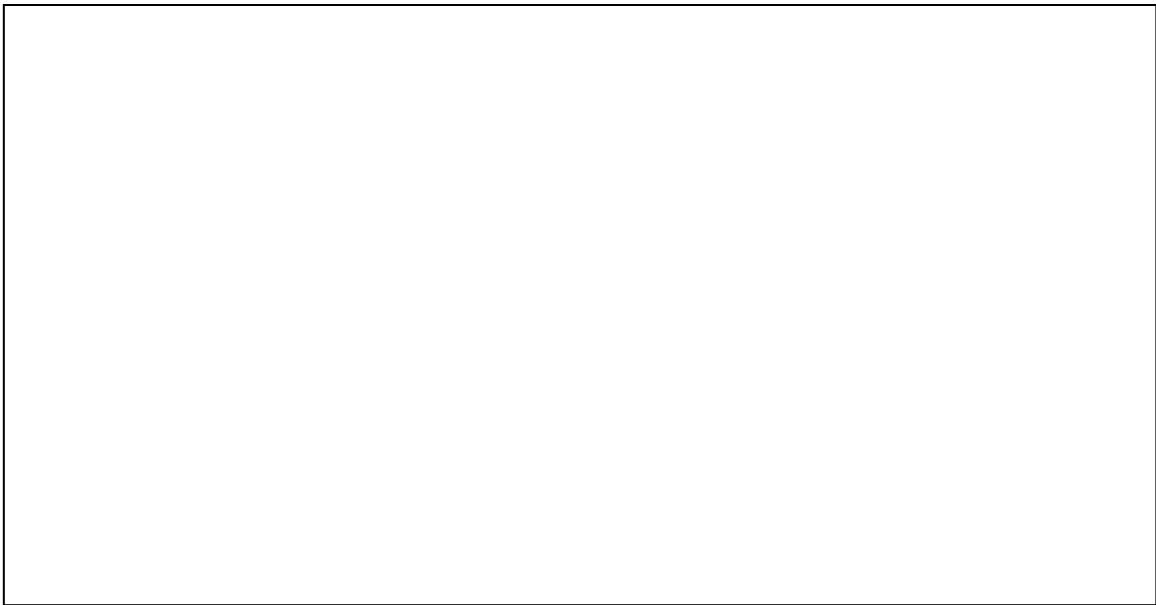
**ADRIANDERSON FREIRE ARAÚJO DA ROCHA**

**MODELAGEM DE UM MANIPULADOR ROBÓTICO  
PLANO DE TRÊS GRAUS DE LIBERDADE**

Monografia apresentada ao Curso de Especialização em Dinâmica e Controle de Sistemas Robóticos da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para a obtenção do título de Especialista em Dinâmica e Controle de Sistemas Robóticos.

Orientador: Prof. Dr. Marco Antonio Meggiolaro.

Manaus  
2006



Ficha catalográfica elaborada pela documentalista XXXXXXXX



## Dedicatória

Dedico este trabalho:

Aos meus pais, exemplo de força e garra,  
À minha esposa, pelo incentivo e total apoio.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus, pela força espiritual incentivadora nos momentos mais difíceis.

Agradeço a SUFRAMA e a UFAM pela realização do curso de Especialização em Dinâmica e Controle de Sistemas Robóticos.

Ao meu professor orientador, Dr. Marco Antônio Meggiolaro, pelo apoio e compreensão das dificuldades que surgiram no desenvolvimento deste trabalho.

A amiga, Gabriela Wanderley, pela ajuda no desenvolvimento matemático das equações presentes no trabalho.

## RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo da modelagem de um braço robótico específico com o propósito de entender efetivamente a cinemática e a dinâmica de manipuladores robóticos rígidos. O manipulador robótico estudado é constituído de três elos/*links* rígidos conectados por juntas rotativas que trabalham no plano x-y, possuindo três graus de liberdade. O desenvolvimento da modelagem tem início com análise completa da cinemática direta de manipuladores na qual é tratada toda a matemática preliminar necessária para o estudo envolvendo manipuladores onde são determinadas a posição do efetuador e o Jacobiano do manipulador, seguidos pelo estudo da estática que mostra o balanço de forças, momentos e os torques sobre as juntas, vindo na seqüência o estudo da modelagem dinâmica através da formulação de Lagrange onde são considerados os efeitos de inércia, Coriolis, centrífugos e gravitacionais acarretados aos links quando o manipulador está em movimento. A modelagem do manipulador plano de três graus de liberdade possibilitou o acréscimo do conhecimento sobre a dinâmica de robôs manipuladores rígidos, a qual foi possível destacar que há um aumento considerável na complexidade das equações com o aumento de graus de liberdade envolvidos no manipulador, assim como quando são considerados os efeitos gravitacionais, Coriolis, força e torque centrífugos, entre outros, que acarreta um acoplamento dinâmico fortemente não-linear entre suas articulações, implicando em dificuldades na identificação de seus parâmetros.

Palavras Chave: 1) Manipulador robótico, 2) Modelagem cinemática, 3) Dinâmica de braços manipuladores.

## **ABSTRACT**

This work presents a study of the modeling of a specific robotic arm with the purpose of understanding the kinematics and the dynamics of the manipulators' rigid robotics indeed. The robotic manipulator studied is constituted of three rigid links connected by rotative joints that work in the plan  $x$ - $y$ , possessing three degrees-of-freedom. The development of the modeling has beginning with completes analysis of the manipulators' direct kinematics in the which the whole necessary preliminary mathematics is treated for the study involving manipulators where are calculate the position of the end-effector and the manipulator's Jacobiano, followed for the study of the static that shows the balance of forces, moments and the torques on the committees, in the sequence the study of the dynamic modeling through the formulation of Lagrange where the inertia effects are considered, Coriolis, centrifugal and gravity carted to the links when the manipulator is in movement. The plane manipulator's of three degrees of freedom modeling made possible the increment of the knowledge on the robots' rigid manipulators dynamics, which was possible to highlight that there is a considerable increase in the complexity of the equations with the increase of degrees of freedom involved in the manipulator, as well as when they are considered the effects gravity, Coriolis, forces and centrifugal torque, among other, that carts a dynamic joining strongly non-linear among your articulations, implicating in difficulties in the identification of your parameters.

Key-words: 1) Robot manipulator, 2) Kinematics modeling, 3) Dynamic of manipulator arms.



# SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	01
<b>1.1 Objetivos</b> .....	03
1.1.1 Geral.....	03
1.1.2 Específicos.....	03
<b>1.2 Justificativa</b> .....	03
<b>1.3 Estrutura da monografia</b> .....	04
<b>1.4 Fundamentação teórica</b> .....	05
<b>1.5 Metodologia</b> .....	07
1.5.1 Modelagem .....	07
1.5.2 Levantamento bibliográfico .....	07
1.5.3 Seleção do conteúdo.....	08
<b>2 CINEMÁTICA</b> .....	09
<b>2.1 Matemática preliminar</b> .....	09
2.1.1 Posição e orientação de um corpo rígido.....	09
2.1.2 Transformações coordenadas .....	11
2.1.3 Ângulos de Euler.....	14
2.1.4 Transformações homogêneas.....	17
<b>2.2 Modelagem cinemática de braços manipuladores</b> .....	20
2.2.1 Cadeia cinemática aberta.....	20
2.2.2 Notação de Denavit – Hartembeg.....	22
2.2.3 Equações cinemáticas.....	27
<b>2.3 Movimento diferencial</b> .....	33
2.3.1 Modelagem cinemática do movimento instantâneo.....	34
2.3.1.1 Relações diferenciais.....	34
2.3.1.2 Rotações infinitesimais.....	37
2.3.1.3 Cálculo do Jacobiano do manipulador.....	42
<b>3 ESTÁTICA</b> .....	49
<b>3.1 Análise de força e momento</b> .....	49
3.1.1 Balanço de forças e momentos.....	49
3.1.2 Torque equivalentes nas juntas.....	53
<b>4 DINÂMICA</b> .....	57
<b>4.1 Formulação Lagrangiana da dinâmica do manipulador</b> .....	58
4.1.1 Dinâmica Lagrangiana .....	58
4.1.2 O tensor de inércia do manipulador .....	59
4.1.3 Derivando as equações de Lagrange do movimento.....	63

<b>5 MODELAGEM DO MANIPULADOR PLANO DE TRÊS GRAUS DE LIBERDADE.....</b>	<b>67</b>
<b>5.1 Equações da dinâmica usando Lagrange .....</b>	<b>68</b>
<b>6 CONCLUSÃO.....</b>	<b>73</b>
<b>Referências bibliográficas.....</b>	<b>74</b>

## Capítulo-1

### INTRODUÇÃO

Na história da ciência e tecnologia, avanços teóricos e suas aplicações práticas possuem efeitos mutuamente estimulantes. A área da robótica não é exceção. Como novos e mais avançados sistemas robóticos emergem, a exigência de melhor desempenho, alta eficiência e menores custos tornam-se mais severos, requerendo assim desenvolvimentos teóricos em muitas disciplinas. Das áreas que envolvem a robótica, uma muito importante é a de desenvolvimento de formas sofisticadas de manipuladores que realizam movimentos cada vez mais rápidos e mais precisos.

Os recentes avanços na área de robótica têm conduzido pesquisadores a dedicarem-se à modelagem de estruturas mais leves, possuindo alta mobilidade e destreza. Um manipulador é descrito por um conjunto de equações não lineares complexas, onde sofisticadas ferramentas analíticas são necessárias para entender a sua cinemática e dinâmica. Com a função de posicionar e orientar um determinado elemento terminal, que por sua vez, tem a função de manipular ferramentas apropriadas ao trabalho, os manipuladores descrevem comportamentos complexos tornando a modelagem de sua dinâmica difícil. Esta dificuldade reside em se deparar com problemas envolvendo acoplamentos de acelerações e velocidades entre os elos do manipulador. Quanto aos acoplamentos, a princípio, diz-se que podem estar presentes na dinâmica do manipulador, uma vez que, o movimento de cada um de seus membros afeta os demais. Em muitas aplicações industriais empregam-se manipuladores com elos rígidos.

No presente trabalho são desenvolvidas as equações da modelagem dinâmica para um manipulador robótico plano com três graus de liberdade possuindo como elementos de ligação dos seus elos, articulações sob a forma de juntas rotativas; onde são tratados termos matemáticos não-lineares devidos aos efeitos gravitacionais e de Coriolis, que acarretam um acoplamento dinâmico fortemente não-linear entre suas articulações.

## **1.1 OBJETIVOS**

### 1.1.1 Geral

Entender efetivamente a cinemática e a dinâmica de manipuladores robóticos rígidos para o desenvolvimento das equações para um manipulador robótico específico.

### 1.1.2 Específico

Modelagem dinâmica de um manipulador robótico plano de 3 graus de liberdade, usando Lagrange.

## **1.2 JUSTIFICATIVA**

Com o avanço cada vez mais rápido da tecnologia, as indústrias dos dias atuais estão cada vez mais buscando o aumento da produção, conciliando a saúde e a segurança do trabalho, bem como a preservação do meio ambiente. Esses fatores levam as indústrias a explorarem alternativas como à implantação de manipuladores robóticos em suas células produtivas que podem realizar o trabalho de forma mais rápida, eficiente e com maior qualidade, livrar o trabalho humano em casos que põem em risco a saúde, como por exemplo, à manipulação de materiais radioativos, atividade marítima em altas profundidades ou até mesmo trabalhos repetitivos.

Presenciando essa evolução dentro da indústria, o engenheiro mecânico se vê na necessidade de buscar os conhecimentos relacionados ao funcionamento destas máquinas, aprofundando seu estudo no desenvolvimento do tema proposto.

### **1.3 ESTRUTURA DA MONOGRAFIA**

Esse trabalho está dividido em seis capítulos os quais estão apresentados a seguir:

No Capítulo 1, apresenta-se uma introdução da pesquisa, os objetivos, as justificativas, a motivação para este estudo, a metodologia aplicada bem como a revisão bibliográfica de trabalhos que abordam o mesmo assunto e a organização geral desta monografia.

O Capítulo 2, apresenta toda matemática preliminar que será utilizada na modelagem cinemática, bem como a modelagem cinemática direta para manipuladores robóticos envolvendo movimento instantâneo.

O Capítulo 3, está relacionado ao estudo da estática, fazendo a análise e o balanço de forças e momentos envolvidos nos elos e nas juntas do braço manipulador .

O Capítulo 4, faz-se o estudo da formulação Lagrangiana da dinâmica do manipulador.

O Capítulo 5, é a seção aplicada ao trabalho em si, onde apresenta a modelagem do manipulador robótico plano de 3 graus de liberdade com todas as equações desenvolvidas.

O Capítulo 6, apresenta as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

## 1.4 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Segundo Craig (1986) dinâmica de mecanismos é um campo no qual muitos livros tem sido escritos. Na verdade, pode-se levar anos estudando este campo. No seu livro são expostas formulações de problemas dinâmicos visto particularmente para aplicação em manipuladores, em particular, métodos que fazem uso da cadeia em série, natural no cálculo envolvendo manipuladores.

Em Romano (2002) é relatado que o comportamento dinâmico de um manipulador pode ser descrito por um conjunto de equações diferenciais, *chamadas equações dinâmicas de movimento*. As equações dinâmicas de um robô manipulador com  $n$  graus de liberdade podem ser obtidas através do Lagrangeano. A modelagem dinâmica de um robô industrial apresenta termos matemáticos não-lineares, devido a efeitos gravitacionais, coriolis, força e torque centrífugos, entre outros, que acarretam um acoplamento dinâmico fortemente não-linear entre suas articulações, implicando em dificuldades na identificação de seus parâmetros, que exige uso de técnicas de linearização, reduções de modelos e aproximações, com o intuito de tornar menos complexo e antieconômico sua estrutura de controle.

Meggiolaro (2005), expõe que a geometria serial de um braço manipulador é descrita por equações não-lineares. Ferramentas analíticas efetivas são necessárias para entender a geometria e o comportamento cinemático do manipulador. Isso representa uma importante e única área de pesquisa robótica, desde que a pesquisa envolvendo a cinemática e projeto tenham sido focados sobre mecanismos de muitas entradas, o que requerem sofisticadas

ferramentas analíticas. O comportamento dinâmico de robôs manipuladores também é complexo, quando envolve sistemas espaciais de várias entradas sendo altamente combinados e não-lineares. O movimento de cada junta é significativamente afetado pelos movimentos de todas as outras juntas. A carga inercial imposta por cada junta varia largamente dependendo da configuração do braço do manipulador, os efeitos das acelerações de Coriolis e centrífugas são provenientes quando o braço manipulador move-se em alta velocidade.

Silva (2006) mostra que, o modelo matemático, ou modelo dinâmico, do manipulador desempenha um papel preponderante na simulação do movimento, na análise da estrutura do manipulador e no projeto dos algoritmos de controle. Ele fornece uma descrição da relação entre as forças generalizadas (forças e torques) aplicadas nas juntas e o movimento do manipulador. São introduzidos dois métodos da mecânica que possibilitam deduzir tal modelo matemático. Inicialmente, é apresentado a chamada formulação de Lagrange, a qual é conceitualmente simples e sistemática. O segundo método refere-se a uma formulação alternativa, conhecida com formulação de Newton-Euler, que permite obter o modelo matemático de uma forma recursiva e computacionalmente mais eficiente.



## 1.5 METODOLOGIA

### 1.5.1 Modelagem

O sistema modelado é composto por um manipulador com três elos rígidos e três juntas rotativas. O modelo dinâmico é descrito por um conjunto de equações diferenciais chamadas de equações de movimento. O Formalismo de Lagrange são utilizados no desenvolvimento do modelo. Ressalta-se ainda o fato de que o problema é tratado com suas não linearidades, sem usar de nenhuma linearização, processo que é utilizado na área para simplificar as equações de movimento. Assim, um dos desafios deste trabalho é tratar as equações de movimento sem linearizações.

Apresenta-se a seguir as considerações para o desenvolvimento deste trabalho:

- O movimento do manipulador se dá no plano XY;
- As juntas e os seus elos não sofrem deflexões;

### 1.5.2 Levantamento bibliográfico

Todo o material foi adquirido através do acervo da biblioteca da FT – UFAM, pesquisas na internet, apostilas estudadas no curso de especialização em Dinâmica e controle de sistemas robóticos (UFAM).

### 1.5.3 Seleção do conteúdo

Todo o conteúdo analisado foi submetido a uma triagem apurada com o objetivo de resumir e simplificar o trabalho para torná-lo claro e mais simples possível para facilitar o entendimento ao leitor, sob ênfase à modelagem dinâmica de manipuladores robóticos utilizando a formulação de Lagrange.

## Capítulo 2 - CINEMÁTICA

### 2.1 Matemática preliminar

#### 2.1.1 Posição e orientação de um corpo rígido

O braço de um manipulador pode ser modelado como um sistema de corpos rígidos. A localização de cada corpo rígido é completamente descrita pela sua posição e orientação.

A posição pode ser representada pelas coordenadas de um ponto fixo arbitrário no respectivo corpo rígido. Sendo  $O_{xyz}$  um eixo coordenado fixo na terra e o ponto  $O'$  um ponto fixo arbitrário no corpo rígido, como mostra a Figura 2.1. Então a posição do corpo rígido é representada, tendo como referência o sistema de coordenadas  $O_{xyz}$ . Dado por

$$\mathbf{x}_0 = (x_0 \ y_0 \ z_0) \quad (2-1)$$

Onde  $\mathbf{x}_0$  é o vetor coluna  $3 \times 1$ .

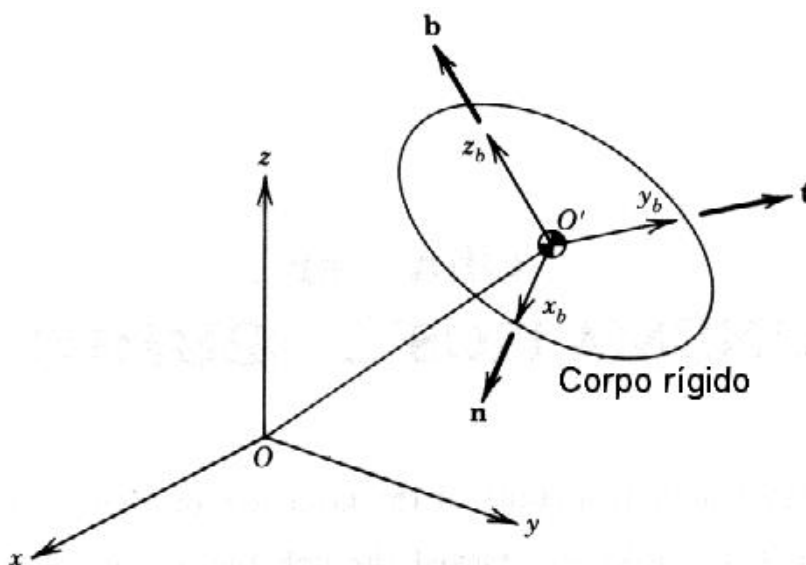


Figura 2.1 - Posição e orientação de um corpo rígido.

FONTE: MEGGIOLARO, Marco. A. Robótica na indústria: Modelagem e simulação. Dinâmica e controle de sistemas robóticos. Curso de especialização CPG/FT-UFAM, 2005. Apostila.

Para representar a orientação do corpo rígido, três eixos coordenados  $x_b$ ,  $y_b$  e  $z_b$  são anexados ao corpo rígido como mostrado na Figura 2.1.

Esses eixos formam outro sistema de eixos coordenados  $O'x_b, y_b, z_b$  o qual se move com o corpo rígido. A orientação do corpo rígido é então representada pelas direções desses eixos coordenados, sendo  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{b}$  os valores unitários nas direções dos eixos coordenados  $x_b$ ,  $y_b$  e  $z_b$  respectivamente. As componentes de cada vetor unitário são as projeções no eixo de coordenadas fixas  $O_{-xyz}$ , por conveniência, combinando os três vetores juntos e reescreve-se usando uma matriz  $\mathbf{R}_{3 \times 3}$ :

$$\mathbf{R} = [\mathbf{n}, \mathbf{t}, \mathbf{b}] \quad (2-2)$$

A matriz  $\mathbf{R}$  descreve completamente a orientação de um corpo rígido. Com referência ao sistema de coordenadas fixo  $O_{-xyz}$ . Note que os vetores coluna da matriz  $\mathbf{R}$  são ortogonais

$$\mathbf{n}^T \mathbf{t} = 0 \quad \mathbf{t}^T \mathbf{b} = 0 \quad \mathbf{b}^T \mathbf{n} = 0 \quad (2-3)$$

e temos como comprimento

$$|\mathbf{n}| = 1 \quad |\mathbf{t}| = 1 \quad |\mathbf{b}| = 1 \quad (2-4)$$

(onde  $|\mathbf{a}|$  designa a norma Euclidiana de vetor  $|\mathbf{a}|$ ). Toda matriz cujo vetores coluna tem comprimento unitário e são ortogonais entre si, é tida como uma matriz ortonormal.

### 2.1.2 Transformação de coordenadas

Seja P um ponto no espaço como mostra a Figura 2.2. Nós representamos as coordenadas do ponto P como referência ao ponto de eixo fixo  $O_{-xyz}$  por

$$\mathbf{x} = (x \ y \ z)^T \quad (2-5).$$

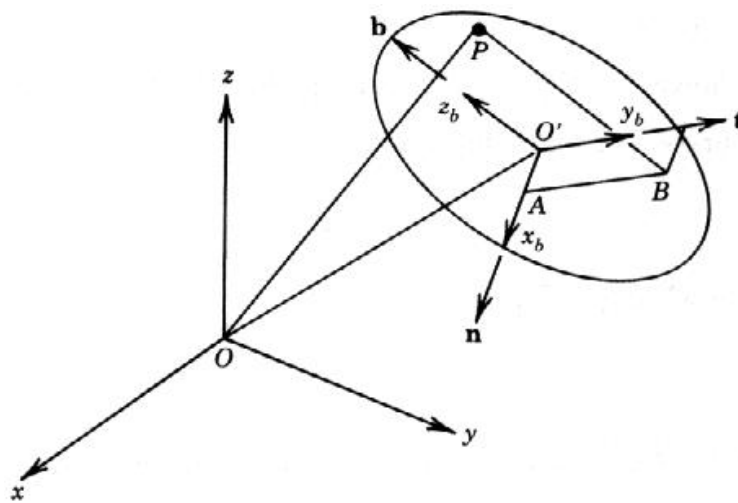


Figura 2.2 - Transformação de coordenadas.

FONTE: MEGGIOLARO, Marco. A. Robótica na indústria: Modelagem e simulação. Dinâmica e controle de sistemas robóticos. Curso de especialização CPG/FT-UFAM, 2005. Apostila.

A posição do ponto P pode também ser representada com referências ao sistema de eixos coordenados fixos no corpo rígido  $O'-x_b y_b z_b$ , por

$$\mathbf{x}^b = (u \ v \ w)^T \quad (2-6)$$

A sobrescrição <sup>b</sup> indica que o vetor é definido com referência ao sistema de coordenada do corpo. Iremos agora encontrar a relação entre o sistema de coordenada fixo e o sistema de coordenada do corpo. A posição e orientação do corpo rígido que é representado

pelo vetor  $\mathbf{x}_{03 \times 1}$  e a matriz  $\mathbf{R}_{3 \times 3}$  na seção anterior, agora são usados para obter, a transformação de coordenadas. Como mostra na Figura 2.2, o ponto P pode ser encontrado através dos pontos O', A e B representado matematicamente por

$$\mathbf{OP} = \mathbf{OO}' + \mathbf{O}'\mathbf{A} + \mathbf{AB} + \mathbf{BP} \quad (2-7)$$

onde  $\mathbf{OP} = \mathbf{x}$  e  $\mathbf{OO}' = \mathbf{x}_0$ . Nota-se que os vetores  $\mathbf{O}'\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{AB}$  e  $\mathbf{BP}$  são paralelos aos vetores unitários  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{b}$  respectivamente e que seus comprimentos são dados por u, v e w. Assim nós podemos reescrever a expressão acima como:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + u \cdot \mathbf{n} + v \cdot \mathbf{t} + w \cdot \mathbf{b} \quad (2-8)$$

Isto é, da equação (2-2) e (2-6), temos:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{R} \cdot \mathbf{x}^b \quad (2-9)$$

A equação (2-9) descreve a transformação de coordenada do sistema de coordenadas do corpo  $\mathbf{x}^b$  para o sistema de coordenadas fixo  $\mathbf{x}$ .

Nota-se que essa transformação de coordenada é dada em termos de  $\mathbf{x}_0$  e  $\mathbf{R}$ , os quais representam a posição e orientação do corpo rígido ou sistema de coordenadas do corpo relativo ao sistema fixo.

Multiplicando-se ambas os lados da equação (2-9) pela transposta  $\mathbf{R}^T$  da matriz  $\mathbf{R}$ ,

$$\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^T \mathbf{x}_0 + \mathbf{R}^T \mathbf{R} \cdot \mathbf{x}^b \quad (2-10)$$

Da equação (2-3) e (2-4), o produto da matriz  $\mathbf{R}^T \mathbf{R}$  pela regra da mão direita temos:

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}^T \mathbf{n} & \mathbf{n}^T \mathbf{t} & \mathbf{n}^T \mathbf{b} \\ \mathbf{t}^T \mathbf{n} & \mathbf{t}^T \mathbf{t} & \mathbf{t}^T \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^T \mathbf{n} & \mathbf{b}^T \mathbf{t} & \mathbf{b}^T \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-11)$$

Portanto a equação (2-10) reduz-se a:

$$\mathbf{x}^b = -\mathbf{R}^T \mathbf{x}_0 + \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{x}^b \quad (2-12)$$

A equação (2-12) a transformação de coordenadas do sistema de coordenadas fixo para o sistema de coordenadas do corpo, que é a inversa da transformação original (2-8). Assim a transformação inversa é simplesmente obtida pelo uso da transposta da matriz  $\mathbf{R}$ . Portanto, a equação (2-11) mostra que a inversa de uma matriz ortonormal é simplesmente dada pela matriz transposta.

### 2.1.3 Ângulos de Euler

Na seção anterior, nós usamos a matriz  $\mathbf{R}_{3 \times 3}$  para representar a orientação de um corpo rígido ou um sistema de coordenadas anexado ao corpo. Os elementos da matriz, porém não são independentes, a matriz tem nove elementos no total os quais são todos sujeitos às condições de ortogonalidade (2-3) e as condições da unidade de comprimentos (2-4) devido à existência destas 6 condições temos somente 3 dos nove elementos independentes, em outras palavras, a matriz representação da rotação é redundante. Nesta seção a representação da orientação de um corpo rígido que utiliza somente três variáveis independentes é discutida.

Considerando as três rotações do eixo  $O_{-xyz}$  mostradas na Figura 2.4. Em primeiro lugar o sistema de eixos coordenados é rotacionado em torno do eixo  $z$  de um ângulo  $\phi$  (figura 2.4A), em seqüência temos o novo sistema coordenado  $O_{-x'y'z'}$  é rotacionado em torno do eixo  $x'$  por um ângulo  $\theta$  (Figura 2.4 B). Finalmente o segundo sistema de eixos coordenados  $O_{-x''y''z''}$  é então rotacionado em torno do eixo  $z''$  por um ângulo  $\psi$  o sistema coordenado resultante  $O_{-x_b y_b z_b}$  é mostrado na figura 2.6C. Os três ângulos  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$  determinam a orientação do sistema de coordenadas unicamente e são chamados ângulos de Euler. Os ângulos de Euler são independentes e podem variar arbitrariamente entre eles.



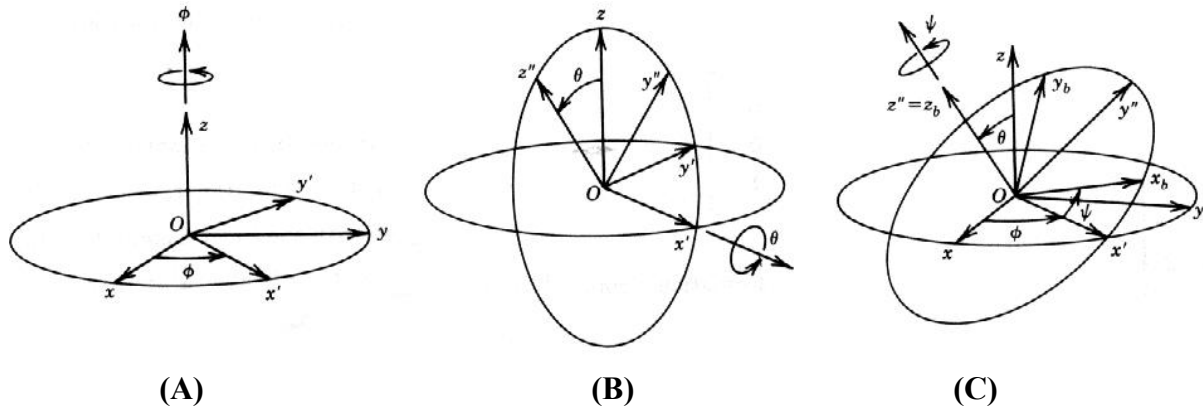


Figura 2.4 - As três rotações usadas para definir os ângulos de Euler.

FONTE: MEGGIOLARO, Marco. A. Robótica na indústria: Modelagem e simulação. Dinâmica e controle de sistemas robóticos. Curso de especialização CPG/FT-UFAM, 2005. Apostila.

As rotações usadas para definir os ângulos de Euler para uma dada orientação do eixo coordenado  $O_{-x_b y_b z_b}$  os ângulos de Euler podem ser determinados como segue; sendo a linha  $Ox'$  na Figura 2.4 C, a interseção entre o plano  $x_b y_b$  e o plano  $x y$ . Esta interseção é dada como a linha dos nós. O ângulo  $\psi$  é definido como o ângulo da linha dos nós ao eixo  $x_b$  na figura 2.4 C, enquanto o ângulo  $\phi$  é entre eixo  $x$  e a linha dos nós. O ângulo  $\theta$  é definido como o ângulo entre o eixo  $z$  ao  $z_b = z''$ . Todos os ângulos são medidos no sentido da mão direita. Assim os ângulos podem ser definidos por uma orientação arbitrária de um sistema de eixos coordenados  $O_{-x_b y_b z_b}$  relativo ao sistema fixo  $O_{-xyz}$ . Note, porém que os ângulos de Euler não são únicos. Os ângulos  $(\phi + \pi, -\phi, \psi + \pi)$  são à mesma orientação que  $(\phi, \theta, \psi)$ .

Os ângulos de Euler são variáveis independentes que determinam a orientação de um sistema de coordenadas unicamente. Iremos encontrar a matriz rotação  $\mathbf{R}$  que representa as 3 rotações consecutivas associadas com os ângulos de Euler. Considere a transformação de coordenada associada com a rotação  $\phi$ . As coordenadas  $\mathbf{x}' = [x', y', z']^T$  são transformadas para coordená-las  $\mathbf{x} = [x, y, z]^T$  pela matriz rotação  $\mathbf{R}_{3 \times 3}(\phi)$  a qual é definida como:

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}_z(\phi) \mathbf{x}'$$

$$\mathbf{R}_z(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\operatorname{sen} \varphi & 0 \\ \operatorname{sen} \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-16)$$

Similarmente a transformação de coordenadas de  $\mathbf{x}'' = [x'', y'', z'']$  para  $\mathbf{x}'$  associada com a rotação  $\theta$  é dada por

$$\mathbf{x}' = \mathbf{R}_{x'}(\theta) \cdot \mathbf{x}''$$

onde

$$\mathbf{R}_{x'}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ 0 & \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2-17)$$

Finalmente, para rotação  $\psi$ , nós temos

$$\mathbf{x}'' = \mathbf{R}_{z''}(\psi) \cdot \mathbf{x}^b$$

$$\mathbf{R}_{z''}(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\operatorname{sen} \psi & 0 \\ \operatorname{sen} \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-18)$$

Combinando as 3 transformações

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}_z(\phi) \cdot \mathbf{R}_{x'}(\theta) \cdot \mathbf{R}_{z''}(\psi) \cdot \mathbf{x}^b \quad (2-19)$$

Reposicionando as matrizes produto acima temos

$$\mathbf{R}(\phi, \theta, \psi) = \mathbf{R}_z(\phi) \cdot \mathbf{R}_{x'}(\theta) \cdot \mathbf{R}_{z''}(\psi) \quad (2-20)$$

A matriz  $\mathbf{R}(\phi, \theta, \psi)$  prover a transformação de coordenada de  $\mathbf{x}^b$  para  $\mathbf{x}$ . Com o resultado de equivalência entre a matriz de transformação de coordenadas e a matriz rotação discutida anteriormente. A matriz  $\mathbf{R}(\phi, \theta, \psi)$  representa a rotação do sistema de ordenadas  $O_{-xyz}$  para o sistema coordenado  $x_b, y_b$  e  $z_b$  com referência ao  $O_{-xyz}$ .

#### 2.1.4 Transformações Homogêneas

Nesta seção, será desenvolvido um método usual para representar a transformação coordenada em uma forma compacta. Trabalharemos na transformação de coordenada dada pela equação (2-9):

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{R}\mathbf{x}^b \quad (2-21)$$

O primeiro do lado direito representa a transformação de translação, enquanto o segundo termo representa a transformação de rotação.

O ponto principal desta seção é derivada a uma simples representação de uma transformação coordenada na quais ambas as translação e rotação são dada por uma simples matriz definimos os vetores 4x1 abaixo:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}^b = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ 1 \end{bmatrix}$$

e a matriz 4x4:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} & \mathbf{R} & \mathbf{x}_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-22)$$

Os vetores  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x}_b$  são argumentados pela adição de “1” como o quarto elemento dando o resultado como um vetor  $4 \times 1$ . A matriz rotação  $\mathbf{R}$  é estendida para uma matriz  $4 \times 4$  pela combinação com o vetor posição  $\mathbf{x}_0$   $3 \times 1$ , com três zeros e um 1 no quarto corredor. A equação (2-21) pode então ser reescrita por

$$\mathbf{X} = \mathbf{A} \mathbf{X}^b \quad (2-23)$$

Assim temos,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & \\ & \mathbf{R} & & \mathbf{x}_0 \\ & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (2-24)$$

Note que a matriz  $\mathbf{A}_{4 \times 4}$  representa ambos a posição e a orientação dos eixos  $O\text{-}x_b y_b z_b$ . Os dois termos do lado direito da equação (2-21) seção reduzidos a um termo único na equação (2-23). A transformação de coordenada dada pela equação (2-23) é dada como uma transformação homogênea.

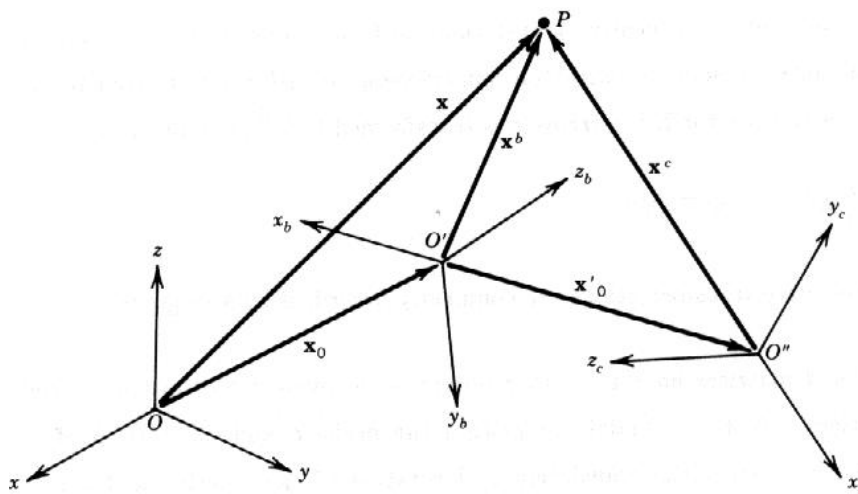


Figura 2.5 - Transformação de coordenadas consecutivas.  
 FONTE: MEGGIOLARO, Marco. A. Robótica na indústria: Modelagem e simulação. Dinâmica e controle de sistemas robóticos. Curso de especialização CPG/FT-UFAM, 2005. Apostila.

A redução da transformação homogênea é particularmente vantajosa quando nós representamos transformações consecutivas. Fazendo  $O''_{-xycyzc}$  ser outro sistema de coordenada, como mostra a Figura 2.5 e  $x^c$  sendo as coordenadas do ponto P com referência ao  $O''_{-xycyzc}$  então

$$x^b = x_0' + R' \cdot x^c \quad (2-25)$$

Onde  $x_0'$  e  $R'$  são o vetor 3x1 e a matriz 3x3 associada com a transformação de  $x^c$  a  $x^b$ . Substituindo (2-25) em (2-21), obtem-se

$$x = x_0 + R \cdot x_0' + R \cdot R' \cdot x^c \quad (2-26)$$

Existem agora três termos no lado direito da equação (2-26). Como a transformação é repetida o número de termos no lado direito aumenta. Em geral  $n$  transformações coordenadas consecutivas leva a um polinômio de ordem  $n$  consistindo de  $(n+1)$  termos não homogêneos. A transformação homogênea que usa a matriz 4x4 no lado esquerdo, prover uma forma compacta que representa qualquer transformação consecutiva com um simples termo. Considerando  $n$  transformações consecutivas do sistema  $n$  de volta ao sistema 0. Sendo  $A_i^{i-1}$  a matriz 4x4 associada com as transformações homogêneas do sistema  $i$  ao sistema  $i-1$ ; então um vetor posição  $X^n$  no sistema  $n$  é transformado para  $X^0$  no sistema 0 por

$$X^0 = A_1^0 \cdot A_2^1 \cdot A_3^2 \cdot \dots \cdot A_n^{n-1} \cdot X^n \quad (2-27)$$

Assim as transformações consecutivas são compostamente descritas por um termo simples.

A matriz  $4 \times 4$  tem duas outras propriedades equivalentes que foram discutidas anteriormente pelas matrizes de rotação.

A matriz  $4 \times 4$  representa a posição e a orientação de um sistema coordenado. E também representa a translação e rotação de um sistema coordenado. Assim, a propriedade equivalente para matrizes rotação mantém-se para matrizes  $4 \times 4$  na qual ambas as translação e rotação são envolvidos.

## **2.2 Modelagem cinemática de braços manipuladores**

### **2.2.1 Cadeia cinemática aberta**

As ferramentas que foram desenvolvidas anteriormente são agora aplicadas a modelagem cinemática de Braços manipuladores.

Um braço manipulador é basicamente uma série de corpos rígidos em uma estrutura cinemática. A Figura 2.6 mostra um braço manipulador modelado como uma série de linhas de corpos rígidos. Tal como elas em série ou estrutura de “*loop*” aberta que podemos chamar como uma cadeia cinemática aberta. A maioria dos robôs industriais existentes e braços de pesquisas são cadeias cinemáticas abertas ou uma estrutura equivalente. O braço manipulador discutido neste capítulo são todos tratados como uma cadeia cinemática aberta.

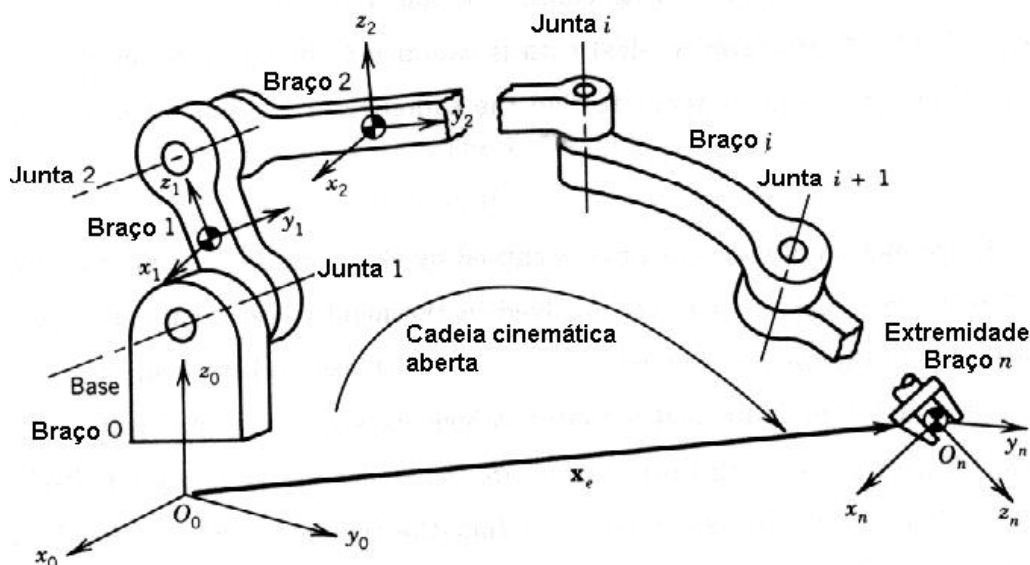


Figura 2.6 - Cadeia cinemática aberta.

FONTE: MEGGIOLARO, Marco. A. Robótica na indústria: Modelagem e simulação.

Dinâmica e controle de sistemas robóticos. Curso de especialização CPG/FT-UFAM, 2005. Apostila.

Cada elo, ou seja, “*link*” do membro da cadeia cinemática aberta pode ser numerado em série de 0 a  $n$ , como mostra a Figura 2.6. A base do elo, a qual usualmente é fixado a referência (origem) é numerada como zero por conveniência. O elo mais distante é numerado de  $n$ . A *performance* de um braço manipulador é realizado pelo movimento de um efetuador anexado ao ultimo elo, nosso primeiro passo é analisar o movimento do último elo ou efetuador.

Iniciando, para representar a posição e orientação do efetuador nós fixamos um sistema de eixos coordenados  $O_n-x_n-y_n-z_n$  no último elo. A localização do sistema de eixo coordenado é descrito como referencia a outro sistema de eixos  $O_0-x_0-y_0-z_0$ , fixado na origem referencial (o elo base), como mostrado na Figura 2.6. Assim a localização do efetuador pode ser determinada pelo estudo da posição e orientação de cada link do braço em série da base ao topo.

Para isso, nós fixamos um sistema de eixos coordenados em cada elo, determinado eixo  $O_{i-X_iY_iZ_i}$  ao elo  $i$ . Descreve-se a posição e a orientação do eixo  $O_{i-X_iY_iZ_i}$  relativo ao anterior  $O_{i-1-X_{i-1}Y_{i-1}Z_{i-1}}$  usando a matriz 4x4 descrevendo a transformação homogênea entre esses eixos. A posição e a orientação do efetuador são então obtidas pelas transformações homogêneas consecutivas que vai do último sistema de eixos voltando ao sistema de eixos das bases admitindo que o braço manipulador assuma ser uma corrente cinemática aberta, nós podemos aplicar as transformações em série para encontrar a localização do efetuador com referências ao sistema de eixos da base.

O movimento relativo dos elos adjacentes é causado pelo movimento das juntas de conexão dos dois elos. Existe um total de  $n$  juntas envolvidas em um braço manipulador consistindo de  $(n+1)$  elos, como mostra a Figura 2.6

Nós nos referimos a junta entre elo  $i-1$  e elo  $i$  como junta  $i$ . Cada junta é conduzida por um atuador individual o qual causa o deslocamento da junta. Assim a posição e orientação do efetuador são determinadas pelo deslocamento da junta  $n$  o primeiro passo é encontrar a relação funcional entre a localização do efetuador e o deslocamento da junta.

### 2.2.2 Notação de Denavit – Hartenberg

Nesta seção será discutida a descrição da relação cinemática entre um par de elos adjacentes envolvidos em uma cadeia cinemática aberta. A notação de Denavit – Hartenberg é introduzida como um método cinemático descrevendo esta relação. O método é baseado em uma representação por matriz 4x4 da posição e da orientação do corpo rígido. É usado um mínimo de parâmetros para descrever completamente a relação cinemática.



A Figura 2.7 mostra um par de elos adjacentes, elo  $i-1$  e o elo  $i$  e suas juntas associadas, juntas  $i-1$ ,  $i$  e  $i+1$ . A linha  $H_iO_i$  na figura é a normal comum entre os eixos das juntas  $i$  e  $i+1$ . A relação entre os dois elos é descrita pela posição e orientação relativa aos dois sistemas e eixos coordenados anexados aos dois elos. Na notação de Denavit – Hartenberg a origem do  $i$ -ésimo sistema de eixos coordenados  $O_i$  é locado na interseção do eixo da junta  $i+1$  e a normal comum entre o eixo da junta  $i$  e  $i+1$  como mostra a Figura 2.7.

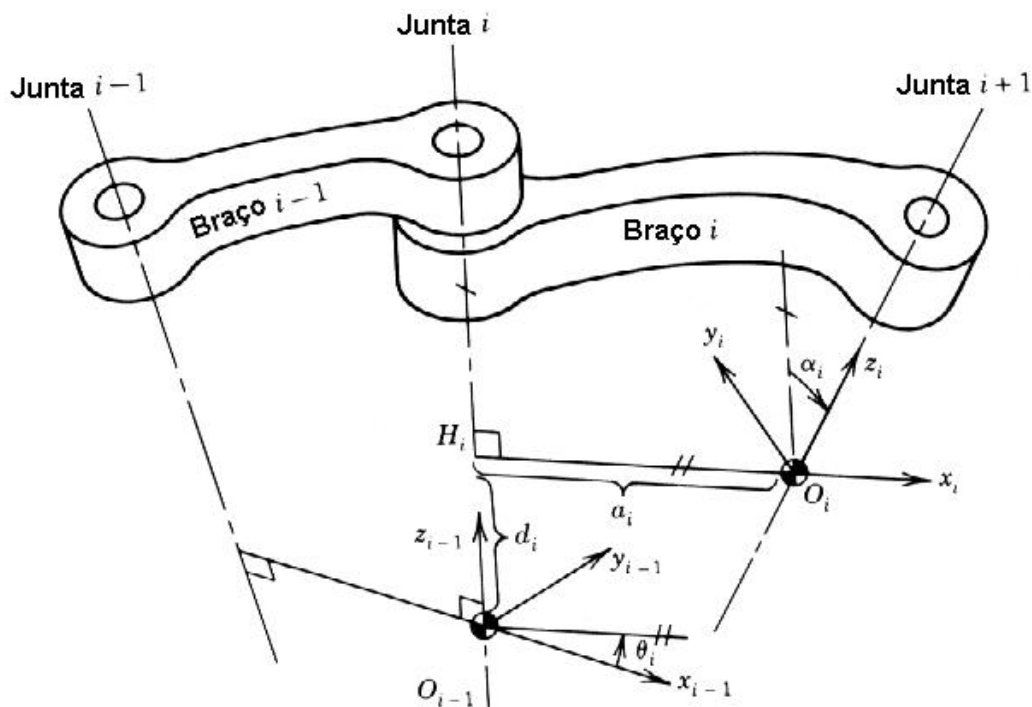


Figura 2.7 - Notação de Denavit-Hartenberg.

FONTE: MEGGIOLARO, Marco. A. Robótica na indústria: Modelagem e simulação. Dinâmica e controle de sistemas robóticos. Curso de especialização CPG/FT-UFAM, 2005. Apostila.

Note que os eixos do elo  $i$  estão na junta  $i+1$ , o eixo  $x_i$  é direcionando ao longo da extensão da linha da normal comum, enquanto o eixo  $z_i$  está ao longo do eixo da junta  $i+1$  e finalmente o eixo  $y_i$  é escolhido tal como a resultante que compõe os eixos  $O_i-x_i-y_i-z_i$  formando uma sistema coordenado de acordo com a regra da mão direita.

A posição relativa de dois sistemas de eixos coordenados pode ser completamente determinada pelos quatro parâmetros seguintes:

- $a_i$ , o comprimento do normal comum;
- $d_i$ , a distância entre a origem  $O_{i-1}$  e o ponto  $H_i$ ;
- $\alpha_i$ , o ângulo entre a o eixo da junta  $i$  e o  $z_i$  seguinte a regra da mão;
- $\theta_i$ , o ângulo entre o eixo  $x_{i-1}$  e a normal comum  $H_iO_i$  em torno do eixo  $z_{i-1}$  seguindo a regra da mão-direita.

Os parâmetros  $a_i$  e  $\alpha_i$  são constantes que são determinadas pela geometria do elo  $a_i$  representa o comprimento do elo e  $\alpha_i$  é o ângulo de giro entre os eixos das duas juntas. Os outros dois parâmetros  $d_i$  e  $\theta_i$  variam com o movimento da junta.

Existem dois tipos de mecanismo de juntas usados em braços manipuladores: juntas de revolução a qual os elos adjacentes rotacionam entre si em torno do eixo juntos; e a junta prismática na qual os elos adjacentes transladam linearmente entre si, ao longo do eixo da junta. Para junta de revolução, o parâmetro  $\theta_i$  é a variável que representa o deslocamento da junta, enquanto  $d_i$  é a variável que representa o deslocamento da junta, enquanto  $O_i$  é constante.

Formulando agora a relação cinemática entre os elos adjacentes usando matrizes 4x4 e utilizando a propriedade equivalente discutida na seção 2.1, a matriz 4x4 representa a localização dos eixos coordenados  $i$  relativo ao sistema de eixos  $i-1$  podendo ser determinado pela consideração da transformação de coordenada associada. A Figura 2.8 mostra os dois

eixos coordenados  $O_{i-1}x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1}$  e  $O_{i-1-x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1}}$  e o sistema de eixos coordenados intermediário,  $H_i$ - $x'y'z'$ , anexado no ponto  $H_i$ . Sendo  $\mathbf{X}^i$ ,  $\mathbf{X}'$  e  $\mathbf{X}^{i-1}$  vetores posição  $4 \times 1$  em  $O_{i-1}x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1}$ ;  $H_i-x'y'z'$ ; e  $O_{i-1-x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1}}$ , respectivamente. Pela Figura 2.8, a transformação de coordenadas de  $\mathbf{X}^i$  para  $\mathbf{X}'$  é dado por

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}_i^{\text{int}} \mathbf{X}^i \quad (2-28)$$

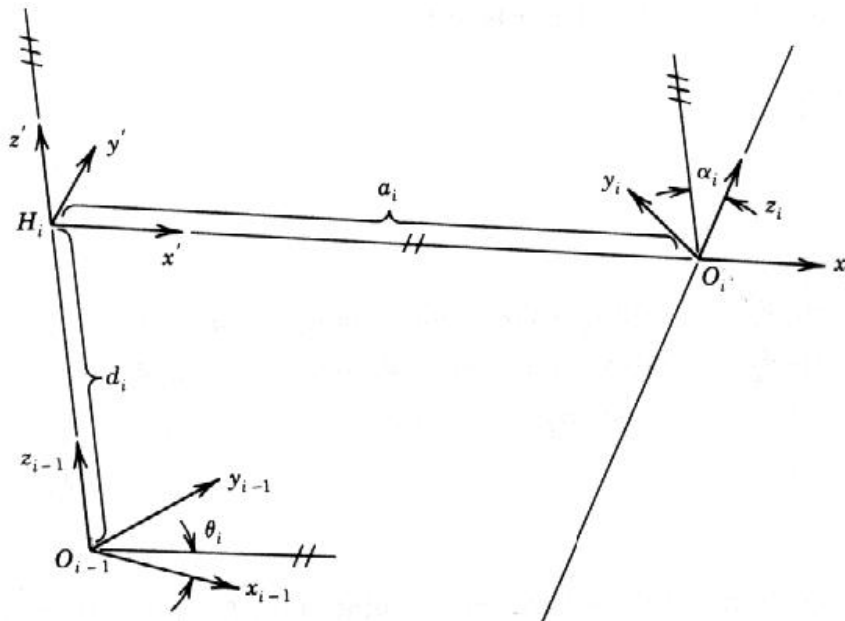


Figura 2.8 - Relação entre os eixos coordenados adjacentes na notação de Denavit-Hartenberg.  
 FONTE: MEGGIOLARO, Marco. A. Robótica na indústria: Modelagem e simulação. Dinâmica e controle de sistemas robóticos. Curso de especialização CPG/FT-UFAM, 2005. Apostila.

Onde

$$\mathbf{A}_i^{\text{int}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \mathbf{a}_i \\ 0 & \cos \alpha_i & -\text{sen} \alpha_i & 0 \\ 0 & \text{sen} \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-29)$$

Giro em relação ao eixo x.  $\mathbf{A}_i^{\text{int}}$  - sistema intermediário.

Analogamente a transformação de  $\mathbf{X}'$  para  $\mathbf{X}_{i-1}$  é dada por

$$\mathbf{X}^{i-1} = \mathbf{A}_{int}^{i-1} \mathbf{X}' \quad (2-30)$$

$$\mathbf{A}_i^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\text{sen} \theta_i & 0 & 0 \\ \text{sen} \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{d}_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-31)$$

Giro em relação ao eixo z.

Combinando as equações (2-28) e (2-30) chega-se a

$$\mathbf{X}^{i-1} = \mathbf{A}_{int}^{i-1} \mathbf{A}_t^{int} \mathbf{X}^i = \mathbf{A}_i^{i-1} \mathbf{X}^i \quad (2-32)$$

Onde

$$\mathbf{A}_i^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\text{sen} \theta_i \cos \alpha_i & \text{sen} \theta_i \text{sen} \alpha_i & \mathbf{a}_i \cos \theta_i \\ \text{sen} \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \text{sen} \alpha_i & \mathbf{a}_i \text{sen} \theta_i \\ 0 & \text{sen} \alpha_i & \cos \alpha_i & \mathbf{d}_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-33)$$

A matriz  $\mathbf{A}_i^{i-1}$  representa a posição e orientação do eixo  $i$  relativo ao eixo  $i-1$ . Como mostrado anteriormente o primeiro dos três vetores das colunas  $3 \times 1$  da matriz  $\mathbf{A}_i^{i-1}$  contém a direção dos co-senos nos eixos coordenados do sistema  $i$ , enquanto o último vetor coluna  $3 \times 1$  representa a posição da origem  $O_i$ .

### 2.2.3 Equações cinemáticas

Usando a notação de Denavit- Hartenberg foram expressos a posição e a orientação do efetuador como um função do deslocamento da junta. O deslocamento de cada junta é também o ângulo  $\theta_i$  ou a distância  $d_i$  que dependerá do tipo de junta. Em geral denota-se o deslocamento da junta por  $q_i$ , o qual é definido como

$$q_i \equiv \theta_i \quad \text{para junta de revolução}$$

$$q_i \equiv d_i \quad \text{para junta prismática}$$

A posição e orientação do elo  $i$  relativo ao elo  $i-1$  é então descrita como uma função de  $q_i$ , usando a matriz  $\mathbf{A}_i^{i-1}(\mathbf{q}_i)$ .

Para descrever a posição e a orientação do último elo com referência ao sistema de eixos da base em função dos deslocamentos das juntas,  $q_i$  até  $q_n$ . Como mostrado na Figura 2.9. O braço manipulador consiste de  $(n+1)$  elos da base até o efetuador, nos quais as localizações relativas dos elos adjacentes são representados por matrizes  $4 \times 4$ . Considerando  $n$  transformações de coordenadas consecutivas ao longo da série de elos, pode-se derivar a localização do efetuador visto do sistema coordenado de eixos da base. Da equação (2-27) a posição e a orientação do último elo relativo ao sistema da base são dadas por

$$\mathbf{T} = \mathbf{A}_1^0(\mathbf{q}_1) \cdot \mathbf{A}_2^1(\mathbf{q}_2) \cdot \mathbf{A}_3^2(\mathbf{q}_3) \cdot \dots \cdot \mathbf{A}_n^{n-1}(\mathbf{q}_n) \quad (2-34)$$

Onde  $\mathbf{T}$  é a matriz  $4 \times 4$  que representa a posição e a orientação do último elo com referência a base, como mostrado na Figura 2.9. A equação (2-34) expõe a relação funcional

entre a posição e a orientação com os deslocamentos de todas as juntas envolvidas na cadeia cinemática aberta. A equação é dada como a equação cinemática do braço manipulador, e governa o comportamento cinemático fundamental do braço.

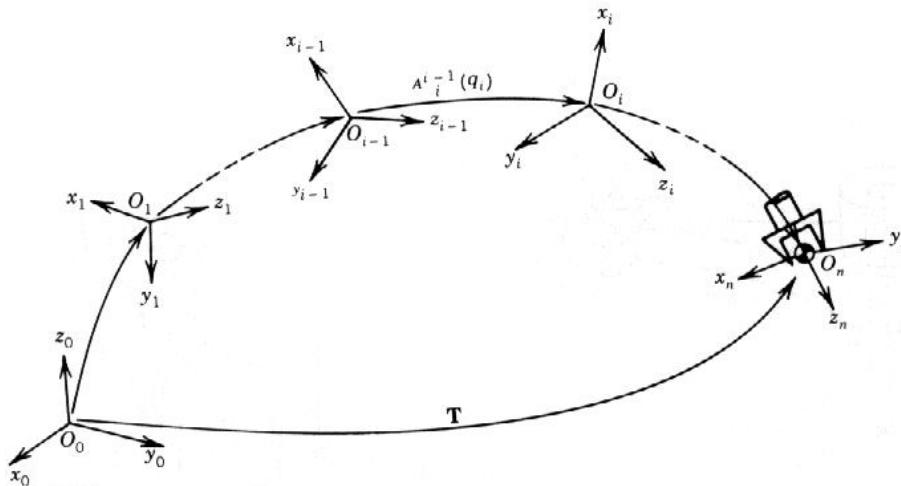


Figura 2.9 - Representação da posição do efetuador pela matriz 4x4.

FONTE: MEGGIOLARO, Marco. A. Robótica na indústria: Modelagem e simulação. Dinâmica e controle de sistemas robóticos. Curso de especialização CPG/FT-UFAM, 2005. Apostila.

Existem muitas exceções para as regras da notação de Denavit- Hartenberg. Para definir o sistema coordenado anexado a cada elo, a normal comum entre os dois eixos das juntas deve ser determinado para o elo. Porém os normais comuns existem tanto para a extremidade como para base apesar de cada um deles ter apenas somente um eixo da junta. Para esses dois elos, o sistema de eixos coordenados, é definido como segue, para o último elo, a origem do sistema coordenado pode ser escolhido em qualquer ponto conveniente no efetuador, como mostra a Figura 2.10.

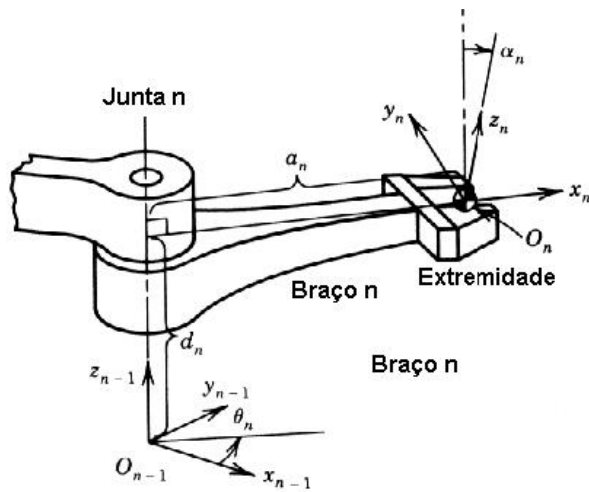


Figura 2.10 - Localização do último sistema de eixos coordenados  
 FONTE: MEGGIOLARO, Marco. A.  
 Robótica na indústria: Modelagem e

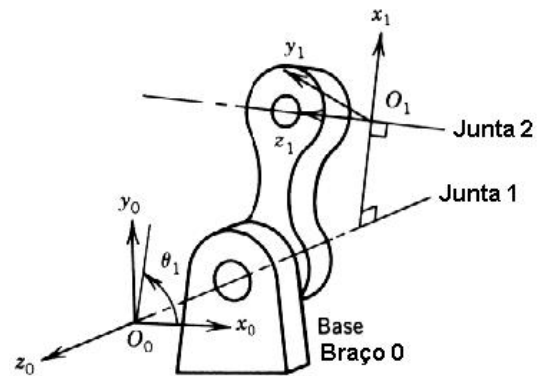


Figura 2.11 - Localização do sistema de eixos coordenados da base.  
 FONTE: MEGGIOLARO, Marco. A.  
 Robótica na indústria: Modelagem e

A orientação dos eixos coordenados, porém deve ser determinada ficando o eixo  $x_n$  interceptando o eixo da última junta em um ângulo direito. O ângulo  $\alpha_n$  na Figura 2.10 é arbitrário para o elo da base, a origem do sistema de eixos coordenados pode ser escolhido em um ponto arbitrário no eixo da junta 1, como mostra a Figura 2.11. O eixo  $z_0$  deve ser paralelo ao eixo da junta, enquanto a orientação dos eixos  $x$  e  $y$  em torno do eixo da junta é arbitrário.

Mais adiante, existem duas exceções referentes aos elos intermediários entre os elos da base e o último elo. Onde os eixos da junta do elo intermediário são paralelos, a normal comum entre eles não é única. A escolha da normal comum é então arbitrária. Usualmente uma das escolhas da normal comum que passa através  $O_{i-1}$ , na Figura 2.7 dessa forma a distância  $d_i$  torna-se zero.

A outra exceção consiste em juntas prismáticas. Para uma junta prismática somente a direção do eixo da junta é significativamente, por isso a posição do eixo da junta pode ser escolhido do arbitrariamente.

Segue abaixo um exemplo para melhor entendimento da modelagem cinemática.

Exemplo 1: O modelo cinemática de um braço manipulador 5R-1P

A Figura 2.12 mostra um braço manipulador de 6 graus de liberdade com 5 juntas de revolução e uma junta prismática, ou 5R-1P braço manipulador. Este tipo de estrutura do braço tem sido usado largamente para robôs comerciais e manipuladores de pesquisa. Vamos agora derivar a equação cinemática para este braço.

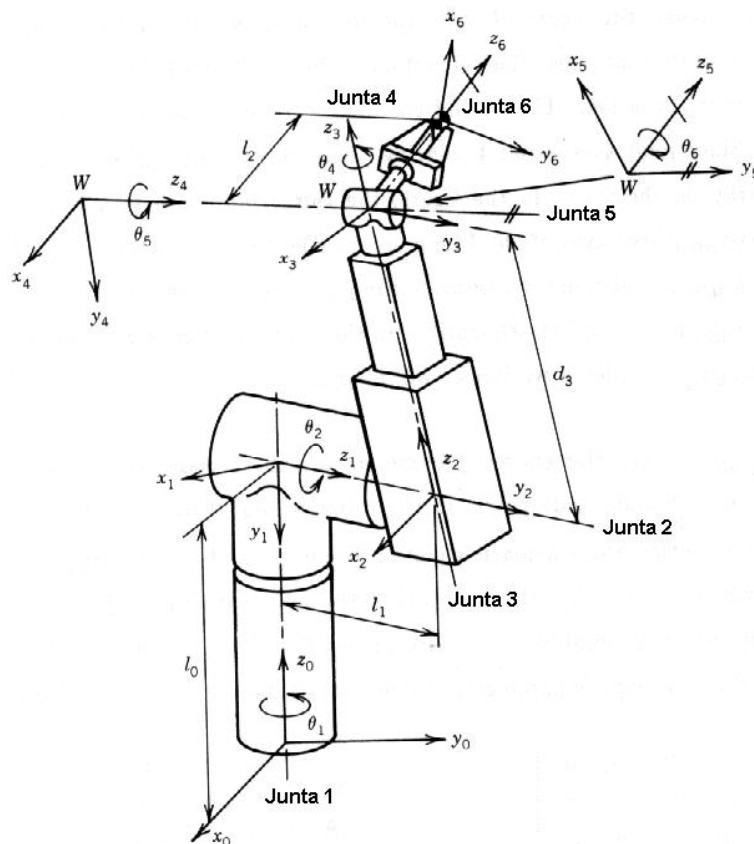


Figura 2.12: Manipulador 5R-1P.

FONTE: MEGGIOLARO, Marco. A. Robótica na indústria: Modelagem e simulação. Dinâmica e controle de sistemas robóticos. Curso de especialização CPG/FT-UFAM, 2005. Apostila.



O primeiro passo da modelagem cinemática é identificar todas as juntas. A primeira junta, junta 1 é uma junta revolvente, a qual rotaciona todo o corpo em torno do eixo vertical. Junta 2 é também uma junta de revolução em torno do eixo horizontal. Junta 3 é uma junta prismática que causa o movimento de translação dos últimos 3 elos, aqui a posição dos eixos das 3 juntas tais escolhida para coincidir com a 4 junta. As últimas 3 juntas são juntas de revolução e seus eixos se interceptarem em um único ponto W mostrado na Figura 2.12.

Segundo passo é posicionar os eixos coordenados em cada elo do braço. O eixo da base é escolhido como sendo a superfície da mesa com o eixo  $z_0$  ao longo do eixo da junta. Os eixos das juntas 1 e 2 interceptam entre si como mostra a Figura 2.12, o comprimento da normal comum é zero, e são perpendiculares entre si. Esta direção é a direção do eixo  $x_1$  de acordo com a notação de Denavit-Hartenberg. O segundo sistema de eixos coordenados é também a interseção dos eixos das juntas 2 e 3. os eixos das juntas 3 e 4 coincidem sua normal comum não é única e pode ser escolhido arbitrariamente no eixo. Na Figura 2.12 o terceiro sistema de eixos coordenados foi escolhido no ponto W assim os três eixos do sistema coordenado são paralelos aqueles do segundo sistema. Os sistemas 4 e 5 também são localizados no ponto W, porque os eixos das juntas se interceptam neste ponto. A origem do sistema final pode ser selecionada arbitrariamente. Na Figura 2.12 é escolhido um ponto apropriado no eixo da última junta na qual um espaço de trabalho será agarrado.

Os parâmetros de Denavit-Hartenberg para estes sistemas de eixos coordenados são listados na Tabela 1. Note que muitos parâmetros na tabela são iguais a zero. Nós definimos os sistemas coordenados para tornar a equação cinemática simples e somente incluir um pequeno número de parâmetros diferentes de zero.

A tabela também mostra que a junta variável (junta 3) é igual ao deslocamento  $d_3$ , e que todas as outras juntas variáveis são ângulos  $\theta_i$ .

Link N°	$\alpha_i$	$a_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	$-90^\circ$	0	$l_0$	$\theta_1$
2	$+90^\circ$	0	$l_1$	$\theta_2$
3	0	0	$d_3$	0
4	$-90^\circ$	0	0	$\theta_4$
5	$+90^\circ$	0	0	$\theta_5$
6	0	0	$l_2$	$\theta_6$

Tabela 1: Parâmetros dos links do manipulador 5R-1P.

FONTE: MEGGIOLARO, Marco. A. Robótica na indústria: Modelagem e simulação. Dinâmica e controle de sistemas robóticos. Curso de especialização CPG/FT-UFAM, 2005. Apostila.

A matriz  $\mathbf{A}_i^{i-1}(\mathbf{q}_i)$  4x4 pode ser determinada pela substituição dos parâmetros listados da Tabela 1, na equação (2-34).

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_1^0(\theta_1) &= \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \mathbf{A}_2^1(\theta_2) &= \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 & 0 \\ s_2 & 0 & -c_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{A}_3^2(d_3) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \mathbf{A}_4^3(\theta_4) &= \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & (2-35) \\
 \mathbf{A}_5^4(\theta_5) &= \begin{bmatrix} c_5 & 0 & s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & -c_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \mathbf{A}_6^5(\theta_6) &= \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Onde  $c_i \equiv \cos(\theta_i)$  e  $s_i \equiv \sin(\theta_i)$ .

A equação cinemática deste braço manipulador é dado por:

$$\mathbf{T} = \mathbf{A}_1^0(\theta_1) \cdot \mathbf{A}_2^1(\theta_2) \cdot \mathbf{A}_3^2(\mathbf{d}_3) \cdot \mathbf{A}_4^3(\theta_4) \cdot \mathbf{A}_5^4(\theta_5) \cdot \mathbf{A}_6^5(\theta_6) \quad (2-36)$$

A posição e orientação  $\mathbf{T}$  do efetuador é representada como uma função dos deslocamentos,  $\theta_1, \theta_2, \mathbf{d}_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6$  das juntas.

## 2.3 Movimento diferencial

Nas seções anteriores a posição e orientação do efetuador do manipulador foram desenvolvidas em relação aos deslocamentos das juntas. O deslocamento da junta corresponde a uma dada localização do efetuador obtida pela solução da equação do manipulador. Esta análise preliminar permite localizar o efetuador do manipulador em uma posição específica no espaço.

Nesta seção será abordado não somente a localização final do efetuador mais também a velocidade na qual o efetuador se move.

Em princípio, para mover o efetuador em uma direção e velocidade específicas, é necessário coordenar o movimento individual das juntas. O foco desta seção é o desenvolvimento de métodos fundamentais para realização de tal movimento coordenado das múltiplas juntas dos manipuladores. Como discutido na seção anterior a posição e a

orientação do efetuador são diretamente envolvidas aos deslocamentos, por isso para o movimento coordenado da junta, nós derivamos a relação diferencial entre os deslocamentos das juntas e a localização do efetuador, resolvendo para o movimento individual da junta.

### 2.3.1 Modelagem cinemática do movimento instantâneo

#### 2.3.1.1 Relações diferenciais

Considerando um manipulador plano de 2 graus de liberdade mostrado na Figura 2.13. Aqui o braço manipulador é locado no plano  $x_0$ - $y_0$ . A equação cinemática que relaciona a posição do efetuador ( $x$ - $y$ ) ao deslocamento das juntas ( $\theta_1, \theta_2$ ) é dada por:

$$\begin{aligned} x(\theta_1, \theta_2) &= l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ y(\theta_1, \theta_2) &= l_1 \text{sen}(\theta_1) + l_2 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned} \quad (2-37)$$

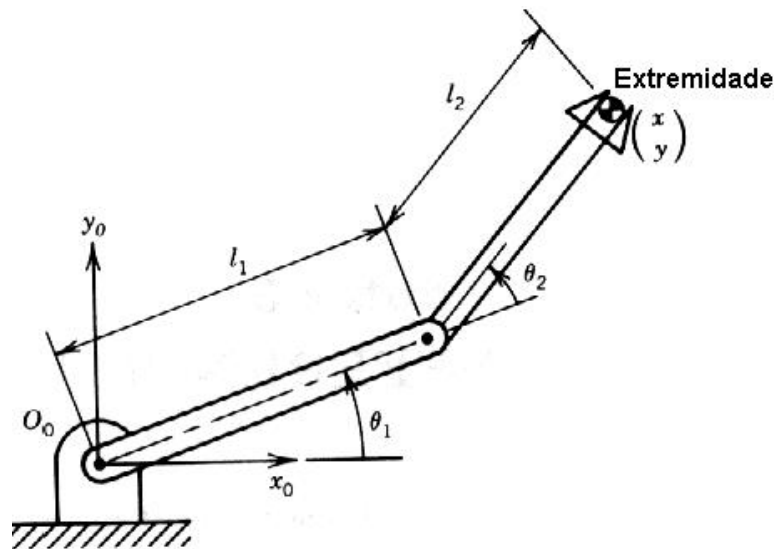


Figura 2.13: Manipulador plano de dois graus de liberdade.  
 FONTE: MEGGIOLARO, Marco. A. Robótica na indústria: Modelagem e simulação. Dinâmica e controle de sistemas robóticos. Curso de especialização CPG/FT-UFAM, 2005. Apostila.

Nesta seção, envolve-se os movimentos pequenos do efetuador em torno de uma posição corrente. A relação para o movimento diferencial é determinada pela diferenciação das equações cinemáticas. Para um manipulador plano de dois graus de liberdade, a relação diferencial é obtida derivando a equação (2-37), então temos

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} d\theta_1 + \frac{\partial x(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2} d\theta_2 \\ dy &= \frac{\partial y(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} d\theta_1 + \frac{\partial y(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2} d\theta_2 \end{aligned} \quad (2-38)$$

Em forma de vetores as equações acima podem ser escritas como:

$$\mathbf{dx} = \mathbf{J} \mathbf{d\theta} \quad (2-39)$$

Onde  $\mathbf{dx}$  e  $\mathbf{d\theta}$  são vetores de deslocamentos infinitesimais definidos como

$$\mathbf{dx} = [dx \ dy]^T \quad \mathbf{d\theta} = [d\theta_1 \ d\theta_2]^T \quad (2-40)$$

e

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y}{\partial \theta_2} \end{bmatrix} \quad (2-41)$$

A matriz  $\mathbf{J}$  compõe as derivadas parciais da função  $x(\theta_1, \theta_2)$  e  $y(\theta_1, \theta_2)$  com respectivo deslocamento  $\theta_1$  e  $\theta_2$ . A matriz  $\mathbf{J}$  é chamada de Jacobiano do manipulador. O Jacobiano do manipulador é a relação infinitesimal entre o deslocamento da junta e a localização do efetuador na posição presente da configuração do braço.

Da equação (2-37), a matriz Jacobiano do manipulador plano de dois graus de liberdade é dado por:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -l_1 \text{sen}(\theta_1) - l_2 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) & -l_2 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \quad (2-42)$$

Note que os elementos do Jacobiano são função dos deslocamentos das juntas e da configuração do braço.

Considerando o instante onde as duas juntas do manipulador plano de 2 graus de liberdade movem-se com velocidades  $\dot{\boldsymbol{\theta}} = [\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2]^T$ , e sendo  $\mathbf{v} = [\dot{x}, \dot{y}]^T$  o resultado do vetor velocidade resultante do efetuador. O Jacobiano representa a relação entre a velocidade das juntas e o resultado das velocidades do efetuador, assim como a relação da posição infinitesimal. Na verdade, dividindo ambos os lados da equação (2-39) por um incremento de tempo infinitesimal  $dt$  obtem-se

$$d\mathbf{x}/dt = \mathbf{J} \cdot d\boldsymbol{\theta}/dt$$

que é,

$$\mathbf{v} = \mathbf{J} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}_2 \quad (2-43)$$

Assim a relação da velocidade das juntas e o efetuador são determinados pelo Jacobiano do manipulador.

Sendo  $\mathbf{J}_1$  e  $\mathbf{J}_2$  dois vetores 2x1 consistindo respectivamente da primeira e a segunda coluna do Jacobiano (2-42). A equação (2-43) pode então ser rescrita como

$$\mathbf{v} = \mathbf{J}_1 \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}_1 + \mathbf{J}_2 \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}_2 \quad (2-44)$$

O primeiro termo do lado direito da equação é a parcela referente a velocidade do efetuador induzida somente pela primeira junta, enquanto o segundo termo representa o resultado da velocidade do movimento apenas da segunda junta. A resultante da velocidade do efetuador é obtida pelo vetor soma dos dois. Cada vetor coluna da matriz Jacobiano representa a velocidade do efetuador gerada pelo movimento da junta correspondente na velocidade unitária onde todas as outras juntas estão imobilizadas.

### 2.3.1.2 Rotações infinitesimais

Na seção anterior trabalhou-se com um manipulador plano simples e foi analisada a translação infinitesimal e a velocidade linear do último ponto (efetuador). Para generalizar o resultado, é necessário incluir a rotação infinitesimal e a velocidade angular para um braço manipulador espacial geral.

Anteriormente, foram desenvolvidas ferramentas matemáticas para representar a orientação espacial de um corpo rígido. Estes métodos utilizam uma matriz rotação 3x3 e os ângulos de Euler que se permitiu calcular as rotações e orientações de ângulos finitos. Porém, rotações infinitesimais ou derivadas no tempo de orientações são substancialmente diferentes de rotações e orientações de ângulos finitos. Como resultado, os métodos de representações de rotações e orientações para ângulos finitos não são apropriados quando movimentos

infinitesimais são considerados. Nesta seção, será tratada a diferença entre rotação finitas e infinitesimais, e então será desenvolvida uma ferramenta matemática para rotações infinitesimais.

Começa-se então reescrevendo a matriz rotação 3x3 representando uma rotação infinitesimal  $d\phi_x$  em torno do eixo x:

$$\mathbf{R}_x(d\phi_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(d\phi_x) & -\text{sen}(d\phi_x) \\ 0 & \text{sen}(d\phi_x) & \cos(d\phi_x) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -d\phi_x \\ 0 & d\phi_x & 1 \end{bmatrix} \quad (2-45)$$

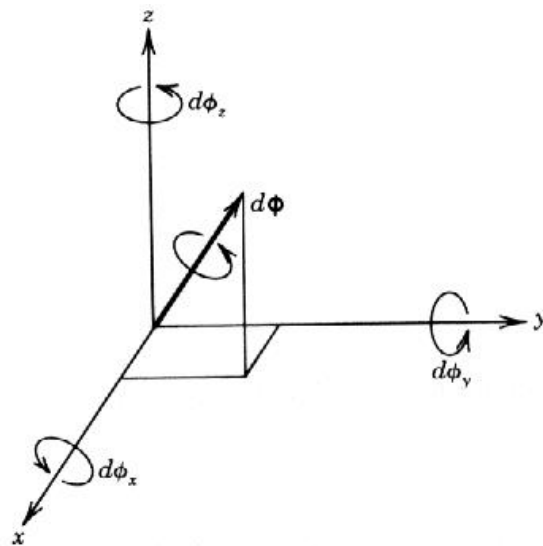


Figura 2.14: Rotação infinitesimal do vetor.

FONTE: MEGGIOLARO, Marco. A. Robótica na indústria: Modelagem e simulação. Dinâmica e controle de sistemas robóticos. Curso de especialização CPG/FT-UFAM, 2005. Apostila.

Note que, sendo  $d\phi_x$  infinitesimal,  $\cos(d\phi_x) = 1$  e  $\text{sen}(d\phi_x) = d\phi_x$ . Para uma rotação infinitesimal em torno dos eixos y e z, similarmente podemos obter a expressão da matriz da mesma forma como na equação (2-45). Sendo  $\mathbf{R}_y(d\phi_y)$  uma matriz de rotação infinitesimal



3x3 em torno do eixo; então o resultado das rotações consecutivas em torno dos eixos x e y são dadas por

$$\mathbf{R}_x(d\phi_x) \cdot \mathbf{R}_y(d\phi_y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -d\phi_x \\ 0 & d\phi_x & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & d\phi_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -d\phi_y & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d\phi_y \\ d\phi_x d\phi_y & 1 & d\phi_x \\ -d\phi_y & d\phi_x & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_x(d\phi_x) \cdot \mathbf{R}_y(d\phi_y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d\phi_y \\ 0 & 1 & -d\phi_x \\ -d\phi_y & d\phi_x & 1 \end{bmatrix} \quad (2-46)$$

Onde o maior termo  $d\phi_x d\phi_y$  é desprezado. Agora troca-se a ordem de rotação  $\mathbf{R}_y(d\phi_y)$  e  $\mathbf{R}_x(d\phi_x)$ , Calculando a matriz produto da mesma forma que a anterior, encontrando que os dois resultados são idênticos, assim

$$\mathbf{R}_x(d\phi_x) \cdot \mathbf{R}_y(d\phi_y) = \mathbf{R}_y(d\phi_y) \cdot \mathbf{R}_x(d\phi_x) \quad (2-47)$$

Portanto, rotações infinitesimais não dependem da ordem de rotação, em outras palavras, elas comutam entre si. Em geral, rotações infinitesimais em torno de x, y e z mostrado na Figura 2.14 podem ser representadas por

$$\mathbf{R}(d\phi_x, d\phi_y, d\phi_z) = \begin{bmatrix} 1 & -d\phi_z & d\phi_y \\ d\phi_z & 1 & -d\phi_x \\ -d\phi_y & d\phi_x & 1 \end{bmatrix} \quad (2-48)$$

A matriz rotação depende somente de 3 ângulos infinitesimais, mas é independente da ordem de rotação.

Sendo  $\mathbf{R}(d\phi_x, d\phi_y, d\phi_z)$  e  $\mathbf{R}(d\phi'_x, d\phi'_y, d\phi'_z)$  duas matrizes de rotações infinitesimais, então a rotação consecutiva dos dois campos se dá por

$$\mathbf{R}(d\phi_x, d\phi_y, d\phi_z) \cdot \mathbf{R}(d\phi'_x, d\phi'_y, d\phi'_z) = \begin{bmatrix} 1 & -(d\phi_z + d\phi'_z) & (d\phi_y + d\phi'_y) \\ (d\phi_z + d\phi'_z) & 1 & (d\phi_x + d\phi'_x) \\ -(d\phi_y + d\phi'_y) & (d\phi_x + d\phi'_x) & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}(d\phi_x, d\phi_y, d\phi_z) \cdot \mathbf{R}(d\phi'_x, d\phi'_y, d\phi'_z) = \mathbf{R}(d\phi_x + d\phi'_x, d\phi_y + d\phi'_y, d\phi_z + d\phi'_z) \quad (2-49)$$

Onde o maior termo é desprezado. Assim o resultado da rotação de duas rotações infinitesimais arbitrárias é simplesmente dado pela soma algébrica dos componentes individuais de cada eixo, em outras palavras, rotações infinitesimais são aditivas; esta é outra importante propriedade das rotações infinitesimais. Assim pode-se escrever a rotação infinitesimal em torno de três eixos na forma de vetor

$$\mathbf{d}\boldsymbol{\phi} = [d\phi_x, d\phi_y, d\phi_z]^T \quad (2-50)$$

Em geral, expressões tal como (2-50) podem ser tratadas como vetores se elas são aditivas e comutativas. Como mostrado acima, rotações infinitesimais são aditivas e comutativas. Tratando, portanto as rotações infinitesimais denotada pela expressão (2-50) como um vetor, pois, possui todas as propriedades que os vetores no campo que os vetores devem satisfazer. Geometricamente, o vetor rotação infinitesimal  $\mathbf{d}\boldsymbol{\phi}$  pode ser representado

por uma seta representando o eixo de rotação, e o comprimento representa a magnitude da rotação.

Deve-se observar que a representação do vetor não é permitida para rotações finitas, apenas é válida somente para rotações infinitesimais.

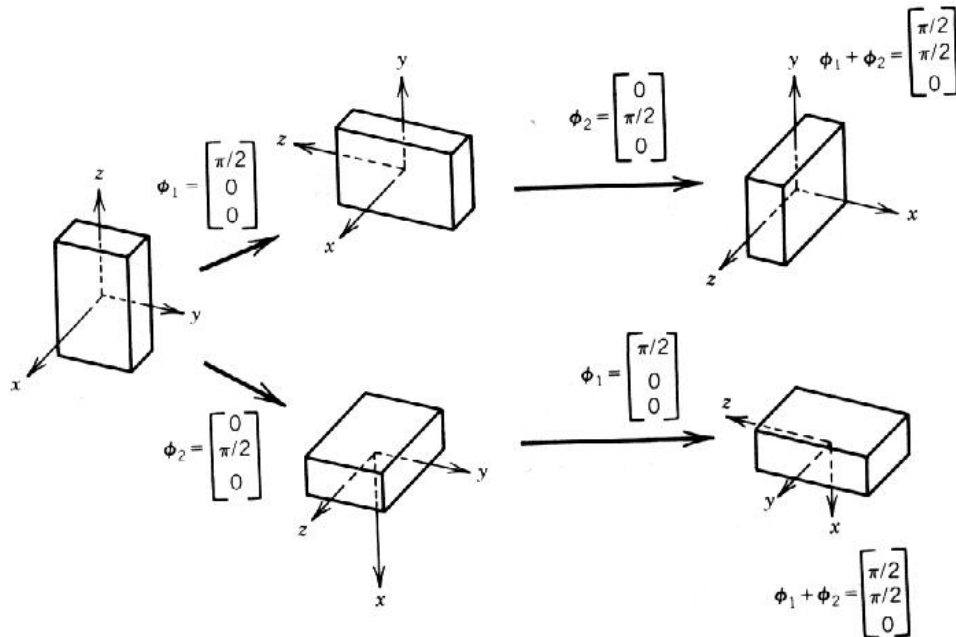


Figura 2.15: Rotação de ângulos finitos.

FONTE: MEGGIOLARO, Marco. A. Robótica na indústria: Modelagem e simulação. Dinâmica e controle de sistemas robóticos. Curso de especialização CPG/FT-UFAM, 2005. Apostila.

A Figura 2.15 demonstra que rotações finitas não podem ser tratadas como vetores. A caixa retangular é rotacionada em torno de x e y em ordens diferentes. Quando é rotacionada primeiro em torno do eixo x e depois em y o resultado da orientação é dado no topo da Figura 2.15. Se a rotação consecutiva é realizada primeiro em y depois em x, a orientação é mostrada na parte inferior da Figura 2.15, a qual é completamente diferente. Porém, se for representada a rotação individual pelos vetores tridimensionais  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , e usarmos o vetor adição, a resultante dos vetores correspondentes as duas diferentes ordens de rotação seria idênticas.

Assim, rotações finitas não podem ser tratadas como vetores.

### 2.3.1.3 Cálculo do Jacobiano do manipulador

Nesta seção será abordado um braço manipulador geral de  $n$  graus de liberdade e calculado o Jacobiano associado ao manipulador com uma translação e rotação infinitesimais do efetuador como mostrado na Figura 2.16. A translação infinitesimal do efetuador é dada por um vetor tridimensional  $\mathbf{dx}_e$  e a representação da rotação é dada pelo vetor tridimensional  $\mathbf{d\phi}_e$ .

Ambos os vetores são representados em referência ao sistema coordenado de eixos da base  $O_0-x_0y_0z_0$ . Por conveniência, combina-se os dois vetores e definimos o seguinte vetor  $\mathbf{dp}$  six-dimensional

$$\mathbf{dp} = \begin{bmatrix} \mathbf{dx}_e \\ \mathbf{d\phi}_e \end{bmatrix}_{6 \times 1} \quad (2-51)$$

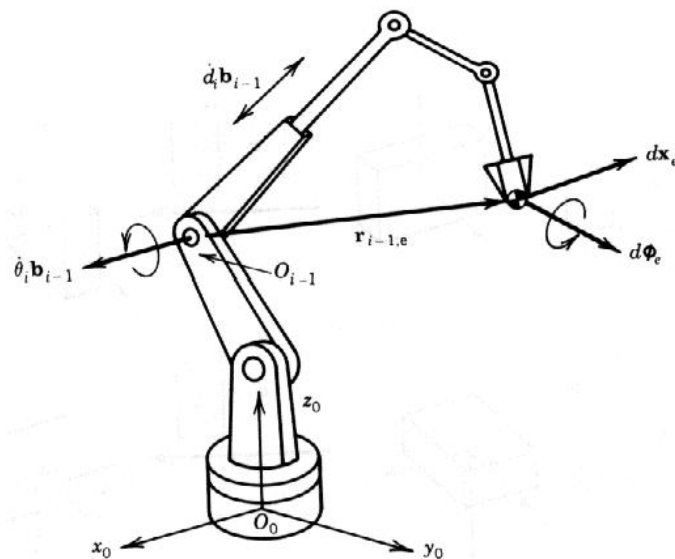


Figura 2.16: Deslocamentos infinitesimais do efetuador gerado pelas juntas individuais.  
 FONTE: MEGGIOLARO, Marco. A. Robótica na indústria: Modelagem e simulação. Dinâmica e controle de sistemas robóticos. Curso de especialização CPG/FT-UFAM, 2005. Apostila.

Dividindo ambos os lados por um incremento de tempo infinitesimal  $dt$ , nós obtemos a velocidade e a velocidade angular do efetuador

$$\dot{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_e \\ \boldsymbol{\omega}_e \end{bmatrix}_{6 \times 1} \quad (2-52)$$

Como antes, a velocidade do efetuador e velocidade angular podem ser escritos como uma função linear das velocidades das juntas usando o Jacobiano do manipulador

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{J} \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (2-53)$$

Onde  $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n]^T$  é o vetor velocidade 4 x 1 da junta.

A dimensão da matriz Jacobiano é agora 6 x  $n$ ; as primeiras três linhas de vetores estão associadas a velocidade linear,  $\mathbf{v}_e$ , enquanto as últimas três correspondem a velocidade angular,  $\boldsymbol{\omega}_e$ . Cada coluna de vetor representa a velocidade linear e a velocidade angular geradas pela junta individual correspondente, para determina cada vetor coluna da matriz Jacobiano como função das parâmetros do elo e da configuração do braço, admite-se  $\mathbf{J}_{Li}$  e  $\mathbf{J}_{Ai}$  vetores coluna 3x1 como sendo o Jacobiano da matriz associada com as velocidades linear e angular, respectivamente isto é, divide-se a matriz Jacobiano, assim tem-se

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{L1} & \mathbf{J}_{L2} & \dots & \mathbf{J}_{Ln} \\ \mathbf{J}_{A1} & \mathbf{J}_{A2} & \dots & \mathbf{J}_{An} \end{bmatrix} \quad (2-54)$$

Usando o  $\mathbf{J}_{Li}$ , pode-se escrever a velocidade linear do efetuador como

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{J}_{L1}\dot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{J}_{L2}\dot{\mathbf{q}}_2 + \dots + \mathbf{J}_{Ln}\dot{\mathbf{q}}_n \quad (2-55)$$

Se a junta  $i$  for prismática, ela produz uma velocidade linear no efetuador na mesma direção do eixo da junta. Sendo  $\mathbf{b}_{i-1}$  o vetor ao longo da direção do eixo da junta  $i$ , como mostra na Figura 1.16 e  $\dot{\mathbf{d}}_i$  a velocidade escalar da junta nesta direção, então obtem-se

$$\mathbf{J}_{Li}\dot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{b}_{i-1}\dot{\mathbf{d}}_i \quad (2-56)$$

Nota-se que na notação de Denavit – Hartenberg a velocidade da junta  $\dot{\mathbf{d}}_i$  é medida ao longo do eixo  $z_{i-1}$ . Se a junta é de revolução, como mostrado na Figura 2.10, ela rotaciona do elo  $i$  ao  $n$  em uma velocidade angular  $\boldsymbol{\omega}_i$  dada por

$$\boldsymbol{\omega}_i = \mathbf{b}_{i-1}\dot{\boldsymbol{\theta}}_i \quad (2-57)$$

Essa velocidade angular produz uma velocidade linear no efetuador. Sendo  $\mathbf{r}_{i-1,e}$  o vetor posição de  $O_{i-1}$  ao efetuador, como mostrado na Figura 2.16, então a velocidade linear gerada pela velocidade de angular  $\boldsymbol{\omega}_i$  é dada por

$$\mathbf{J}_{Li}\dot{\mathbf{q}}_i = \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{i-1,e} = (\mathbf{b}_{i-1} \times \mathbf{r}_{i-1,e}) \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}_i \quad (2-58)$$

Onde  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  representa o vetor produto de dois vetores  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ .

Assim a velocidade do efetuador é determinada também pelas equações (2-56) ou (2-58) dependendo do tipo de junta.

Similarmente, a velocidade angular do efetuador pode ser expressa como uma combinação linear dos vetores coluna  $\mathbf{J}_{Ai}$  na equação (2-54),

$$\boldsymbol{\omega}_e = \mathbf{J}_{A1}\dot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{J}_{A2}\dot{\mathbf{q}}_2 + \dots + \mathbf{J}_{An}\dot{\mathbf{q}}_n \quad (2-59)$$

Quando a junta  $i$  é uma junta prismática, ela não gera velocidade angular no efetuador, portanto

$$\mathbf{J}_{Ai}\dot{\mathbf{q}}_i = 0 \quad (2-60)$$

Se a junta é uma junta de revolução, a velocidade angular é dada por

$$\mathbf{J}_{Ai}\dot{\mathbf{q}}_i = \boldsymbol{\omega}_i = \mathbf{b}_{i-1}\dot{\boldsymbol{\theta}}_i \quad (2-61)$$

As equações (2-56), (2-58), (2-60) e (2-61) determinam todos elementos do Jacobiano do manipulador. Para resumir:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_{Li} \\ \mathbf{J}_{Ai} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix} \text{ para uma junta prismática} \quad (2-62)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_{Li} \\ \mathbf{J}_{Ai} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{i-1} \times \mathbf{r}_{i-1,e} \\ \mathbf{b}_{i-1} \end{bmatrix} \text{ para uma junta de revolução} \quad (2-63)$$

Os vetores  $\mathbf{b}_{i-1}$  e  $\mathbf{r}_{i-1}$  nas expressões acima são funções dos deslocamentos das juntas. Estes vetores podem ser calculados usando a transformação de coordenadas discutida nas seções anteriores. A direção do eixo da junta  $i-1$  é representada por  $\bar{\mathbf{b}} = [0,0,1]^T$  com referência ao sistema coordenado  $i-1$ , porque o eixo da junta está ao longo do eixo  $z_{i-1}$ . Esse vetor  $\bar{\mathbf{b}}$  pode ser transformado em um vetor a qual está definido com referência ao sistema coordenado da base, que é  $\mathbf{b}_{i-1}$ , usando a matriz rotação 3x3  $\mathbf{R}_j^{j-1}(q_j)$  como:

$$\mathbf{b}_{i-1} = \mathbf{R}_1^0(\mathbf{q}_1) \cdot \mathbf{R}_2^1(\mathbf{q}_2) \cdot \dots \cdot \mathbf{R}_{i-1}^{i-2}(\mathbf{q}_{i-1}) \cdot \bar{\mathbf{b}} \quad (2-64)$$

O vetor posição  $\mathbf{r}_{i-1,e}$  pode ser computado pelo uso da matriz 4x4  $\mathbf{A}_j^{j-1}(q_j)$ . Sendo  $\mathbf{X}_{i-1,e}$  o vetor 4x1 argumento de  $\mathbf{r}_{i-1,e}$ , e  $\bar{\mathbf{X}} = [0, 0, 0, 1]^T$  o argumento do vetor posição representando a origem desse sistema coordenado, então a posição do vetor  $\mathbf{r}_{i-1,e}$  é derivada de

$$\mathbf{X}_{i-1,e} = \mathbf{A}_1^0(\mathbf{q}_1) \cdot \mathbf{A}_2^1(\mathbf{q}_2) \cdot \dots \cdot \mathbf{A}_n^{n-1}(\mathbf{q}_n) \cdot \bar{\mathbf{X}} - \mathbf{A}_1^0(\mathbf{q}_1) \cdot \mathbf{A}_2^1(\mathbf{q}_1) \cdot \dots \cdot \mathbf{A}_{i-1}^{i-2}(\mathbf{q}_1) \cdot \bar{\mathbf{X}} \quad (2-65)$$

Onde o primeiro termo refere-se ao vetor posição da origem  $O_0$  ao efetuador e o segundo termo é de  $O_0$  a  $O_{i-1}$ .



Exemplo 2: Manipulador de 3 graus de liberdade em coordenadas polar.

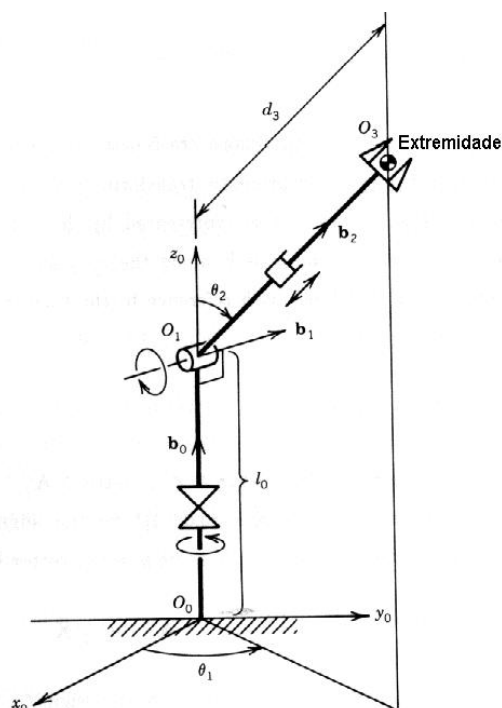


Figura 2.17: Manipulador de 3 graus de liberdade de coordenadas esféricas.  
 FONTE: MEGGIOLARO, Marco. A. Robótica na indústria: Modelagem e simulação. Dinâmica e controle de sistemas robóticos. Curso de especialização CPG/FT-UFAM, 2005. Apostila.

O exemplo que se segue mostra o cálculo do Jacobiano do manipulador. O esqueleto da estrutura de um manipulador é mostrado na Figura 2.17. Os deslocamentos das juntas  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  e  $\theta_3$  definidas na Figura 2.17 são equivalentes a coordenadas polares; portanto esse manipulador é chamado um manipulador de coordenada polar. Para encontrar a matriz Jacobiano, será iniciada pela determinação das direções dos eixos das juntas. Da Figura 2.17 esses são dados por

$$\mathbf{b}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} c_1 s_1 \\ s_1 s_2 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad (2-66)$$

Para juntas de revolução, é necessário encontrar o vetor posição  $\mathbf{r}_{i-1,e}$  são eles

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{1,e} &= d_3 \cdot \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{r}_{0,e} &= l_0 \cdot \mathbf{b}_0 + d_3 \cdot \mathbf{b}_2\end{aligned}\tag{2-67}$$

Substituindo as equações (2-66) e (2-67) em (2-54), (2-62) e (2-63),

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} d_3 s_1 s_2 & d_3 c_1 c_2 & c_1 s_2 \\ d_3 c_1 s_2 & d_3 s_1 c_2 & s_1 s_2 \\ 0 & -d_3 s_2 & c_2 \\ 0 & -s_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\tag{2-68}$$

## **Capítulo 3 – ESTÁTICA**

O contato entre o manipulador e o meio ambiente resulta numa interação de forças e momentos na interface manipulador/meio ambiente. Nesse capítulo serão focados as forças e os momentos os quais agem no braço manipulador quando ele está em repouso.

Cada junta do braço manipulador é conduzida por um atuador individual, os torques correspondentes de entrada são transmitidos através dos elos do braço ao efetuador, onde a força resultante e o momento aplicado no ponto final do manipulador é um dos maiores assuntos discutidos neste capítulo. Esta relação de entrada e saída é de fundamental importância no controle de um braço manipulador.

A relação entre a força e os momentos aplicados pelo meio externo e a deflexão resultante dos elos do braço também são discutido neste capítulo. Se um manipulador é usado para carregar um objeto pesado pelo seu ponto final ou se uma larga força é aplicada no efetuador, o ponto final do braço manipulador irá defletir. A magnitude desta deflexão é diretamente determinada pela rigidez do braço manipulador. A rigidez do ponto final é uma importante característica que determina a resistência e precisão do manipulador.

### **3.1 Análise de força e momento**

#### **3.1.1 Balanço de forças e momentos**

Nesta seção, serão obtidas as equações básicas que governam o comportamento estático de um braço manipulador.

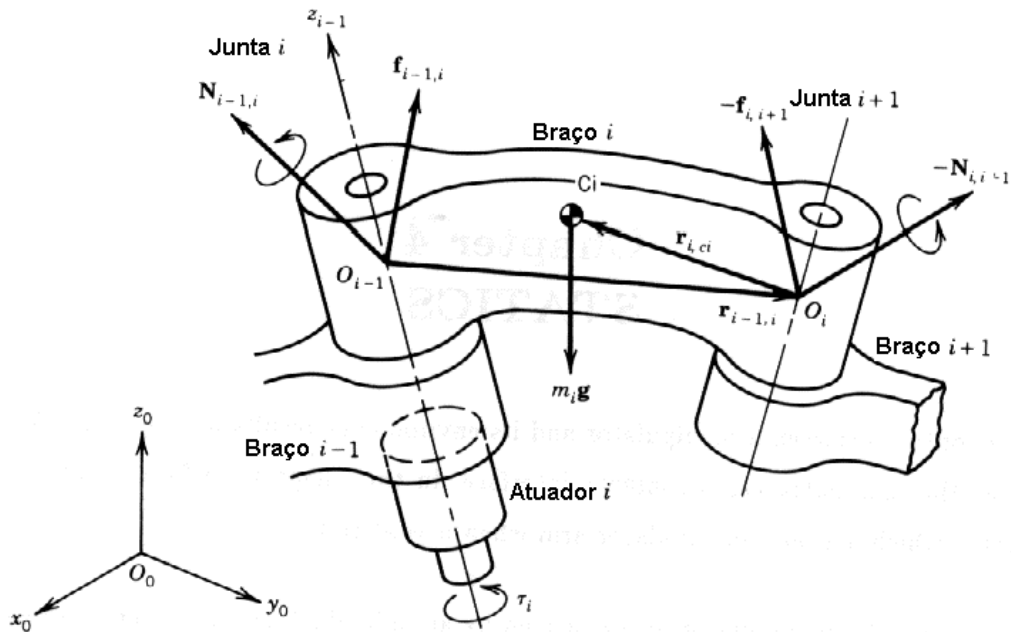


Figura 3.1: Forças e momentos atuando no elo  $i$ .

FONTE: MEGGIOLARO, Marco. A. Robótica na indústria: Modelagem e simulação. Dinâmica e controle de sistemas robóticos. Curso de especialização CPG/FT-UFAM, 2005. Apostila.

De acordo com a Figura 3.1 destaca-se:

$C_i$  – centro gravidade do elo  $i$ ;

$m_i$  – massa do elo  $i$ ;

$f_{i-1,i}$  – força que o elo  $(i-1)$  exerce sobre o elo  $i$ ;

$N_{i-1,i}$  – momento que o elo  $(i-1)$  exerce sobre o elo  $i$ .

Primeiramente pode-se considerar o diagrama de corpo livre de cada elo individual incorporada a uma cadeia cinemática aberta. A Figura 3.1 mostra as forças e os momentos agindo no elo  $i$ , o qual é conectado ao elo  $i-1$  e o elo  $i+1$  pela junta  $i$  e junta  $i+1$ , respectivamente. A força linear atuante no ponto  $O_{i-1}$ , que é a origem do sistema de coordenadas  $O_{i-1}-x_{i-1}-y_{i-1}-z_{i-1}$ , é denotado pelo vetor  $f_{i-1,i}$ , onde a força é exercida pelo elo da primeira subscrição atuando sobre o elo da segunda subscrição. O vetor  $f_{i,i+1}$  portanto representa a força aplicada ao elo  $i+1$  pelo elo  $i$ . A força aplicada no elo  $i$  pelo elo  $i+1$  é

então dada por  $-\mathbf{f}_{i,i+1}$ . A força da gravidade atuando no centróide  $C_i$  e denotada por  $\mathbf{m}_i\mathbf{g}$ , onde  $\mathbf{m}_i$  é a massa do elo  $i$  e  $\mathbf{g}$  é o vetor 3x1 representante da aceleração da gravidade. O balanço linear de forças é então dado por

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{f}_{i-1,i} - \mathbf{f}_{i,i+1} + \mathbf{m}_i\mathbf{g} = \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, n \quad (3-1)$$

Note que todos os vetores são definidos como referencia ao sistema de coordenadas da base  $O_0-X_0Y_0Z_0$ .

Na seqüência inicia-se o balanço de momentos. O momento aplicado ao elo  $i$  pelo elo  $i-1$  é denotado por  $\mathbf{N}_{i-1,i}$  e portanto o momento aplicado ao elo  $i$  pelo elo  $i+1$  é  $\mathbf{N}_{i,i+1}$ .

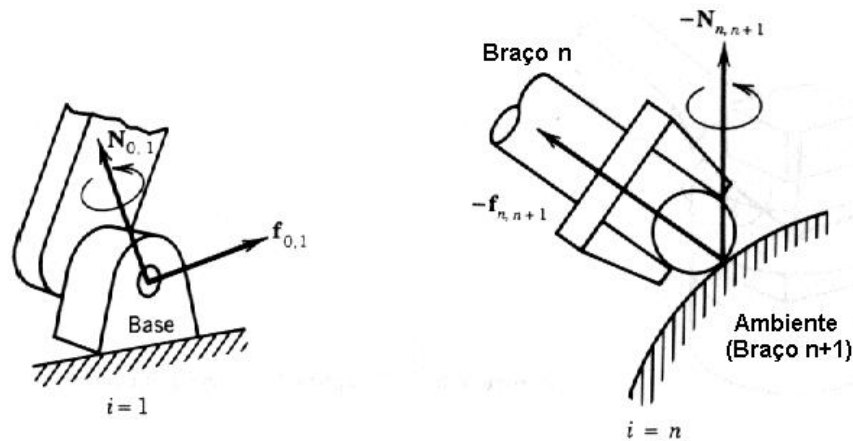


Figura 3.2: Forças e momentos exercidos pelo elo da base e o meio ambiente.

FONTE: MEGGIOLARO, Marco. A. Robótica na indústria: Modelagem e simulação. Dinâmica e controle de sistemas robóticos. Curso de especialização CPG/FT-UFAM, 2005. Apostila.

Mais adiante, as forças lineares  $\mathbf{f}_{i-1,i}$  e  $-\mathbf{f}_{i,i+1}$  também causam momentos em torno do centróide  $C_i$ . O balanço de momentos em relação ao centróide  $C_i$  é então dado por

$$\sum \mathbf{M} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{N}_{i-1,i} - \mathbf{N}_{i,i+1} - (\mathbf{r}_{i-1,i} + \mathbf{r}_{i,c_i}) \times \mathbf{f}_{i-1,i} + (-\mathbf{r}_{i,c_i}) \times (-\mathbf{f}_{i,i+1}) = \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, n \quad (3-2)$$

Onde  $\mathbf{r}_{i-1}$ , é o 3x1 vetor posição de origem  $O_{i-1}$  até o ponto  $O_i$  com referência ao sistema coordenado da base, e  $\mathbf{r}_{i,c_i}$  representa o vetor posição de origem no ponto  $O_i$  ao centróide  $C_i$ . A força  $\mathbf{f}_{i-1,i}$  e momento  $\mathbf{N}_{i-1,i}$ , são chamados o par de forças e momento entre os elos adjacentes  $i$  e  $i-1$ . Quando  $i=1$ , o par de forças e momento são  $\mathbf{f}_{0,1}$  e  $\mathbf{N}_{0,1}$ . Esses são interpretados como a reação de força e momento aplicado a base do elo com o qual o elo do braço é fixado (veja Figura 3.2). Quando  $i = n$ , o par de forças e momento torna-se  $\mathbf{F}_{n,n+1}$  e  $\mathbf{N}_{n,n+1}$ . Como mostra a Figura 3.2, onde o efetuador (que é, o elo  $n$ ) em contato com o meio, as reações de força e momento agem no último elo. Por conveniência será considerado o meio como um elo adicional numerado  $n+1$  e é representado pela reação de força e momento por  $\mathbf{f}_{n,n+1}$  e  $-\mathbf{N}_{n,n+1}$ , respectivamente.

As duas equações acima podem ser descritas para todos os elos exceto o elo da base,  $i = 1, \dots, n$ . O total de equações vetoriais derivadas é então  $2n$ , considerando o número de pares de forças e momentos envolvidos que é  $2(n+1)$ . Portanto dois pares de forças e momentos devem ser especificados; caso contrário, as equações não podem ser resolvidas. O par final de força e momento,  $\mathbf{f}_{n,n+1}$  e  $\mathbf{N}_{n,n+1}$ , são a força e o momento que o braço manipulador aplica no meio. Para tudo sair perfeito, o braço manipulador precisa acomodar esta força e momento, assim nós especificamos este par de forças e momento, e resolvemos simultaneamente as equações por conveniências combinam-se a força  $\mathbf{F}_{n,n+1}$ , e o momento  $\mathbf{N}_{n,n+1}$  para definir o vetor six-dimensional seguinte,

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{n,n+1} \\ \mathbf{N}_{n,n+1} \end{bmatrix} \quad (3-3)$$

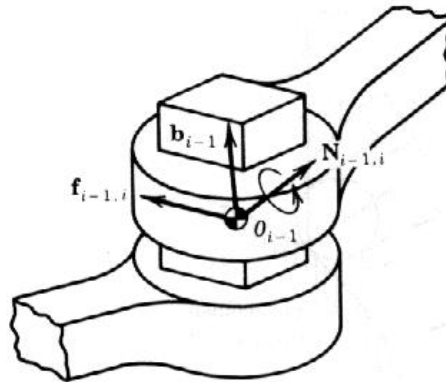


Figura 3.3: Par de forças e momento da junta para uma junta prismática.

FONTE: MEGGIOLARO, Marco. A. Robótica na indústria: Modelagem e simulação. Dinâmica e controle de sistemas robóticos. Curso de especialização CPG/FT-UFAM, 2005. Apostila.

A Figura 3.3 mostra o par de forças e momento para uma junta prismática nós chamaremos  $F$  o vetor força e momento do ponto final ou simplesmente força no ponto final.

### 3.1.2 Torques equivalentes nas juntas

Nesta seção iremos derivar a relação funcional entre os torques de entrada exercidos pelos atuadores e a força resultante no ponto final. Nós assumimos que cada junta é movimentada por um atuador individual que exerce um torque ou força entre os elos adjacentes. Sendo  $\tau_i$  o torque que movimenta ou força exercida pelo  $i$  – *esimo* atuador da junta  $i$ .

Para uma junta prismática, a força atuante  $\tau_i$  é uma força linear exercida ao longo do eixo da junta  $i-1$ , como mostrado na Figura 3.3. Assumindo que o mecanismo da junta é sem atrito, pode-se descrever a força  $\tau_i$  da junta para o par de forças linear  $\mathbf{f}_{i-1,i}$ , entre os elos  $i-1$  e  $i$  por

$$\tau_i = \mathbf{b}_{i-1}^T \cdot \mathbf{f}_{i-1,i} \quad (3-4)$$

Onde  $\mathbf{b}_{i-1}$  representa o vetor unitário na direção do eixo da junta e  $\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b}$  representa o produto interno dos vetores  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ . A equação (3-4) mostra que o atuador deve portar somente a componente  $\mathbf{f}_{i-1,i}$  a qual está na direção do eixo da junta e que as componentes em todas as outras direções são suportadas pela estrutura da junta. Estas componentes do par de forças são forças internas, as quais não produzem trabalho.

Para junta de revolução,  $\tau_i$  representa um torque atuador de movimento. Este torque atuador é balanceado com o par de torques de  $\mathbf{N}_{i-1,i}$  o qual está na direção do eixo da junta:

$$\tau_i = \mathbf{b}_{i-1}^T \cdot \mathbf{N}_{i-1,i} \quad (3-5)$$

Outras componentes do par de torques  $\mathbf{N}_{i-1,i}$  são surgidas pela estrutura da junta. Estes não realizam trabalho.

Nós podemos combinar todas as forças das juntas e torques para definir o n-vetor dado por

$$\boldsymbol{\tau} = [\tau_1 \ \tau_1 \ \dots \ \tau_n]^T \quad (3-6)$$

Chama-se  $\boldsymbol{\tau}$  de torque e vetor força da junta ou simplesmente torques das juntas. Os torques das juntas representam os atuadores de entrada para o elo do braço. A relação entre os torques das juntas  $\boldsymbol{\tau}$  e o vetor força  $\mathbf{F}$  no ponto final é expresso pelo seguinte teorema:

### **Teorema**

Assumir que o mecanismo da junta não possui atrito, então os torques  $\boldsymbol{\tau}$  da junta que são requeridos para equilibrar uma força arbitraria  $\mathbf{F}$  são dadas por



$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T \mathbf{F} \quad (3-7)$$

Onde  $\mathbf{J}$  é o Jacobiano do manipulador  $6 \times n$  que relaciona um deslocamento infinitesimal da junta  $d\mathbf{q}$  ao deslocamento infinitesimal do efetuador  $d\mathbf{p}$ :

$$d\mathbf{p} = \mathbf{J} d\mathbf{q} \quad (3-8)$$

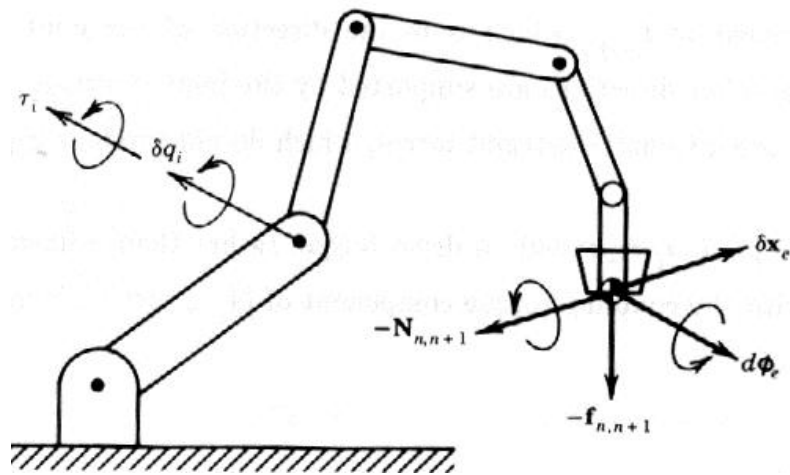


Figura 3.4: Deslocamentos virtuais do efetuador e individual das juntas.

FONTE: MEGGIOLARO, Marco. A. Robótica na indústria: Modelagem e simulação. Dinâmica e controle de sistemas robóticos. Curso de especialização CPG/FT-UFAM, 2005. Apostila.

Note que os torques nas juntas acima, Figura 3.4, não considera os torques da gravidade ou quaisquer outros torques. São estes torques que balanceiam a força e o momento do efetuador. Chama-se  $\boldsymbol{\tau}$  na equação (3-7) os torques equivalentes correspondentes à força  $F$  do ponto final considerado.

### Prova do teorema

O teorema pode ser provado usando o princípio do trabalho virtual. Considerando um deslocamento virtual em uma junta individual,  $\delta q_i$ , e no efetuador,  $\delta x_e$  e  $\delta \Phi_e$  como mostra a Figura 3.4. Deslocamentos virtuais são deslocamentos infinitesimais arbitrários de um sistema

mecânico conforme sua geometria. Deslocamentos virtuais são diferentes dos deslocamentos atuais, os quais devem somente satisfazer a geometria e não ter que interferir em outras leis do movimento. Para distinguir o deslocamento virtual do deslocamento atual, usa-se a letra grega  $\delta$  que representa  $\mathbf{d}$ . Assume-se que o torque da junta  $\tau_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) e a força e o momento no ponto final  $-\mathbf{f}_{n,n+1}$  e  $-\mathbf{N}_{n,n+1}$ , agindo no manipulador enquanto as juntas e o efetuador são deslocados. Então o trabalho virtual realizado por estas forças e momentos é dado por

$$\delta \mathbf{Work} = \tau_1 \delta \mathbf{q}_1 + \dots + \tau_n \delta \mathbf{q}_n - \mathbf{f}_{n,n+1}^T \delta \mathbf{x}_e - \mathbf{N}_{n,n+1}^T \delta \Phi_e \quad \text{ou} \quad \delta \mathbf{Work} = \boldsymbol{\tau}^T \delta \mathbf{q} - \mathbf{F}^T \delta \mathbf{p} \quad (3-9)$$

De acordo com o princípio do trabalho virtual, o braço está em equilíbrio se, e somente se, o trabalho virtual  $\delta \mathbf{Work}$  desaparecer para um deslocamento virtual, forçado ao ajuste da geometria. Observe que os deslocamentos virtuais  $\delta \mathbf{p}$  e  $\delta \mathbf{q}$  não são independentes mas são relatados pelo Jacobiano do manipulador a se ajustar a geometria forçada imposta pelo braço. Usando a equação (3-8) pose-se escrever a equação (3-9) como

$$\delta \mathbf{Work} = \boldsymbol{\tau}^T \delta \mathbf{q} - \mathbf{F}^T \mathbf{J} \delta \mathbf{q} = (\boldsymbol{\tau} - \mathbf{J}^T \mathbf{F})^T \delta \mathbf{q} \quad (3-10)$$

A expressão acima envolve somente  $\delta \mathbf{q}$ , a qual representa as variáveis independentes para um deslocamento admissível geometricamente.

## CAPITULO 4 – DINÂMICA

Neste capítulo, será analisado o comportamento dinâmico do braço manipulador. O comportamento dinâmico é descrito em termos da razão de tempo de mudança da configuração do braço em relação ao torque exercido nas juntas pelos atuadores. Esta relação pode ser expressa por uma forma de equações diferenciais chamado de equações diferenciais do movimento, que governam a dinâmica em resposta a entrada dos torques das juntas do braço.

Dois métodos podem ser usados em princípios para obter as equações do movimento. A formulação de Newton – Euler e a formulação de Lagrange. A formulação de Newton – Euler é derivada da interpretação da segunda lei do movimento de Newton a qual descreve o sistema dinâmico e termos de força e movimento. As equações incorporam todas as forças e momentos agindo em um elo individual do braço, incluindo o par de forças e momentos entre os elos. As equações obtidas pelo método de Newton – Euler inclui as reações das forças e momentos entre os elos adjacentes.

Assim, as operações aritméticas de soma que são requeridas para eliminar estes termos e obter a relação explícita entre os torques das juntas e a resultante do movimento em termos dos deslocamentos das juntas. Na formulação Lagrangiana, por outro lado, o comportamento do sistema dinâmico é descrito em termos do trabalho e energia usando coordenadas generalizadas. Todas as forças que não exercem trabalho são automaticamente eliminadas neste método.

As equações resultantes são geralmente compactas e providas uma expressão de forma-fechada em termos dos torques e deslocamentos das juntas.

As equações de movimento dos manipuladores são basicamente as relações entre os torques de entradas nas juntas e o movimento de saída, isto é o movimento dos elos do braço.

## 4.1 Formulação Lagrangiana da dinâmica do manipulador

### 4.1.1 Dinâmica Lagrangiana

Sendo  $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n$  coordenadas generalizadas que localizam completamente um sistema dinâmico. Nomeando  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{U}$  como a energia cinética total e a potencial respectivamente alojadas no sistema dinâmico, o Lagrangeano  $\mathbf{L}$  é definido por

$$\mathbf{L}(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) = \mathbf{T} - \mathbf{U} \quad (4-1)$$

Note que, as energias cinéticas e potencial são funções de  $\mathbf{q}_i$  e  $\dot{\mathbf{q}}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

Usando Lagrange, as equações de movimento do sistema dinâmico são dados por

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{q}_i} = \mathbf{Q}_i \quad (4-2)$$

Onde  $\mathbf{Q}_i$  é a força generalizada correspondente à coordenada generalizada  $\mathbf{q}_i$ . A força generalizada pode ser identificada pela consideração do trabalho virtual feito pela força não conservativa agindo no sistema.

#### 4.1.2 O tensor de inércia do manipulador

Nesta seção e na seção seguinte, derivam-se as equações do movimento de um braço manipulador usando Lagrangeano. Iniciando pela derivada da energia cinética alojada em um elo individual do braço. Como mostrado na Figura 4.1, sendo  $\mathbf{v}_{ci}$  e  $\boldsymbol{\omega}_i$  vetores velocidade  $3 \times 1$  do centróide e o vetor velocidade angular com referências ao sistema coordenado da base, o qual é um referencial inercial. A energia cinética do elo  $i$  então dada por

$$\mathbf{T}_i = \frac{1}{2} \mathbf{m}_i \mathbf{v}_{ci}^T \mathbf{v}_{ci} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_i^T \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i \quad (4-3)$$

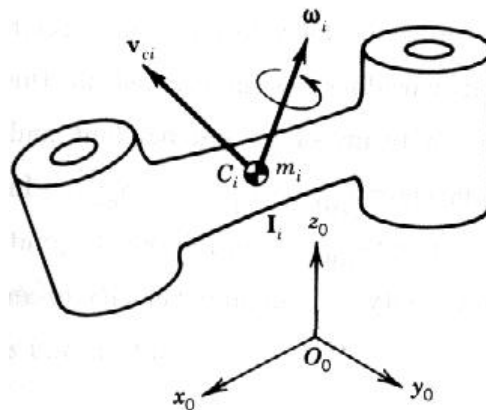


Figura 4.1: Velocidade do centróide e velocidade angular do elo  $i$ .

FONTE: MEGGIOLARO, Marco. A. Robótica na indústria: Modelagem e simulação. Dinâmica e controle de sistemas robóticos. Curso de especialização CPG/FT-UFAM, 2005. Apostila.

Onde  $\mathbf{m}_i$  é a massa do elo e  $\mathbf{I}_i$  é a matriz  $3 \times 3$  tensor de inércia do centróide expressa em coordenadas da base. O primeiro termo da equação acima representa a resultante da energia cinética referente ao movimento e translação da massa  $\mathbf{m}_i$ , enquanto o segundo

representa a energia cinética resultante da rotação em torno do centróide. A energia cinética total alojada em todos os elos do braço e então dada por

$$\mathbf{T} = \sum_{i=1}^n \mathbf{T}_i \quad (4-4)$$

A energia é adicionada.

A expressão para energia cinética é escrita em termos da velocidade linear e velocidade angular de cada elo, os quais não são variáveis independentes como mencionados na seção anterior. Pode-se agora reescrever as equações acima em termos de uma configuração independente e completa em forma de coordenadas generalizadas, denominaremos deslocamento das juntas de  $\mathbf{q} = [\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n]^T$ .

No capítulo 2, foram analisadas a velocidade linear e a velocidade angular do efetuador em relação às velocidades das juntas. Pode-se empregar o mesmo método para calcular a velocidade linear e a velocidade angular de um elo individual, considerando o elo como sendo um efetuador.

Renomeando, os subscritos  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{e}$  pelo  $\mathbf{i}$  e  $\mathbf{ci}$ , respectivamente, nas equações (2-55) e (2-59), obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\mathbf{ci}} &= \mathbf{J}_{L1}^{(i)} \dot{\mathbf{q}}_1 + \dots + \mathbf{J}_{Li}^{(i)} \dot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{J}_L^{(i)} \dot{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{ci}} &= \mathbf{J}_{A1}^{(i)} \dot{\mathbf{q}}_1 + \dots + \mathbf{J}_{Ai}^{(i)} \dot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{J}_A^{(i)} \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (4-5)$$

Onde  $\mathbf{J}_{Lj}^{(i)}$  e  $\mathbf{J}_{Aj}^{(i)}$  são o  $j$ -ésimo vetor coluna  $3 \times n$ , Jacobiano das matrizes  $\mathbf{J}_L^{(i)}$  e  $\mathbf{J}_A^{(i)}$ , para as velocidades linear e angular do elo  $i$ , respectivamente, denominando,

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_L^{(i)} &= [\mathbf{J}_{L1}^{(i)} \dots \mathbf{J}_{L1}^{(i)} \quad 0 \dots 0] \\ \mathbf{J}_A^{(i)} &= [\mathbf{J}_{A1}^{(i)} \dots \mathbf{J}_{A1}^{(i)} \quad 0 \dots 0]\end{aligned}\quad (4-6)$$

Note que, sendo o movimento do elo  $i$  dependente somente da junta 1 até  $i$ , e a coluna de vetores são 0 (zeros) para  $j \geq i$ . Das equações (2-62) e (2-63) cada vetor coluna é dado por

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_{Lj}^{(i)} &= \begin{cases} \mathbf{b}_{j-1} & \text{Para uma junta prismática} \\ \mathbf{b}_{j-1} \times \mathbf{r}_{0,ci} & \text{Para uma junta de revolução} \end{cases} \\ \mathbf{J}_{Aj}^{(i)} &= \begin{cases} 0 & \text{Para uma junta prismática} \\ \mathbf{b}_{j-1} & \text{Para uma junta de revolução} \end{cases}\end{aligned}\quad (4-7)$$

Onde  $\mathbf{r}_{0,ci}$  é o vetor posição do centróide do elo  $i$  referenciado no sistema de coordenadas da base, e  $\mathbf{b}_{j-1}$  é o vetor unitário  $3 \times 1$  ao longo do eixo da junta  $j-1$ .

Substituindo as expressões (4-5) nas equações (4-3) e (4-4) temos:

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\mathbf{m}_i \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_L^{(i)T} \mathbf{J}_L^{(i)} \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_A^{(i)T} \mathbf{I}_i \mathbf{J}_A^{(i)} \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{H} \dot{\mathbf{q}} \quad (4-8)$$

Onde  $\mathbf{H}$  é a matriz  $n \times n$  dada por

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{m}_i \mathbf{J}_L^{(i)T} \mathbf{J}_L^{(i)} + \mathbf{J}_A^{(i)T} \mathbf{I}_i \mathbf{J}_A^{(i)}) \quad (4-9)$$

A matriz  $\mathbf{H}$  incorpora todas as massas características de toda formação do braço, como refletido aos eixos das juntas, e é referida como tensor de inércia do manipulador (esta é a terminologia padrão, é uma abreviação da matriz tensor de inércia do manipulador).

Movimentos rotacionais são descritos pelas equações de Euler. Da mesma forma que para movimentos de translação. A descrição das propriedades da massa para um simples corpo rígido com respectivas rotações em torno do centróide são representadas por um tensor de inércia, o qual é uma matriz simetria definida por

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \int \{(y - y_c)^2 + (z - z_c)^2\} \rho dv & - \int \{(x - x_c) + (y - y_c)\} \rho dv & - \int \{(z - z_c) + (x - x_c)\} \rho dv \\ - \int \{(x - x_c) + (y - y_c)\} \rho dv & \int \{(z - z_c)^2 + (x - x_c)^2\} \rho dv & - \int \{(y - y_c) + (z - z_c)\} \rho dv \\ - \int \{(z - z_c) + (x - x_c)\} \rho dv & - \int \{(y - y_c) + (z - z_c)\} \rho dv & \int \{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2\} \rho dv \end{bmatrix} \quad (4-10)$$

Onde  $\rho$  é a densidade de massa,  $x_c$ ,  $y_c$  e  $z_c$  são as coordenadas do centróide de um corpo rígido, e cada integral é em relação ao volume do corpo rígido  $v$ . Pode-se observar que o tensor de inércia varia com a orientação do corpo rígido.

Note a diferença entre o tensor de inércia do manipulador e os tensores de inércia 3x3 de um link individual do braço. A forma é uma composição do tensor de inércia mais as letras como componentes. O tensor de inércia do manipulador, porém possui propriedades similares aos tensores individuais de inércia. Como mostra a equação (4-9), o tensor manipulador de inércia é uma matriz simétrica como é o tensor individual de inércia definido pela equação (4-10). O quadrado associado com o tensor de inércia do manipulador, representa a energia cinética do tensor de inércia individual. A energia cinética é restritamente sempre positiva a menos que o sistema esteja em repouso. A equação do tensor de inércia (4-9) é definida positiva, logo são os tensores de inércia individuais. Note, porém que o tensor de inércia do manipulador envolve a matriz Jacobiano, a qual varia com a configuração do braço. Por isso o



tensor de inércia do manipulador é dependente da configuração e representa a composição instantânea.

Das propriedades de massa de todo conjunto do braço na configuração corrente. Deixe  $\mathbf{H}_{ij}$  ser o  $[\mathbf{i}, \mathbf{j}]$  componente do tensor de inércia do manipulador  $\mathbf{H}$ , então pode-se reescrever a equação (4-8) em uma forma escalar como

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{H}_{ij} \dot{\mathbf{q}}_i \dot{\mathbf{q}}_j \quad (4-11)$$

Note que  $\mathbf{H}_{ij}$  é uma função de  $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n$ .

#### 4.1.3 Derivando as Equações de Lagrange do Movimento

Em adição ao cálculo da energia cinética é preciso encontrar a energia potencial  $\mathbf{U}$  e as forças generalizados para derivar as equações de Lagrange do movimento. Sendo  $\mathbf{g}$  o vetor 3x1 que representa a aceleração da gravidade com referência ao sistema de coordenadas da base, o qual é um referencial inercial, então a energia potencial alojada em todo armação do braço é dada por

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^n \mathbf{m}_i \mathbf{g}^T \mathbf{r}_{0,ci} \quad (4-12)$$

Onde o vetor posição do centróide  $\mathbf{C}_i$  é dependente da configuração do braço. Assim a função potencial é uma função de  $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n$ .

Entende-se por forças generalizadas todas as forças e momentos agindo nos elos do braço exceto as forças gravitacional e forças de inércia. Considerando a situação onde atuadores exercem torques nas juntas  $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1, \dots, \tau_n]^T$  em juntas individuais e uma força externa e momento  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  é aplicado no ponto final do braço enquanto em contato com o meio. Forças generalizadas podem ser obtidas pelo cálculo do trabalho virtual feito por estas forças. Na equação (2-9), substituindo a força exercida no ponto final pelo manipulador por uma força externa –  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$ . Então o trabalho virtual é dado por

$$\delta \text{Work} = \boldsymbol{\tau}^T \delta \mathbf{q} - \mathbf{F}_{\text{ext}}^T \mathbf{J} \delta \mathbf{q} = (\boldsymbol{\tau} - \mathbf{J}^T \mathbf{F}_{\text{ext}})^T \delta \mathbf{q} \quad (4-13)$$

Comparando esta expressão com uma em termos de forças generalizados  $\mathbf{Q} = [Q_1, \dots, Q_n]^T$ , dada por

$$\delta \text{Work} = \mathbf{Q}^T \delta \mathbf{q} \quad (4-14)$$

Nós podemos identificar as forças generalizadas como

$$\mathbf{Q} = \boldsymbol{\tau} + \mathbf{J}^T \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (4-15)$$

Usando a energia cinética total (4-11) e a energia potencial total (4-12), pode-se agora derivar as equações de Lagrange do movimento. Da equação (4-11), o primeiro termo na equação (4-2) é calculada como

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \right) = \frac{d}{dt} \left( \sum_{j=1}^n \mathbf{H}_{ij} \dot{\mathbf{q}}_j \right) = \sum_{j=1}^n \mathbf{H}_{ij} \ddot{\mathbf{q}}_j + \sum_{j=1}^n \frac{d\mathbf{H}_{ij}}{dt} \dot{\mathbf{q}}_j \quad (4-16)$$

Note que  $\mathbf{H}_{ij}$  é uma função de  $\mathbf{q}_i, \dots, \mathbf{q}_n$ , então a derivada no tempo de  $\mathbf{H}_{ij}$  é dada por

$$\frac{d\mathbf{H}_{ij}}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{H}_{ij}}{\partial \mathbf{q}_k} \frac{d\mathbf{q}_k}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{H}_{ij}}{\partial \mathbf{q}_k} \dot{\mathbf{q}}_k \quad (4-17)$$

O segundo termo na equação (3-2) inclui a derivada parcial da energia cinética, dada por:

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}_i} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \mathbf{H}_{jk} \dot{\mathbf{q}}_j \dot{\mathbf{q}}_k \right) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{H}_{jk}}{\partial \mathbf{q}_i} \dot{\mathbf{q}}_j \dot{\mathbf{q}}_k \quad (4-18)$$

Sabendo que  $\mathbf{H}_{jk}$ , depende de  $\mathbf{q}_i$ . O termo da gravidade de  $\mathbf{G}_i$  é obtido pela derivada parcial da energia potencial

$$\mathbf{G}_i = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}_i} = \sum_{j=1}^n \mathbf{m}_j \mathbf{g}^T \frac{\partial \mathbf{r}_{0,cj}}{\partial \mathbf{q}_i} = \sum_{j=1}^n \mathbf{m}_j \mathbf{g}^T \mathbf{J}_{Li}^{(i)} \quad (4-19)$$

Sendo a derivada parcial do vetor, posição  $\mathbf{r}_{0,cj}$  com respectivo  $\mathbf{q}_i$  é a mesma forma que a  $i$  - *esimo* vetor coluna da matriz Jacobiano  $\mathbf{J}_{Li}$  definida pela equação (4-5) (4-7).

Substituindo as expressões (4-16) até (4-19) na (4-2) temos

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{H}_{ij} \ddot{\mathbf{q}}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \mathbf{h}_{ijk} \dot{\mathbf{q}}_j \dot{\mathbf{q}}_k + \mathbf{G}_i = \mathbf{Q}_i \quad i = 1, \dots, n \quad (4-20)$$

Onde

$$\mathbf{h}_{ijk} = \frac{\partial \mathbf{H}_{ij}}{\partial \mathbf{q}_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{H}_{jk}}{\partial \mathbf{q}_i} \quad (4-21)$$

e

$$\mathbf{G}_i = \sum_{j=1}^n \mathbf{m}_j \mathbf{g}^T \mathbf{J}_{Li}^{(j)} \quad (4-22)$$

O primeiro termo representa torques de inércia, incluindo torques de interação, enquanto o segundo termo considera os efeitos de Coriolis e centrífugo, e o último termo é o torque devido o efeito da gravidade. É importante notar que a interação dos torques de inércia  $\mathbf{H}_{ij}\mathbf{q}_j$  ( $j \neq i$ ) resulta de elementos fora da diagonal do tensor de inércia do manipulador e que os torques de coriolis e centrífugo  $\mathbf{h}_{ijk}\dot{\mathbf{q}}_j\dot{\mathbf{q}}_k$  surgem porque o tensor manipulador de inércia é dependente da configuração. Assim a formulação de Lagrange prover as equações da dinâmica diretamente.

## Capítulo 5 – MODELAGEM DO MANIPULADOR PLANO DE 3 GRAUS DE LIBERDADE

Depois de estudado a dinâmica de manipuladores usando Lagrange, permite-se o desenvolvimento das equações para o manipulador robótico plano de três graus de liberdade formado por juntas rotativas conforme mostra na Figura 5.1 a seguir:

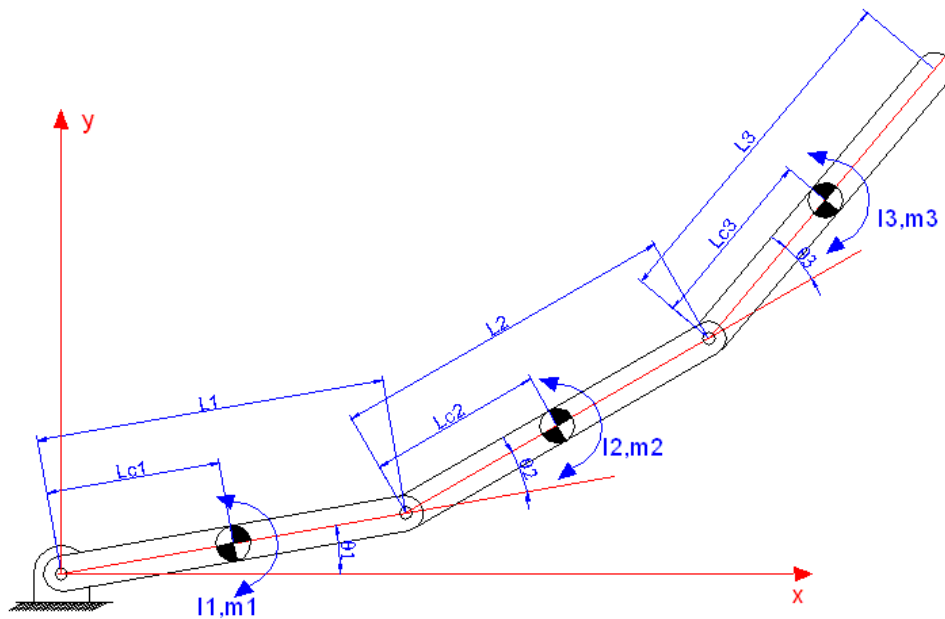


Figura 5.1: Manipulador robótico plano de 3 graus de liberdade.

### Posição do Efetuador

Considerando o manipulador plano da Figura 5.1, o braço manipulador é posicionado no plano  $x$ - $y$  e a equação cinemática que relaciona a posição do efetuador  $(x,y)$  ao deslocamento das juntas  $(\theta_1 \theta_2 \theta_3)$  e dada por:

$$\begin{aligned} x(\theta_1, \theta_2, \theta_3) &= l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ y(\theta_1, \theta_2, \theta_3) &= l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \end{aligned} \quad (5-1)$$

## O Jacobiano

Para deslocamentos infinitesimais do efetuador deriva-se parcialmente a equação (5-1) em função dos deslocamentos das juntas  $(\theta_1 \theta_2 \theta_3)$ , formando a matriz que representa a relação infinitesimal entre o deslocamento da junta e a localização do efetuador. A matriz Jacobiano do manipulador  $\mathbf{J}$  é obtida abaixo

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -l_1s_1 - l_2s_{1+2} - l_3s_{1+2+3} & -l_2s_{1+2} - l_3s_{1+2+3} & -l_3s_{1+2+3} \\ l_1c_1 + l_2c_{1+2} + l_3c_{1+2+3} & l_2s_{1+2} + l_3s_{1+2+3} & l_3c_{1+2+3} \end{bmatrix} \quad (5-2)$$

Onde,

$$\left\{ \begin{array}{l} s_1 = \text{sen}(\theta_1); \quad s_{1+2} = \text{sen}(\theta_1 + \theta_2); \quad s_{1+2+3} = \text{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ c_1 = \text{cos}(\theta_1); \quad c_{1+2} = \text{cos}(\theta_1 + \theta_2); \quad c_{1+2+3} = \text{cos}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3); \end{array} \right\}$$

## Velocidade dos centróides

No capítulo 2, foram analisadas a velocidade linear e a velocidade angular do efetuador em relação às velocidades das juntas. Pode-se empregar o mesmo método para calcular a velocidade linear, considerando cada elo como sendo um efetuador, agindo desta forma calculamos as velocidades lineares dos centróides de cada elo como mostra as equações (5-3) que se seguem,

$$\mathbf{V}_{C1} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{c1} \\ \dot{y}_{c1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_{c1} \text{sen}(\theta_1) \dot{\theta}_1 \\ l_{c1} \text{cos}(\theta_1) \dot{\theta}_1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{V}_{C2} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{c2} \\ \dot{y}_{c2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \text{sen}(\theta_1) \dot{\theta}_1 - l_{c2} \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \dot{\theta}_1 - l_{c2} \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \dot{\theta}_2 \\ l_1 \text{cos}(\theta_1) \dot{\theta}_1 + l_{c2} \text{cos}(\theta_1 + \theta_2) \dot{\theta}_1 + l_{c2} \text{cos}(\theta_1 + \theta_2) \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}; \quad (5-3)$$

$$\mathbf{V}_{C3} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{c3} \\ \dot{y}_{c3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 \dot{\theta}_1 - l_2 s_{1+2} \dot{\theta}_1 - l_{c3} s_{1+2+3} \dot{\theta}_1 - l_2 s_{1+2} \dot{\theta}_2 - l_{c3} s_{1+2+3} \dot{\theta}_2 - l_{c3} s_{1+2+3} \dot{\theta}_3 \\ l_1 c_1 \dot{\theta}_1 + l_2 c_{1+2} \dot{\theta}_1 + l_{c3} c_{1+2+3} \dot{\theta}_1 + l_2 c_{1+2} \dot{\theta}_2 + l_{c3} c_{1+2+3} \dot{\theta}_2 + l_{c3} c_{1+2+3} \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

## 5.1 Equações da dinâmica usando Lagrange

Para determinar-mos o comportamento dinâmico do manipulador da Figura 5.1, descreveremos através da energia e trabalho usando coordenadas generalizadas as equações pelo método de Lagrange. A energia cinética alojada ao sistema é dada pela equação (5-4).

### Energia Cinética:

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} m_1 |\mathbf{V}_{C1}|^2 + \frac{1}{2} I_1 \varpi_1^2 + \frac{1}{2} m_2 |\mathbf{V}_{C2}|^2 + \frac{1}{2} I_2 \varpi_2^2 + \frac{1}{2} m_3 |\mathbf{V}_{C3}|^2 + \frac{1}{2} I_3 \varpi_3^2 \quad (5-4)$$

Onde,  $|\mathbf{V}_{C1}|^2$ ,  $|\mathbf{V}_{C2}|^2$ ,  $|\mathbf{V}_{C3}|^2$ , são os quadrados dos módulos das velocidades lineares dos centróides de cada elo dadas pelas equações (5-5) seguintes.

$$|\mathbf{V}_{c1}|^2 = l_{c1}^2 \dot{\theta}_1^2 \quad ;$$

$$|\mathbf{V}_{c2}|^2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_{c2}^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + 2l_1 l_{c2} \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\theta_2) \quad ; \quad (5-5)$$

$$|\mathbf{V}_{c3}|^2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + l_{c3}^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\theta_2) + \\ + 2l_1 l_{c3} \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \cos(\theta_2 + \theta_3) + 2l_2 l_{c3} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \cos(\theta_3)$$

e  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$ , são as velocidades angulares de cada elo, dadas pelas equações (5-6),

$$\omega_1 = \dot{\theta}_1 \quad ;$$

$$\omega_2 = \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \quad ; \quad (5-6)$$

$$\omega_3 = \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3$$

### Os Tensores de Inércia

Os efeitos das massas de cada elo atuam nos eixos das juntas, cada elo tem sua influência sobre cada junta e a matriz tensor de inércia  $\mathbf{H}$ , incorpora todas as massas características da formação do braço. A matriz tensor de inércia é uma matriz simétrica onde seus elementos são determinados nas equações (5-7) a seguir.



$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_{11} &= m_1 l_{c1}^2 + I_1 + m_2 [l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos(\theta_2)] + I_2 + \\
&\quad + m_3 [l_1^2 + l_2^2 + l_{c3}^2 + 2l_1 l_2 \cos(\theta_2) + 2l_1 l_{c3} \cos(\theta_2 + \theta_3) + 2l_2 l_{c3} \cos(\theta_3)] + I_3 \quad ; \\
\mathbf{H}_{22} &= m_2 l_{c2}^2 + I_2 + m_3 [l_2^2 + l_{c3}^2 + 2l_2 l_{c3} \cos(\theta_3)] + I_3 \quad ; \\
\mathbf{H}_{33} &= m_3 l_{c3}^2 + I_3 \quad ; \\
\mathbf{H}_{12} &= m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_{c2} l_1 \cos(\theta_2) + I_2 + \\
&\quad + m_3 [l_2^2 + l_{c3}^2 + 2l_2 l_{c3} \cos(\theta_3) + l_1 l_2 \cos(\theta_2) + l_1 l_{c3} \cos(\theta_2 + \theta_3)] + I_3 \quad ; \\
\mathbf{H}_{13} &= m_3 [l_{c3}^2 + l_1 l_{c3} \cos(\theta_2 + \theta_3) + l_2 l_{c3}] + I_3 \quad ; \\
\mathbf{H}_{23} &= m_3 l_{c3}^2 + m_3 l_{c3} \cos(\theta_3) + I_3
\end{aligned} \tag{5-7}$$

Após a determinação dos elementos da matriz  $\mathbf{H}$ , pode-se reescrever a equação (5-4) da seguinte forma:

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} \mathbf{H}_{11} \dot{\theta}_1^2 + \mathbf{H}_{12} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{H}_{22} \dot{\theta}_2^2 + \mathbf{H}_{13} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + \mathbf{H}_{23} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + \frac{1}{2} \mathbf{H}_{33} \dot{\theta}_3^2 \tag{5-8}$$

Com os elementos da equação (5-8) determinados anteriormente dá-se início ao cálculo da energia potencial inerente ao sistema.

### Energia Potencial

Calculamos a energia potencial alojada em toda armação do braço através da equação (4-12), Obtendo:

$$\begin{aligned} U = m_1 g l_{c1} \text{sen}(\theta_1) + m_2 g [l_1 \text{sen}(\theta_1) + l_{c2} \text{sen}(\theta_1 + \theta_2)] + \\ + m_3 g [(l_1 \text{sen}(\theta_1) + l_2 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3))] \end{aligned} \quad (5-9)$$

### Efeitos Gravitacionais

Derivando parcialmente a energia potencial obtém-se os termos relativos aos efeitos gravitacionais dados nas equações (5-10).

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_1 &= m_1 g l_{c1} \cos(\theta_1) + m_2 g [l_1 \cos(\theta_1) + l_{c2} \cos(\theta_1 + \theta_2)] + \\ &\quad + m_3 g [l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_{c3} \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)] \quad ; \\ \mathbf{G}_2 &= m_2 g l_{c2} \cos(\theta_1 + \theta_2) + m_3 g [l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_{c3} \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)] \quad ; \\ \mathbf{G}_3 &= m_3 g l_{c3} \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \quad ; \end{aligned} \quad (5-10)$$

A partir dos cálculos anteriores podemos determinar o Lagrangeano do manipulador plano de 3 graus de liberdade da pela equação (5-11) abaixo,

$$\mathbf{L} = (\theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2, \theta_3, \dot{\theta}_3, \dots) = \mathbf{T} - \mathbf{U} \quad (5-11)$$

Derivando o Lagrangeano em relação ao tempo como mostra a equação (5-12), encontramos as forças generalizadas correspondentes as juntas

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta \mathbf{L}}{\delta \dot{\theta}_i} - \frac{\delta \mathbf{L}}{\delta \theta_i} = \mathbf{Q}_i \quad (5-12)$$

Onde podemos destacar por meio das derivadas para cada elo os efeitos centrífugos e de Coriolis apontados abaixo.

### Efeitos centrífugos e de Coriolis:

Para  $i=1$ , ou seja, elo 1:

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta \mathbf{L}}{\delta \dot{\theta}_1} + \mathbf{G}_1 = \mathbf{Q}_1 \quad (5-13)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\delta \mathbf{L}}{\delta \dot{\theta}_1} = & \mathbf{H}_{11} \ddot{\theta}_1 + \mathbf{H}_{12} \ddot{\theta}_2 + \mathbf{H}_{13} \ddot{\theta}_3 - \mathbf{h}_1 (\dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) - \mathbf{h}_1 (\dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3) \\ & - \mathbf{h}_3 (\dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) - \mathbf{h}_1 (2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3) - \mathbf{h}_5 (\dot{\theta}_3^2 + \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3) \end{aligned} \quad (5-14)$$

Onde,

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_1 &= m_2 l_1 l_{c2} \text{sen}(\theta_2) \quad ; \\ \mathbf{h}_2 &= m_3 l_1 l_{c3} \text{sen}(\theta_2 + \theta_3) \quad ; \\ \mathbf{h}_3 &= m_3 l_1 l_2 \text{sen}(\theta_2) \quad ; \\ \mathbf{h}_4 &= m_3 l_1 l_{c3} \text{sen}(\theta_3) \quad ; \\ \mathbf{h}_5 &= m_3 l_1 l_{c3} \text{sen}(\theta_1 + \theta_3) \quad ; \end{aligned} \quad (5-15)$$

Para  $i=2$ :

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta \mathbf{L}}{\delta \dot{\theta}_2} = \mathbf{H}_{12} \ddot{\theta}_1 + \mathbf{H}_{22} \ddot{\theta}_2 + \mathbf{H}_{23} \ddot{\theta}_3 - \mathbf{h}_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - \mathbf{h}_3 (\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + 2\dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3) - \mathbf{h}_2 (\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3) - 2\mathbf{h}_4 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 - \mathbf{h}_6 \dot{\theta}_3^2$$

Onde,  $\mathbf{h}_6 = m_3 l_{c3} \text{sen}(\theta_3)$  (5-16)

Para  $i=3$ :

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta \mathbf{L}}{\delta \dot{\theta}_3} = \mathbf{H}_{13} \ddot{\theta}_1 + \mathbf{H}_{23} \ddot{\theta}_2 + \mathbf{H}_{33} \ddot{\theta}_3 - \mathbf{h}_2 (\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3) - \mathbf{h}_6 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3$$

## Capítulo 6 – CONCLUSÃO

A modelagem do manipulador plano de três graus de liberdade possibilitou o acréscimo do conhecimento tanto sobre a teoria de robôs manipuladores rígidos, quanto ao aprendizado de novas técnicas matemáticas necessárias ao estudo. O desenvolvimento das equações da dinâmica pelo método de Lagrange possibilitou destacar que há um aumento considerável na complexidade das equações com o aumento de graus de liberdade envolvidos no manipulador, assim como quando são considerados os efeitos gravitacionais, Coriolis, força e torque centrífugos, entre outros, que acarreta um acoplamento dinâmico fortemente não-linear entre suas articulações, implicando em dificuldades na identificação de seus parâmetros.

Pode-se apontar como sugestão para seqüência de estudo e aprendizado sobre robôs manipuladores o conhecimento sobre a teoria de controle utilizada em braços manipuladores, iniciado com o controle de torque computado do manipulador robótico em estudo e aplicando as equações da dinâmica desenvolvidas no capítulo 5 deste trabalho.

## Referências Bibliográficas

- [1] BARBALHO, Célia. R. S.; MORAES, Suely. O., *Guia para normalização de teses e dissertações*. Manaus, UFAM, 2005.
- [2] CABRAL, Eduardo. L.L. *Cinemática da posição de robôs manipuladores*. Capítulo 5. Disponível em: <[www.poli.usp.br/p/eduardo.cabral](http://www.poli.usp.br/p/eduardo.cabral)>.
- [3] CAMPOS, Cássio. F. S., *Dinâmica e controle de movimento de corpo rígido de um manipulador robótico rígido flexível*. Dissertação de mestrado. C. F. S. Campos. – São José dos Campos: INPE, 2001. 107p. Disponível em:  
<<http://iris.sid.inpe.br:1916/col/sid.inpe.br/iris@1913/2005/04.25.17.10/doc/publicacao.pdf>>.
- [4] CRAIG. J.J., *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*. Wiley, 1989.
- [5] MARTINS, Nardêmio. A., *Estudo comparativo de estratégias de controle de robôs manipuladores no espaço de juntas*. Universidade Estadual de Maringá. Paraná, Brasil. Disponível em:  
<[www.ppg.uem.br/.../tecnologia/2001/23\\_283.01\\_Nardemio%20martins\\_estudo%20comparativo\\_para%20corrigir%20.pdf](http://www.ppg.uem.br/.../tecnologia/2001/23_283.01_Nardemio%20martins_estudo%20comparativo_para%20corrigir%20.pdf)>
- [6] MEGGIOLARO, Marco. A., *Robótica na indústria: Modelagem e simulação*. Dinâmica e controle de sistemas robóticos. Curso de especialização CPG/FT-UFAM, Manaus, 2005. Apostila
- [7] PIZZIOLLO, Tarcísio A., MARTINS-FILHO, Luiz de S., RESENDE, Peterson de *et al.* *Análise de simplificação na modelagem dinâmica aplicada a robôs quadrúpedes*. Sba Controle & Automação, jul./set. 2004, vol.15, no.3, p.301-308. ISSN 0103-1759. Disponível em:<[http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S0103-17592004000300006&lng=pt&nrm=iso](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-17592004000300006&lng=pt&nrm=iso)>.
- [8] ROMANO, Vitor. F., *Robótica industrial (Aplicação na indústria de manufatura e de processos)*. Editora: Edgard Blucher Ltda, 1ª edição, 2002.
- [9] SILVA, Renato. M., *Introdução à dinâmica e ao controle de manipuladores robóticos*. Apostila (Cap. 1-6). Disponível em:<[www.em.pucrs.br/~tavares/CAP1.pdf](http://www.em.pucrs.br/~tavares/CAP1.pdf)>.
- [10] SPONG, W.; VIDYASAGAR, M., *Robot Dynamics and Control*. Addison-Wesley, 1986.

[11] TEIXEIRA , Roselito. A.; BRAGA Antônio. P.; MENEZES, Benjamim. R. *Controle de Um Manipulador PUMA 560 utilizando redes neurais artificiais com adaptação em tempo real*. Anais do V Simpósio Brasileiro de Redes Neurais, pp 146-151, Belo Horizonte, Dezembro, 1998. <[www2.dem.inpe.br/ijar/RNeurCntr.pdf](http://www2.dem.inpe.br/ijar/RNeurCntr.pdf)>.