

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA  
DO RIO DE JANEIRO



**Eleazar Cristian Mejia Sanchez**

**Desenvolvimento de uma Máquina Tração-Torção de  
Ensaio de Fadiga para Avaliação de Modelos  
de Plasticidade Incremental**

**TESE DE DOUTORADO**

**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Mecânica

Orientador: Prof. Marco Antonio Meggiolaro

Rio de Janeiro, Maio de 2014



**Eleazar Cristian Mejia Sanchez**

**Desenvolvimento de uma Máquina Tração-Torção de  
Ensaio de Fadiga para Avaliação de Modelos  
de Plasticidade Incremental**

**Tese de Doutorado**

Tese apresentada como requisito parcial para  
obtenção do título de Doutor pelo Programa de Pós-  
Graduação em Engenharia Mecânica da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Marco Antonio Meggiolaro

Rio de Janeiro, Maio de 2014



**Eleazar Cristian Mejia Sanchez**

## **Desenvolvimento de uma Máquina Tração-Torção de Ensaio de Fadiga para Avaliação de Modelos de Plasticidade Incremental**

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Doutor pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Marco Antonio Meggiolaro**

Orientador

Pontifícia Universidade Católica de Rio de Janeiro

**Prof. Jaime Tupiassú Pinho de Castro**

Pontifícia Universidade Católica de Rio de Janeiro

**Prof. Mauro Speranza Neto**

Pontifícia Universidade Católica de Rio de Janeiro

**Profa. Deane de Mesquita Roehl**

Departamento de Engenharia Civil – PUC

**Prof. Nestor Zouain Pereira**

Universidade Federal do Rio de Janeiro

**Prof. Max Suell Dutra**

Universidade Federal do Rio de Janeiro

**Prof. Timothy Hamilton Topper**

Waterloo University

**José Eugenio Leal**

Coordenador(a) Setorial do Centro Técnico Científico - PUC-Rio

Rio de Janeiro, 28 de Maio de 2014

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### **Eleazar Cristian Mejia Sanchez**

Engenheiro Mecatrônico egressado da Universidad Nacional de Ingenieria (Peru), possui mestrado em Engenharia Mecânica pela Pontifícia Universidade Católica de Rio de Janeiro (PUC-Rio) com ênfase em Automação Industrial e Robótica

#### Ficha Catalográfica

Mejia Sanchez, Eleazar Cristian

Desenvolvimento de uma máquina biaxial de ensaio de fadiga para a avaliação de modelos de plasticidade incremental / Eleazar Cristian Mejia Sanchez; orientador: Marco Antonio Meggiolaro. 2014.

191 f. il.(color); 30 cm

Tese (doutorado) – Pontifícia Universidade Católica de Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Mecânica, 2014.

Incluí bibliografia.

1. Engenharia Mecânica – Teses. 2. Máquina de fadiga biaxial. 3. Fadiga Multiaxial. 4. Plasticidade Incremental. 5. Controle Sliding. 6. Célula de carga e torque. I. Meggiolaro, Marco Antonio. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Mecânica. III. Título.

CDD: 621

Ao senhor Jesus Cristo, meu pai Jesus Israel, minha mãe Agripina, meus  
irmãos Ronald e Liliana; e meus amigos.

## **Agradecimentos**

Ao Professor Marco Antonio Meggiolaro pela paciência e orientação durante o desenvolvimento do curso de doutorado.

Aos professores Jaime Tupiassú Pinho de Castro, Timothy Topper, José Luis Freire e Ronaldo Vieira pelos contínuos ensinamentos e lições de vida.

Ao Gerardo Castillo, Marco Perez, Jorge, Marco, Leonardo, Geancarlos, Jaiminho, Mourad amigos e colegas de laboratório.

A meu irmão Ronal, pelo apoio.

A todos as amizades que fiz durante o curso.

Aos professores da PUC - Rio pelo ensino.

Ao Departamento de Engenharia Mecânica da PUC - Rio e seus funcionários, pela colaboração comigo.

A CAPES Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nivel Superior pela ajuda financeira.

A FAPERJ Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro pela ajuda financeira.

A todas aquelas pessoas que de alguma outra forma participaram no desenvolvimento da tese.

## Resumo

Mejia Sanchez, Eleazar Cristian; Meggiolaro, Marco Antonio. **Desenvolvimento de uma Máquina Tração-Torção de Ensaio de Fadiga para a Avaliação de Modelos de Plasticidade Incremental.** Rio de Janeiro, 2014. 191p. Tese de Doutorado - Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

A avaliação experimental de modelos de plasticidade incremental e a predição da vida à fadiga sobre cargas combinadas requer o uso de máquinas de testes multiaxiais. Neste trabalho é desenvolvida uma máquina tração-torção (MTT) para avaliar modelos de plasticidade incremental. Este sistema eletromecânico utiliza como atuadores principais dois motores de corrente contínua conectados a caixas de redução para gerar os carregamentos de tração axial e/ou torção. O projeto da MTT compreende a análise de sua integridade estrutural, seu dimensionamento, e o cálculo da vida à fadiga de seus principais componentes; o projeto e desenvolvimento de uma célula tração-torção (LTC - *load torque cell*); o desenvolvimento e implementação das técnicas de controle; e finalmente sua construção e avaliação. Uma técnica de controle PID por modos deslizantes (PID *Sliding Mode control*) foi especialmente desenvolvida para esta máquina, consistindo em aplicar um sinal de controle descontínuo que força o sistema a deslizar ao longo de uma superfície de convergência. Esta técnica de controle tem a capacidade de controlar continuamente a força axial e/ou o torque aplicado ao corpo de prova de maneira independente, o que permite gerar histórias de cargas não-proporcionais. Os métodos de controle são implementados em uma plataforma computacional em tempo real CompactRio. Deste modo, é possível gerar uma máquina de ensaios de fadiga multiaxial compacta, de fácil manuseio, que não precise de um sistema de controle complexo, e a um baixo custo. A máquina tração-torção foi projetada para atender a uma ampla gama de ensaios de fadiga multiaxial, com uma capacidade de força axial máxima de  $\pm 200$  kN e torque máximo de  $\pm 1300$  N.m. O desempenho da MTT foi avaliado experimentalmente através de ensaios de plasticidade incremental. Para tanto, foram usados corpos de prova de tração-torção para medir seus comportamentos sobre cargas multiaxiais. Ensaios de encruamento não-proporcional, ratcheting (fluência cíclica) multiaxial e ratcheting uniaxial foram realizados em corpos de prova de aço inox 316, aço 1020, alumínio 7075 e

alumínio 6063 na MTT, assim como em uma máquina Instron de 100 kN. Um simulador de plasticidade incremental para carregamentos de tração-torção foi desenvolvido, incorporando o modelo de encruamento cinemático não-linear de Jiang-Sehitoglu, e o modelo incremental de encruamento não-proporcional de Tanaka. Os parâmetros do material foram calibrados a partir de ensaios experimentais, permitindo que as simulações fossem capazes de prever o comportamento do material sobre diferentes histórias de carregamento, assim como as taxas de encruamento não-proporcional e de ratcheting. Os experimentos e simulações confirmaram tanto a adequabilidade da MTT desenvolvida, quanto do simulador de plasticidade incremental implementado, baseado nos modelos não-lineares de Jiang-Sehitoglu e Tanaka.

### **Palavras-chave**

Máquina de Fadiga Biaxial; Fadiga Multiaxial; Plasticidade Incremental; Controle *Sliding*; Célula de Carga e Torque.

## Abstract

Mejia Sanchez, Eleazar Cristian; Marco Antonio Meggiolaro (Advisor). Development of a Tension-Torsion Fatigue Testing Machine to evaluate incremental plasticity models, Rio de Janeiro, 2014. 191p. These of Doctor - Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The experimental evaluation of incremental plasticity models and fatigue life prediction under combined loads requires the use of multiaxial testing machines. In this work, an axial-torsion machine (MTT) was developed to evaluate incremental plasticity models. This electromechanical system uses as a main actuators two DC motors connected to gearboxes to generate the axial and/or torsion loads. The design of axial-torsion machine comprises the analysis of its structural integrity, its dimensioning and fatigue life prediction its major components; the design and development of a load torque cell – LTC; the development and implementation of control techniques, and finally, its construction and its performance evaluation. A PID Sliding Model control technique has been specially developed for this machine, which consists in applying a discontinuous control signal that forces the system to slide along a surface convergence. This control technique has the ability to control the axial force and/or torsion applied to specimen test in an independent manner, which allows to generate a non-proportional loading histories. The control methods are implemented on a computing platform in real time CompactRio. Thus, it's possible to developed a compact multiaxial fatigue testing machine, easy to handle, which does not require a complex control system, and at a low cost. The tension-torsion machine was designed to meet a wide range of multiaxial fatigue tests, with a maximum capacity of axial force of  $\pm 200$  kN and torque of  $\pm 1300$  N.m. The MTT performance was evaluated experimentally by incremental plasticity testing. For this purpose, tensile / torsion specimens were used to measure their behavior under multiaxial loads. Testing of non-proportional hardening, multiaxial ratcheting and uniaxial ratcheting (cyclic creep) were performed on specimens of 316 stainless steel, 1020 steel, 7075 aluminum and 6351T6 aluminum in the MTT, as well as a Instron Machine of  $\pm 100$  kN. A simulator of incremental plasticity to tensile-torsion loads has been developed, incorporating the non-linear kinematic hardening model of Jiang-Sehitoglu, and non-proportional hardening model of Tanaka. The material parameters were calibrated using experimental tests, allowing

the simulations to predict the material behavior under different load histories, as well as rates of non-proportional hardening and ratcheting. The experiments and simulations confirmed both the suitability of the developed MTT, as well as the simulator of incremental plasticity implemented, based on non-linear models of Jiang-Sehitoglu and Tanaka.

### **Keywords**

Biaxial Fatigue machine; Multiaxial Fatigue; Incremental Plasticity; Sliding Control; Load Torque Cell.

## Sumário

1 . Introdução	21
1.1. Objetivo	21
1.2. Considerações iniciais	21
1.3. Motivação	22
1.4. Revisão bibliográfica	23
1.5. Conteúdo da tese	28
2 Fundamentos de Plasticidade Incremental	30
2.1. Introdução	30
2.2. Algoritmos de plasticidade incremental	30
2.2.1. Tensor de tensão e deformação	31
2.2.2. Redução de ordem do espaço de tensão e deformação	34
2.2.3. Incremento de deformação plástica equivalente e deformação plástica total	38
2.2.4. Função de escoamento e regra de fluxo	39
2.2.5. Regra do fluxo plástico no espaço desviatório 5D	41
2.3. Modelos de plasticidade incremental	44
2.3.1. Encruamento cinemático	44
2.3.2. Encruamento isotrópico	45
2.3.3. Encruamento não-proporcional	46
2.3.4. Fluência cíclica ou Ratcheting	49
3 Simulador de Plasticidade Incremental	55
3.1. Introdução	55
3.2. Encruamento isotrópico incremental	55
3.2.1. Encruamento isotrópico baseado em deformação plana	55
3.3. Encruamento Não Proporcional Incremental	57
3.3.1. Modelo Generalizado de Tanaka	57
3.4. Modelo de encruamento cinemático múltiplas-superfícies	58
3.4.1. Representação de múltiplas-superfícies	59

3.4.2. Regras da translação das superfícies	62
3.4.3. Descrição do algoritmo	63
4 . Projeto Estrutural e Modelagem da Máquina Tração-Torção	68
4.1. Introdução	68
4.2. Projeto da MTT (biaxial)	68
4.2.1. Descrição geral da MTT	68
4.2.2. Modelo simplificado da MTT	70
5 . Projeto e Integração dos Atuadores e Transdutores da MTT	72
5.1. Introdução	72
5.2. Desenvolvimento da célula de carga e torque	72
5.2.1. Projeto estrutural da LTC	72
5.2.2. Configuração e conexão dos extensômetros	81
5.2.3. Fabricação da LTC	86
5.3. Calibração dos transdutores da MTT	87
5.3.1. Calibração da célula de carga e torque	87
5.3.2. Calibração do LVDT- linear	89
5.3.3. Calibração do LVDT- rotação	90
5.4. Desenvolvimento do sistema experimental MTT	91
5.4.1. Conexões elétricas da MTT	92
5.4.2. Módulo de controle <i>compactRio</i>	93
5.4.3. Software desenvolvido em LabVIEW	95
6 . Sistema de Controle	96
6.1. Introdução	96
6.2. Controle PID	97
6.2.1. Controle proporcional (P)	98
6.2.2. Controle integral (I)	98
6.2.3. Controle derivativo (D)	99
6.2.4. Saída do controlador $u(k)$	100
6.3. Controle por modos deslizantes " <i>sliding mode control - SMC</i> "	101
6.3.1. Superfície de deslizamento	101
6.3.2. Lei de controle	103

6.3.3. O fenômeno de vibração " <i>Chattering</i> "	103
6.4. Aplicação da técnica de SMC na MTT	104
6.5. Resultados experimentais das técnicas de controle	106
7 . Resultados Experimentais	117
7.1. Introdução	117
7.2. Resultados experimentais do modelo de fluência cíclica ( <i>ratcheting</i> )	117
7.2.1. Determinação das propriedades do aço 1020 e alumínio 6351T6	117
7.2.2. Fluência cíclica ( <i>Ratcheting</i> ) uniaxial	121
7.2.3. Fluência cíclica ( <i>Ratcheting</i> ) multiaxial	129
7.3. Resultados experimentais do modelo de encruamento não proporcional	134
7.3.1. Determinação das propriedades do material	134
7.3.2. Levantamento de propriedades Al-7075 e aço inox 316	134
7.3.3. Encruamento não proporcional do Al-7075	140
7.3.4. Encruamento não-proporcional Aço Inox-316	145
8 . Conclusões e Trabalhos Futuros	159
8.1. Conclusões	159
8.2. Trabalhos Futuros	161
Bibliografia	162
Apêndice A	170
A.1 Determinação da força e momento da MTT	170
A.2 Análise da rigidez axial e torsional da MTT (biaxial)	172
A.2.1 Cálculo da rigidez axial	172
A.2.2 Cálculo da rigidez torsional	180
A.3 Rigidez axial do modelo simplificado da MTT no Ansys.	186

## Lista de figuras

Figura 1.1. Ensaio de Fadiga	22
Figura 1.2 Máquina Instron 8802TT para ensaios de fadiga multiaxial [17]	26
Figura 1.3 Máquina MTS tração torção modelo 370.02 [19]	26
Figura 2.1 A superfície de escoamento de Mises no plano $ \sigma_x - \sigma_y $ com o vetor normal e a regra de fluxo plástico	40
Figura 2.2 Superfície de escoamento de Mises no espaço de tensão desviatório 6D e 5D, onde ilustra-se o vetor normal $\bar{n}$ e a regra de fluxo	42
Figura 2.3 Encruamento cinemático	45
Figura 2.4 Encruamento isotrópico para um material que encrua	46
Figura 2.5 Efeito da carga cíclica NP sobre o encruamento NP, e laços de histerese proporcional e NP causado pela mesma gama $\Delta\varepsilon$ num aço AISI 304	47
Figura 2.7 Ratcheting uniaxial para um material submetido a uma história de tensões desequilibrada entre $\sigma_{max} > S_{Yc}$ e $-S_{Yc}$ .	51
Figura 2.8 Ratcheting uniaxial para um material submetido a uma história de tensões desequilibradas com (a) alta e (b) baixa amplitude de deformação	51
Figura 3.1. (a) Superfície de escoamento, encruamento e falha no sub espaço $\sigma_x \times \tau_{xy}\sqrt{3}$ de $E_{5s}$ e (b) raios correspondentes $r_i$ e o módulo de plasticidade generalizado $C_i$	60
Figura 3.2 Superfície de escoamento, encruamento e falha no sub espaço desviatório $S_1 \times S_2$ para $M = 3$ , apresentando o vetor de translação da superfície de escoamento $\bar{\alpha}'$	61
Figura 3.3 Configurações (a) sem encruamento e (b) saturado das superfícies consecutivas $i$ e $i+1$	62
Figura 4.1 Modelo Inicial da Máquina Tração Torção	69
Figura 4.2 Modelo simplificado da MTT	70
Figura 5.1 Seção circular oca da estrutura da LTC	73
Figura 5.2 Estado de tensões típico através do Círculo de Mohr	73
Figura 5.3 Estado de deformações típicos, através do Círculo de Mohr	75
Figura 5.4 Deformações da LTC analisadas no Ansys.	77
Figura 5.5 Esquema geral da LTC	77

Figura 5.6 a) Perfil melhorado do entalhe b) Comparação de $K_t$ do perfil com $r$ constante, e melhorado	78
Figura 5.7 Cálculo do fator de concentração de tensão no entalhe melhorado	78
Figura 5.8 Ponte de <i>Wheatstone</i>	81
Figura 5.9 Seção central da LTC	83
Figura 5.10 Conexão dos extensômetros na LTC, como célula de carga	84
Figura 5.11 Conexão dos extensômetros na LTC como célula de carga	85
Figura 5.12 Conexão dos extensômetros na LTC	86
Figura 5.13 Sistema de calibração da célula de carga	87
Figura 5.14 Curva de Calibração da LTC - célula de carga	88
Figura 5.15 Curva de Calibração da LTC - célula de torque	88
Figura 5.16 Sistema de calibração do LVDT Linear DT-100A	89
Figura 5.17 Calibração do LVDT Linear DT-100A	89
Figura 5.18 Calibração do LVDT Linear DT-100A para rotação	90
Figura 5.19 Calibração do LVDT rotação DT-100A	91
Figura 5.20 MTT desenvolvida no Laboratório de Fadiga - PUC-Rio	92
Figura 5.21 Esquema de conexões elétricas e do sistema de controle	92
Figura 5.22 Controlador <i>cRIO-9004</i>	93
Figura 5.23 Arquitetura interna do módulo FPGA	94
Figura 5.24 a) módulo NI-9263 e b) módulo NI-9237	95
Figura 5.25 Interação dos ambientes de programação do controlador	95
Figura 6.1 Sistema de controle em malha fechada	96
Figura 6.2 Resposta ao degrau do sistema	97
Figura 6.3 Diagrama de Blocos de um controlador PID	100
Figura 6.4 Superfície de deslizamento (Adaptado de Slotine e Li, 1991)	102
Figura 6.5 O fenômeno de <i>Chattering</i> (Adaptado de Slotine e Li, 1991)	104
Figura 6.6 Esquema do controle de força da MTT	104
Figura 6.7 Esquema geral do sistema de controle da MTT	106
Figura 6.8 Controle por modos deslizantes para um carregamento tração de $\pm 30$ kN	106
Figura 6.9 Interface de controle no ambiente <i>RealTime</i>	107
Figura 6.10 Controle por modos deslizantes para um carregamento de $\pm 50$ kN	108
Figura 6.11 Controle de torque por modos deslizantes para torque de $\pm 71,6$ N.m	

	109
Figura 6.12 Controle <i>PID sliding</i> para um torque solicitado de $\pm 71,6$ N.m	109
Figura 6.13 Controle <i>PID sliding</i> para um torque solicitado de $\pm 140$ N.m	110
Figura 6.14 Controle de força ( $\pm 20$ kN) e do torque desejado ( $\pm 71,6$ N.m) fora de fase	90° 112
Figura 6.15 a) Tensão normal $\sigma$ e cisalhante $\tau\sqrt{3}$ b) Gráfico $\sigma_x$ e $\tau\sqrt{3}$ de fase	90° fora 113
Figura 6.16 Controle de força ( $\pm 50$ kN) e do torque desejado ( $\pm 189$ N.m) de fase	90° fora 115
Figura 7.10 a) Tensão normal $\sigma = 107$ MPa e cisalhante $\tau\sqrt{3} = 107$ MPa b) Gráfico $\sigma$ e $\tau\sqrt{3}$ de fase	90° fora 116
Figura 7.1 Curva $\sigma_x$ x $\varepsilon_x$ (a) Alumínio 6351T6 e (b) Aço 1020	118
Figura 7.2 Ajuste do coeficiente H e do expoente h do Al-6351T6	119
Figura 7.3 Curva monotônica do Al-6351T6	119
Figura 7.4 Curva monotônica do Aço 1020	120
Figura 7.5 Laço estabilizado, sob o controle de deformação de $\Delta\varepsilon = \pm 2\%$	121
Figura 7.6 Condição inicial para o ensaio de ratcheting uniaxial	122
Figura 7.7 Comportamento de fluência cíclica (ratcheting) do aço 1020.	123
Figura 7.8 Laços de histerese gerados por ratcheting uniaxial em aço 1020.	123
Figura 7.9 Deformação de ratcheting acumulada do aço 1020.	124
Figura 7.10 Taxa de deformação de ratcheting do aço 1020.	125
Figura 7.11 Laço de histerese estabilizado do Alumínio 6351T6	125
Figura 7.12 Condição inicial para o ensaio de ratcheting uniaxial do Al-6351T6	126
Figura 7.13 Ensaio de ratcheting uniaxial Al-6351T6 com $\sigma_a = 261$ MPa.	127
Figura 7.14 Deformação de ratcheting acumulada para o Al-6351T6	127
Figura 7.15 Taxa de deformação de ratcheting para $\sigma_a = 261$ MPa	128
Figura 7.16 Ensaio de ratcheting uniaxial do Al-6351T6 com $\sigma_a = 285$ MPa	128
Figura 7.17 Deformação de ratcheting uniaxial acumulada	129
Figura 7.18 Taxa de incremento da deformação de ratcheting	129
Figura 7.19 Corpo de prova Tubular ratcheting multiaxial	130
Figura 7.20 Determinação das propriedades do Alumínio 6351Tx	130

Figura 7.21 Deformação cisalhante gerada pelo Torçor cíclico	131
Figura 7.22 Comportamento da deformação axial - Ratcheting multiaxial	131
Figura 7.23 Incremento da deformação axial para $\sigma_x = 430$ MPa e $T = 10$ N.m	132
Figura 7.24 Deformação cisalhante gerado pelo $T = \pm 20$ N.m	132
Figura 7.25 Incremento da deformação axial para $T = 20$ N.m	133
Figura 7.26 Incremento da deformação axial para $\sigma_x = 430$ MPa e $T = 20$ N.m	133
Figura 7.27 Ajuste dos parâmetros de encruamento cíclico do Al-7075	135
Figura 7.28 Curva $\sigma_x \varepsilon$ cíclica do Al-7075 ajustando os bicos dos laços.	135
Figura 7.29 Laços estabilizados do Alumínio 7075.	136
Figura 7.30 Determinação dos parâmetros $E$ e $\nu$ do alumínio 7075.	137
Figura 7.31 Ajuste dos parâmetros de encruamento cíclico do Aço Inox 316.	137
Figura 7.32 Curva $\sigma_x \varepsilon$ cíclica do Aço inox-316 ajustando os bicos dos laços.	138
Figura 7.33 Laços estabilizados do Aço inox 316.	139
Figura 7.34 Determinação dos parâmetros $E$ e $\nu$ do aço Inox-316.	140
Figura 7.35 Forma e dimensões do corpo de prova - ensaio não proporcional.	141
Figura 7.36 Ensaio EN do Al-7075 com $\varepsilon_x = 0.2\%$ a) laço histerese $\sigma_x$ vs $\varepsilon_x$ , b) laço histerese $\tau_{xy}$ vs $\gamma_{xy}$ , c) trajetória das tensões $\sigma_x$ vs $\tau_{xy} \sqrt{3}$ , d) trajetória de deformação $\varepsilon_x$ vs $\gamma_{xy} / \sqrt{3}$ .	142
Figura 7.37 Ensaio EN do Al-7075 com $\varepsilon_x = 0.4\%$ , a) laço histerese $\sigma_x$ vs $\varepsilon_x$ , b) laço histerese $\tau_{xy}$ vs $\gamma_{xy}$ , c) trajetória das tensões $\sigma_x$ vs $\tau_{xy} \sqrt{3}$ , d) trajetória de deformação $\varepsilon_x$ vs $\gamma_{xy} / \sqrt{3}$ .	144
Figura 7.38 Trajetória de deformação $\varepsilon_x$ vs $\gamma_{xy} / \sqrt{3}$ no ensaio NP do alumínio 7075 para uma deformação de $\varepsilon_x = 0.2\%$ e $\varepsilon_x = 0.4\%$	145
Figura 7.39 Ensaio EN do Inox-316 com $\varepsilon_x = 0.1\%$ , a) trajetória das tensões $\sigma_x$ vs $\tau_{xy} \sqrt{3}$ , b) laço histerese $\sigma_x$ vs $\varepsilon_x$ , c) laço histerese $\tau_{xy}$ vs $\gamma_{xy}$ , d) trajetória de deformação $\varepsilon_x$ vs $\gamma_{xy} / \sqrt{3}$ .	148

Figura 7.40 Ensaio EN do Inox-316 com  $\varepsilon_x = 0.25\%$ , a) trajetória das tensões  $\sigma_x - \tau_{xy}\sqrt{3}$ , b) laço histerese  $\sigma_x - \varepsilon_x$ , c) laço histerese  $\tau_{xy} - \gamma_{xy}$ , d) trajetória de deformação experimental  $\varepsilon_x - \gamma_{xy}/\sqrt{3}$ , e) trajetória de deformação simulada  $\varepsilon_x - \gamma_{xy}/\sqrt{3}$ , f) trajetória de deformação estabilizada, experimental e simulada.

152

Figura 7.42 Ensaio EN do Inox-316 com  $\varepsilon_x = 0.31\%$ , a) trajetória das tensões  $\sigma_x - \tau_{xy}\sqrt{3}$ , b) laço histerese  $\sigma_x - \varepsilon_x$ , c) laço histerese  $\tau_{xy} - \gamma_{xy}$ , d) trajetória de deformação experimental  $\varepsilon_x - \gamma_{xy}/\sqrt{3}$ , e) trajetória de deformação simulada  $\varepsilon_x - \gamma_{xy}/\sqrt{3}$ , f) trajetória de deformação estabilizada experimental e simulado.

156

Figura 7.43 Trajetória de deformação  $\varepsilon_x$  vs  $\gamma_{xy}/\sqrt{3}$  no ensaio de encruamento NP do Aço inox-316 com  $\varepsilon_x = 0.1\%$ ,  $\varepsilon_x = 0.25\%$  e  $\varepsilon_x = 0.31\%$ .

157

Figura 7.44 Trajetória de deformação  $\varepsilon_x$  vs  $\gamma_{xy}/\sqrt{3}$  no ensaio de encruamento NP do Aço inox-316 com  $\varepsilon_x = 0.1\%$ ,  $\varepsilon_x = 0.25\%$  e  $\varepsilon_x = 0.31\%$

158

Figura A.1 Tensão de cisalhamento a) tubo circular e b) eixo circular em torção

170

Figura A.2 Corpo de prova de tubular

171

Figura A.3 Modelo simplificado da MTT

173

Figura A.4 Modelo deformado da MTT pela força trativa

173

Figura A.5 Separação das vigas e colunas da MTT submetidas à tração

174

Figura A.6 Diagrama de momentos fletores da MTT

176

Figura A.7 (a) Modelo simplificado da MTT no Ftools e (b) deflexão da MTT, devido à carga trativa

178

Figura A.8 Simulações do modelo simplificado da MTT (a) Tensão e (b) deflexão da MTT, devido à carga trativa

179

Figura A.9 Deformação na direção " y " do modelo simplificado da MTT no Ansys

180

Figura A.10 Modelo simplificado da MTT sobre Torção

181

Figura A.11 Modelo deformado da MTT pela Torção.

182

Figura A.12 Separação das vigas e das colunas da MTT submetido à torção.	182
Figura A.13 Deslocamento dos extremos da MTT submetido a torção.	183
Figura A.14 Rotação da viga AB e CD da MTT submetido à torção.	183
Figura A.15 Modelo simplificado da MTT (a) Tensão e (b) deflexão da MTT devido ao torçor	184
Figura A.16 Deformação na direção "z" do modelo simplificado da MTT gerado pelo torçor no Ansys	185
Figura A.17 Tensões no modelo simplificado da MTT devido à carga trativa.	186
Figura A.18 Deslocamento na direção "x" do modelo simplificado da MTT	187
Figura A.19 Análise da falha por flambagem da MTT em compressão pura	187
Figura A.20 Tensões no novo modelo da MTT devido a torção pura.	188
Figura A.21 Deslocamento na direção "z" do novo modelo da MTT	189
Figura A.22 Análise da falha por flambagem da MTT em torção pura	189
Figura A.23 Tensões de Mises devido a carregamento combinado sobre a MTT	190

## Lista de tabelas

Tabela 1. Transformação direta e inversa entre o espaço 6D e 5D, na forma matricial	37
Tabela 2. Transformação direta e inversa entre o espaço 6D e 5D, na forma escalar	37
Tabela 3. Coeficiente de Encruamento NP.	48
Tabela 5. Constantes do material utilizadas para o projeto LTC	76
Tabela 5. Influência da espessura na vida à fadiga da LTC	80
Tabela 6. Sensibilidade mecânica e elétrica e faixa de forças da LTC	81
Tabela A.1 Influência do diâmetro na rigidez axial e torsional	186

# **1. Introdução**

## **1.1. Objetivo**

O objetivo desta tese é avaliar modelos de plasticidade incremental em fadiga multiaxial. Para isso, nesta, desenvolveu-se uma máquina biaxial tração-torção servindo-se de atuadores eletromecânicos de baixo custo, com o intuito de viabilizar-se uma máquina para o estudo dos modelos de plasticidade incremental. O desenvolvimento da máquina biaxial inclui seu projeto, a construção, o desenvolvimento da célula de carga e torque e a implementação das técnicas de controle.

## **1.2. Considerações iniciais**

As máquinas tradicionais de testes de fadiga geralmente baseiam-se em sistemas servo-hidráulicos, e têm como propósito fazer ensaios uniaxiais nos materiais para prever a vida útil em serviço. Estas máquinas servo-hidráulicas têm um elevado custo, portanto em muitos casos não é possível adquiri-las unicamente para os propósitos de pesquisa. As máquinas multiaxiais têm ainda um custo mais elevado, dado que requerem dois ou mais atuadores, e uma estrutura mais rígida.

As cargas reais de serviço geralmente podem atuar em diferentes pontos da peça, as quais podem vir de uma, ou de múltiplas fontes. Estas cargas podem induzir forças de torção, flexão, normais e cortantes que combinadas podem gerar tensões bi, ou tri-axiais variáveis nos pontos críticos da peça, causando o problema conhecido como “fadiga multiaxial” [1].

Muitos destes componentes mecânicos críticos experimentam cargas cíclicas multiaxiais durante sua vida útil. O problema de fadiga multiaxial torna-se assim mais complexo devido à distribuição de esforços e das diferentes direções da

iniciação de trinca dos componentes [2].

Neste trabalho desenvolveu-se uma máquina biaxial tração-torção, com atuadores elétricos, incluindo sua análise estrutural, sua modelagem e o desenvolvimento dos transdutores de força e torção. Posteriormente foram implementadas diversas técnicas de controle robusto para superar as não-linearidades da dinâmica da máquina biaxial e pôde se verificar, experimentalmente, sua exatidão no controle de trajetória de força e torque 90° fora de fase. Finalmente avaliaram-se, experimentalmente, alguns modelos de plasticidade incremental para prever fluência cíclica (*Ratcheting*) e encruamento não proporcional.

### 1.3. Motivação

Os ensaios de materiais são realizados com duas finalidades: uma é a de permitir a obtenção de informações rotineiras do produto (ensaios de controle) no recebimento de materiais dos fornecedores e no controle final do produto acabado. A outra finalidade é a de desenvolver novas informações sobre os materiais, como no desenvolvimento de novos materiais, de novos processos de fabricação e novos tratamentos. O ensaio de fadiga é capaz de fornecer dados quantitativos relativos às características de um material ou componente a suportar cargas repetitivas e/ou cíclicas, por longos períodos, sem se romper. A Figura 1.1 apresenta um ensaio de iniciação de trincas de fadiga.

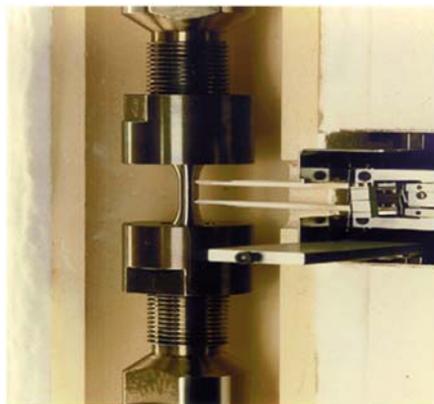


Figura 1.1. Ensaio de Fadiga

Os ensaios mecânicos multiaxiais permitem a determinação de propriedades mecânicas que se referem ao comportamento do material quando submetidos à ação de esforços reais. Elas são expressas em função de tensões e/ou deformações. O ensaio de fadiga multiaxial consiste, por exemplo, na aplicação de duas cargas cíclicas independentes, e.g. uma tração e um torçor fora de fase em um corpo de prova apropriado e padronizado segundo o tipo de ensaio a ser realizado, gerando assim uma variação nas direções principais ao longo do tempo.

Há diversos modelos a serem propostos para a modelagem de dano por fadiga multiaxial. A maioria deles limita-se aos materiais específicos ou às condições de carga. Alguns não conseguem prever a orientação da trinca, o que vem a ser outra característica distintiva do dano por fadiga multiaxial, em comparação ao problema da fadiga uniaxial. Assim, não existe um modelo de dano por fadiga multiaxial universalmente aceito [2].

Outra motivação desta tese é a construção de uma máquina biaxial tração-torção no Laboratório de Fadiga da PUC-Rio para ensaios de fadiga multiaxial a baixo custo, a qual permitirá a avaliação de modelos mais reais na previsão da vida à fadiga. Esta máquina também pode permitir o estudo de modelos de plasticidade incremental para prever a fluência cíclica multiaxial (*Ratcheting* multiaxial), encruamento não proporcional e encruamento cinemático.

#### **1.4. Revisão bibliográfica**

Nos primeiros trabalhos relacionados à fadiga multiaxial, os critérios de fadiga utilizados basearam-se essencialmente nos extensos trabalhos experimentais, como os desenvolvidos por Nishihara e Kawamoto [3] e por Gough [4]. Existe um grande número de autores que propuseram diferentes critérios de fadiga multiaxial, os quais, segundo Gonçalves [5], podem ser classificados em critérios empíricos, baseados em tensão, em deformação, energia, planos críticos, nível mesoscópico e tensões medias no interior de volumes elementares, mas ainda não existe um critério universalmente aceito.

Existem muitos trabalhos de modelos de dano a fadiga multiaxial na literatura, tais como os modelos propostos por Sines, Crossland, Findley, McDiarmid, Brown–Miller, Fatemi–Socie e Smith-Watson-Topper (SWT) [6]. Estes requerem conhecimento da amplitude das tensões, ou deformações, muitas vezes difíceis de obter-se nos casos de história de carregamento multiaxiais não proporcionais.

A partir do trabalho pioneiro de *Bauschinger* compreendeu-se que a deformação plástica é associada ao dano da fadiga. Geralmente os componentes são projetados na faixa elástica, mas eventualmente possuem regiões de concentração de tensões, onde localmente as tensões excedem a resistência ao escoamento. Neste caso é necessário uma análise da plasticidade [6].

No estudo dos modelos de plasticidade incremental, Mróz [7] propôs um modelo multi-linear de encruamento cinemático de múltiplas superfícies. Zeng [8] melhorou este modelo incorporando um efeito Bauschinger mais realista para o carregamento cíclico. Já Garud [9], baseando-se nas modernas teorias de plasticidade e uma nova regra de encruamento, propôs um procedimento para o cálculo do trabalho plástico envolvendo considerações explícitas da relação constitutiva do material. O desempenho deste novo procedimento foi avaliado experimentalmente e previu a resposta cíclica de tensão-deformação para um carregamento multiaxial fora de fase. Contudo, estes modelos não são capazes de reproduzir fenômenos não lineares como a fluência cíclica (*Ratcheting*).

No estudo do fenômeno de *Ratcheting* podem-se mencionar os trabalhos feitos por Jiang [10] [11], que propôs uma regra de encruamento cinemático utilizando o conceito de superfícies limitante para as componentes de translação da superfície de escoamento (*Backstress*). Este modelo prevê bem o fenômeno de ratcheting para carregamento proporcionais e não proporcionais.

Dentre os principais trabalhos encontrados na literatura e relacionados ao estudo dos modelos de encruamento não proporcional podem-se citar os feitos por Itoh [12], que estudou a microestrutura do aço inox-304, submetido a trajetórias de deformação não proporcional tração-torção e à temperatura ambiente. Em um outro

trabalho, Itoh [13] estudou a vida à fadiga em baixo ciclo da liga de alumínio 6061, submetido a 14 trajetórias de deformação tração-torção e, posteriormente, estudou o comportamento de cargas não proporcionais para uma liga Ti-6Al-4V [14].

As máquinas para ensaios de fadiga geralmente são utilizadas nos trabalhos de ensaio em laboratório e nas diversas pesquisas. Cada uma delas têm diversas características específicas que dependem do tipo de ensaio, do tamanho da amostra e do tipo de carregamento solicitado. Ao longo dos anos foram desenvolvidas por pesquisadores diversas máquinas, as quais operam de forma mecânica, eletromecânica, pneumática, eletromagnética e hidráulica [15].

Segundo Weibull, no projeto das máquinas de fadiga devem-se levar em conta as seguintes características: a) o mecanismo que produz o carregamento constante e/ou alternado; b) os mecanismos de transmissão de carga (garras, juntas de flexão, guias de fixação, etc.); c) os transdutores de medição que permitem medir cargas, deformações, e ajustar seus limites de carga ou deformação; d) o dispositivo de controle para manter carregamentos, ou deformações nas trajetórias desejadas requeridas pelo ensaio; e) uma estrutura rígida que suporte os componentes da máquina e evite problemas de vibração. Weibull propôs uma classificação das máquinas de ensaio de fadiga de acordo com o propósito do ensaio, os tipos de carga, os meios de produzir a carga, as características operacionais, etc; Destacou, também, a importância da calibração como um fator indispensável para a obtenção de resultados confiáveis. Todos estes detalhes devem ser levados em consideração, já que podem influenciar nos resultados [16].

A seguir, apresentam-se as principais máquinas de ensaios de fadiga multiaxial utilizados na atualidade. Uma máquina tração-torção para ensaios de fadiga dinâmico 8802TT foi desenvolvida pela empresa Instron [17], a qual tem como atuador principal sistemas servo-hidráulicos, com opções de capacidade desde 2 kN até 100 kN em tração e compressão e desde 100 N.m até 1000 N.m na torção. Estes sistemas utilizam um controle do tipo PID, otimizando seus parâmetros de controle durante o ensaio a mudanças nas características do corpo de prova.



Figura 1.2 Máquina Instron 8802TT para ensaios de fadiga multiaxial [17]

Outras máquinas desenvolvidas pela Instron para ensaios de fadiga multiaxial são a série eletroPlus E10000, os sistemas cruciformes biaxiais planares 8800, INSTRON 8874 e INSTRON 8850. Outro fabricante de máquinas de fadiga multiaxial é a MTS, que desenvolveu máquinas servo-hidráulicas tração-torção série MTS-BIONIX [18], modelo MTS 809, MTS 858 e sistema de ensaio planar biaxial [19].



Figura 1.3 Máquina MTS tração torção modelo 370.02 [19]

No uso de máquinas para ensaios multiaxiais apresentaram-se trabalhos orientados na área de fadiga na previsão de vida, cálculo do dano, propagação de trinca, modelos de plasticidade incremental, dentre outros temas. Um trabalho com máquinas multiaxiais foi desenvolvido para a previsão de vida em componentes de engenharia e estruturas com um alto grau de precisão [20]. A vida à fadiga foi determinada pelas sequências de tensão-deformação nos locais críticos, as quais foram calculadas para um carregamento não-proporcional cíclico arbitrário.

Outro trabalho [21] estuda, mediante simulação, a evolução e a redistribuição cíclica da tensão-deformação, e a avaliação dos parâmetros de fadiga adequados para estimar a vida sobre carregamentos multiaxiais. Foi verificado experimentalmente, através de uma série de testes de fadiga de baixo ciclo biaxial composto da tração-compressão, torção estática e cíclica, realizados em uma máquina de ensaio biaxial servo-hidráulico (Instron 8800).

Em relação às máquinas de ensaios de fadiga, a maioria dos sistemas envolve sistemas hidráulicos. O uso de atuadores elétricos, como dos motores de corrente contínua (DC) é vantajoso pela redução de custos e dimensões da máquina, ao dispensar um pressurizador hidráulico. O controle de sistemas elétricos, como dos motores DC apresenta muitos trabalhos de pesquisa aplicados, como atuadores industriais que desempenham tarefas nas quais são necessárias forças e torques relativamente altos. O esquema de controle muitas vezes utiliza sinais medidos localmente, não requerendo a computação da dinâmica não-linear dos sistemas eletromecânicos.

Os atuadores de corrente contínua (DC) estão entre os mais utilizados no controle de velocidade em aplicações industriais (máquinas ferramentas, sistemas flexíveis de produção, robótica, etc.), e frequentemente são substituídos por atuadores de corrente alternada (AC), a fim de evitar o problema associado à manutenção mecânica dos comutadores [22]. Por outro lado, os atuadores AC requerem uma estratégia de controle muito mais complexa para obter um alto desempenho estático e dinâmico. No entanto, a modelagem baseada no campo orientado permite modelar a dinâmica de um atuador AC de modo quase similar ao de um atuador DC. Consequentemente, algumas das estratégias de controle de

posição robusta desenvolvidas para atuadores DC podem ser utilizadas no controle de atuadores AC.

Outro trabalho [23] apresentou um esquema de controle baseado na metodologia de perturbações singulares e técnicas tipo *sliding* (deslizamento) aplicados a um motor de passo. A estratégia projetada permite o controle da velocidade angular e a posição do motor para o seguimento de uma determinada trajetória de referência, e baseia-se na reconstrução do sinal medido diretamente da corrente e tensão elétrica do estator.

Um modelo de controle de seguimento de posição por campo orientado foi desenvolvido para um motor de indução com incertezas nos parâmetros e perturbações no torque. No projeto do controlador foram utilizados um sistema *fuzzy* para aproximar as não-linearidades e uma técnica adaptativa *backstepping* [24]. Assim, um controlador Fuzzy adaptativo permite a convergência do erro a uma pequena vizinhança da origem e, comparado ao controle *backstepping* convencional, apresenta uma estrutura muito mais simples.

## **1.5. Conteúdo da tese**

O conteúdo desta tese encontra-se organizado da seguinte forma. No capítulo dois, apresenta-se a revisão bibliográfica da formulação utilizada no estudo de plasticidade incremental e alguns modelos de plasticidade incremental de interesse para a pesquisa, tais como modelos de ratcheting uniaxial e multiaxial e modelos de encruamento cinemático, isotrópico e não proporcional. No capítulo três, descreve-se a implementação do simulador para os modelos de plasticidade incremental. No capítulo quatro apresenta-se o projeto, a análise da integridade estrutural, a construção e a modelagem da máquina tração-torção. O capítulo cinco trata do projeto e desenvolvimento da célula de carga e torque e calibração dos transdutores. Apresenta também o desenvolvimento do sistema experimental da máquina tração-torção, e as conexões elétricas do sistema de controle. No capítulo seis estudam-se as técnicas de controle implementadas na máquina tração torção, tais como controle *sliding* e controle PID *sliding*. No capítulo sete, apresentam-se

os resultados experimentais da máquina tração-torção com as técnicas de controle estudadas no capítulo cinco. Além disso, apresentam-se os resultados experimentais dos modelos de plasticidade incremental estudados no capítulo dois. E, finalmente, no capítulo oito, encontram-se as conclusões e as sugestões para trabalhos futuros na continuação desta tese.

## **2**

### **Fundamentos de Plasticidade Incremental**

#### **2.1.**

##### **Introdução**

Na maioria das aplicações na engenharia é conhecida a história de tensões ou deformações, mas não ambas. Geralmente para projetar um componente novo, a história de tensões é calculada, ou estimada a partir das cargas de projeto (medidas ou especificadas). Entretanto, em componentes que já existem só podem ser medidas as deformações mediante a avaliação da integridade estrutural (utilizando *strain gage* ou rosetas). Mas os melhores modelos para determinar o dano à fadiga multiaxial requerem o conhecimento de ambas: a história de tensões e suas correspondentes deformações, para assim quantificar o parâmetro de dano associado.

Nos corpos de prova submetidos a histórias não proporcionais, o fenômeno de encruamento não proporcional tem um papel importante na previsão da vida à fadiga. Na literatura são apresentados diversos modelos que relacionam tensões e deformações tentando modelar este fenômeno para histórias proporcionais, mas nenhum deles aplica-se ao caso não proporcional (NP). Uma solução geral para este problema pode ser a utilização de um modelo complexo de plasticidade incremental, que normalmente requer a modelagem global da peça.

#### **2.2.**

##### **Algoritmos de plasticidade incremental**

Para histórias na zona linear elástica é muito fácil correlacionar a tensão com a deformação, através da Lei de Hooke. Entretanto, para histórias elastoplásticas proporcionais onde as direções principais são mantidas fixas, pode-se utilizar alguns modelos de tensão-deformação aproximados.

Contudo, para reproduzir corretamente os laços de histerese tensão-

deformação sobre histórias elastoplásticas não proporcionais, que dependem da direção da carga, é necessário utilizar modelos de plasticidade incremental para correlacionar as variações infinitesimais de todas as componentes de tensões com as deformações associadas e vice-versa. Estas equações são baseadas nas equações da função de escoamento (descreve a combinação de tensões que levam ao escoamento), a regra de fluxo (descreve a relação entre tensão e deformação plástica) e a regra de encruamento (define a mudança do encruamento com a deformação plástica). A seguir mostram-se como as 12 componentes das tensões ou deformações podem ser representadas, projetadas em planos específicos e combinadas em valores equivalentes.

### 2.2.1. Tensor de tensão e deformação

Geralmente as tensões e deformações são representadas pelo tensor 3 x 3 de Cauchy  $[\sigma_{ij}]$  e  $[\varepsilon_{ij}]$ , com 9 elementos

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}, \quad [\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

onde  $\tau_{ij} = \tau_{ji}$  e  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ , para  $i \neq j$ .

A tensão ou deformação desviatória é definida pela diferença entre a tensão ou deformação e sua componente hidrostática  $\sigma_h = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3$  e  $\varepsilon_h = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)/3$ , que pode ser representada como um tensor 3 x 3 Cauchy  $[S_{ij}]$  e  $[e_{ij}]$ :

$$[S_{ij}] = \begin{bmatrix} S_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & S_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & S_z \end{bmatrix}, \quad [e_{ij}] = \begin{bmatrix} e_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & e_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & e_z \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

onde

$$\begin{aligned} S_x &\equiv \sigma_x - \sigma_h = (2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z)/3, & e_x &\equiv \varepsilon_x - \varepsilon_h = (2\varepsilon_x - \varepsilon_y - \varepsilon_z)/3 \\ S_y &\equiv \sigma_y - \sigma_h = (2\sigma_y - \sigma_x - \sigma_z)/3, & e_y &\equiv \varepsilon_y - \varepsilon_h = (2\varepsilon_y - \varepsilon_x - \varepsilon_z)/3 \\ S_z &\equiv \sigma_z - \sigma_h = (2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y)/3, & e_z &\equiv \varepsilon_z - \varepsilon_h = (2\varepsilon_z - \varepsilon_x - \varepsilon_y)/3 \end{aligned}$$

Se todas as tensões cisalhantes forem zero, então  $x$ ,  $y$  e  $z$  representam as direções principais, e o estado de tensões principais  $\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z$  pode ser representado por um vetor  $[\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z]^T$ . Os pontos de tensão desviatória  $[S_x \ S_y \ S_z]^T$  descreve um plano nesta direção principal chamado plano desviatório ou plano- $\pi$ , que consiste de um dos oito planos octaédricos. Qualquer plano paralelo ao plano- $\pi$  é também chamado de plano desviatório e a tensão normal perpendicular ao plano desviatório é associado com um vetor de tensão hidrostática  $[\sigma_h \ \sigma_h \ \sigma_h]^T$ . Note que a componente hidrostática da tensão e deformação desviatória é sempre zero, uma vez que  $S_x + S_y + S_z = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) - 3\sigma_h = 0$  e  $e_x + e_y + e_z = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) - 3\varepsilon_h = 0$ . Qualquer tensão (ou deformação) pode-se decompor em duas componentes, o desviatório e a hidrostática, e.g.,  $[\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z]^T = [S_x \ S_y \ S_z]^T + [\sigma_h \ \sigma_h \ \sigma_h]^T$ . Estas componentes são ortogonais, já que o produto escalar entre eles é zero ( $(S_x - \sigma_h + S_y - \sigma_h + S_z - \sigma_h) = (S_x + S_y + S_z) - 3\sigma_h = 0$ ).

Ilyushin [25] representou o tensor da tensão e deformação como um vetor de 9 dimensões (9D), evitando a necessidade de tratar operações tensoriais. Voigt e Mandel [26] propuseram uma representação ainda melhor, considerando as vantagens das simetrias  $\tau_{ij} = \tau_{ji}$  e  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$  (com  $i \neq j$ , e.g.  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ,  $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ ,  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ ,  $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}$ ,  $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx}$  e  $\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy}$ ) para expressar as tensões e deformações como um vetor de 6 dimensões (6D).

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma} \equiv \bar{\sigma}_{6D} &= [\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy}\sqrt{2} \ \tau_{xz}\sqrt{2} \ \tau_{yz}\sqrt{2}]^T \\ \bar{\varepsilon} \equiv \bar{\varepsilon}_{6D} &= [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \gamma_{xy}/\sqrt{2} \ \gamma_{xz}/\sqrt{2} \ \gamma_{yz}/\sqrt{2}]^T \\ \bar{S} \equiv \bar{S}_{6D} &= [S_x \ S_y \ S_z \ \tau_{xy}\sqrt{2} \ \tau_{xz}\sqrt{2} \ \tau_{yz}\sqrt{2}]^T \\ \bar{e} \equiv \bar{e}_{6D} &= [e_x \ e_y \ e_z \ \gamma_{xy}/\sqrt{2} \ \gamma_{xz}/\sqrt{2} \ \gamma_{yz}/\sqrt{2}]^T \end{aligned} \right\} \text{Voigt-Mandel (2.3)}$$

onde  $\gamma_{ij} \equiv 2\varepsilon_{ij}$  (significa  $\gamma_{xy} = \varepsilon_{xy} + \varepsilon_{yx} = 2\varepsilon_{xy}$ ,  $\gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz}$  e  $\gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz}$ ), e T representa a transposta de um vetor. A notação 6D de Voigt-Mandel é utilizada extensivamente para representar as relações tensão-deformação na mecânica dos sólidos, e para a eficiência computacional em softwares numéricos de mecânica estrutural.

A transformação a partir da tensão ou deformação 6D para suas partes

desviatórias na notação de Voigt-Mandel pode ser representada por uma matriz de projeção de  $6 \times 6$   $A_{6D}$  através de  $\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{A}_{6D} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}$  e  $\bar{\mathbf{e}} = \mathbf{A}_{6D} \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ , onde

$$\mathbf{A}_{6D} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Na notação Voigt-Mandel, é possível representar a deformação elastoplástica  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  em suas componentes elástica e plástica, através de

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_e + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p \quad (2.5)$$

onde  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_e = [\varepsilon_{xe} \quad \varepsilon_{ye} \quad \varepsilon_{ze} \quad \gamma_{xye}/\sqrt{2} \quad \gamma_{xze}/\sqrt{2} \quad \gamma_{yze}/\sqrt{2}]^T$  e

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = [\varepsilon_{xp} \quad \varepsilon_{yp} \quad \varepsilon_{zp} \quad \gamma_{xyp}/\sqrt{2} \quad \gamma_{xzp}/\sqrt{2} \quad \gamma_{yzp}/\sqrt{2}]^T$$

A lei de Hooke na forma vetorial é descrita por

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_e = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xe} \\ \varepsilon_{ye} \\ \varepsilon_{ze} \\ \gamma_{xye}/\sqrt{2} \\ \gamma_{xze}/\sqrt{2} \\ \gamma_{yze}/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy}\sqrt{2} \\ \tau_{xz}\sqrt{2} \\ \tau_{yz}\sqrt{2} \end{bmatrix} = E_{6D}^{-1} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad (2.6)$$

onde  $\nu$  é o coeficiente elástico de Poisson e  $E_{6D}^{-1}$  é a matriz  $6 \times 6$  de Hooke.

Para deformações elastoplásticas, é também possível representar as componentes elástica e plástica de sua parte desviatória na notação de Voigt-Mandel através de

$$\bar{\mathbf{e}} = \bar{\mathbf{e}}_e + \bar{\mathbf{e}}_p \quad (2.7)$$

onde  $\bar{\mathbf{e}}_e \equiv [e_{xe} \quad e_{ye} \quad e_{ze} \quad \gamma_{xye}/\sqrt{2} \quad \gamma_{xze}/\sqrt{2} \quad \gamma_{yze}/\sqrt{2}]^T$  e

$$\bar{\mathbf{e}}_p \equiv [e_{xp} \quad e_{yp} \quad e_{zp} \quad \gamma_{xyp}/\sqrt{2} \quad \gamma_{xzp}/\sqrt{2} \quad \gamma_{yzp}/\sqrt{2}]^T$$

A partir das equações acima e segundo a lei de Hooke, relaciona-se a tensão desviatória 6D  $\bar{S}$  com a componente de deformação elástica  $\bar{e}_e$  na notação de Voigt-Mandel,

$$\bar{e}_e = \bar{S} / 2G \quad (2.8)$$

onde  $G = E/[2 \cdot (1+\nu)]$ .

Note que a deformação hidrostática  $\epsilon_h$  é sempre elástica para materiais insensíveis à pressão, que são definidos como materiais cujo escoamento é independente de sua tensão hidrostática  $\sigma_h$  (e.g. materiais que seguem o critério de escoamento de Mises ou Tresca). Portanto, ela não pode causar deformação plástica, e pode-se relacionar  $\sigma_h$  e  $\epsilon_h$  utilizando a lei de Hooke:

$$\begin{aligned} E\epsilon_{xe} &= \sigma_x - \nu \cdot (\sigma_y + \sigma_z) \\ + E\epsilon_{ye} &= \sigma_y - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_z) \\ E\epsilon_{ze} &= \sigma_z - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y) \end{aligned} \Rightarrow \epsilon_h = \frac{\sigma_h}{3\mathcal{K}} \Rightarrow \bar{\epsilon}_h = \frac{\bar{\sigma}_h}{3\mathcal{K}} \quad (2.9)$$

$$3E \cdot \epsilon_h = 3\sigma_h \cdot (1-2\nu)$$

onde  $\mathcal{K} = E/[3 \cdot (1-2\nu)]$  é módulo de compressão volumétrica do material, que mede sua resistência à compressão uniforme.

Uma vez que  $\epsilon_h$  é sempre elástico puro (e.g. tem componente plástica zero) para materiais insensíveis à pressão, então a deformação plástica  $\epsilon_{xp}$ ,  $\epsilon_{yp}$  e  $\epsilon_{zp}$  deve ser igual a  $e_{xp}$ ,  $e_{yp}$  e  $e_{zp}$ .

$$\begin{cases} e_x \equiv \epsilon_x - \epsilon_h \\ e_y \equiv \epsilon_y - \epsilon_h \\ e_z \equiv \epsilon_z - \epsilon_h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_{xp} = \epsilon_{xp} \\ e_{yp} = \epsilon_{yp} \\ e_{zp} = \epsilon_{zp} \end{cases} \quad (2.10)$$

### 2.2.2.

#### Redução de ordem do espaço de tensão e deformação

Ao trabalhar com cálculos de tensão-deformação multiaxial, é uma boa ideia trabalhar com um espaço de tensões ou deformações de dimensão reduzida,

economizando o esforço computacional sem modificar os resultados. Trabalhando no espaço desviatório é possível simplificar várias equações, e.g. a lei de Hooke torna-se uma operação escalar em vez de multiplicações com a matriz de rigidez ou sua inversa.

Uma vez que  $S_x + S_y + S_z = 0$ , é possível reduzir a dimensão da tensão desviatória de 6D para 5D, definindo um vetor 5D  $\bar{S}' \equiv \bar{S}_{5D} = [S_1 \ S_2 \ S_3 \ S_4 \ S_5]^T$  [27].

O subespaço euclidiano 5D ( $E_{5S}$ ) utilizado nesta tese para esta projeção 5D é definido por

$$\bar{S}' \equiv \bar{S}_{5D} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}}_A \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy}\sqrt{2} \\ \tau_{xz}\sqrt{2} \\ \tau_{yz}\sqrt{2} \end{bmatrix} \equiv A \cdot \bar{\sigma} \quad (2.11)$$

onde A é a matriz de projeção do espaço 6D de Voigt-Mandel dentro do subespaço 5D de tensão desviatória adotado.

O espaço desviatório 5D definido acima  $\bar{S}'$  têm três propriedades interessantes:

**Primeiro:** a norma do vetor  $\bar{S}'$  é igual à tensão de Mises equivalente  $\sigma_{Mises}$ , pois  $|\bar{S}'| = \frac{|\bar{S}|}{\sqrt{2/3}} = \frac{|\bar{S}_{9D}|}{\sqrt{2/3}} = \sigma_{Mises} = \frac{\tau_{Mises}\sqrt{3}}{\sqrt{2/3}}$ .

**Segundo:** O comprimento euclidiano no espaço  $E_{5S}$  entre dois estados de tensão (pontos)  $\bar{S}'_A = [S_{1A}, S_{2A}, S_{3A}, S_{4A}, S_{5A}]^T$  e  $\bar{S}'_B = [S_{1B}, S_{2B}, S_{3B}, S_{4B}, S_{5B}]^T$ , associados respectivamente a  $\bar{S}_A$  e  $\bar{S}_B$  em 6D, é igual à gama de tensão de Mises  $\Delta\sigma_{Mises}$  entre esses estados de tensões.

$$|\bar{S}'_B - \bar{S}'_A| = \frac{|\bar{S}_B - \bar{S}_A|}{\sqrt{2/3}} = \frac{|\bar{S}_{9D,B} - \bar{S}_{9D,A}|}{\sqrt{2/3}} = \Delta\sigma_{\text{Mises}} = \frac{\Delta\tau_{\text{Mises}}\sqrt{3}}{\sqrt{2/3}} \quad (2.12)$$

**Terceiro:** O lugar geométrico dos pontos que têm o mesmo  $\Delta\sigma_{\text{Mises}}$  com relação a um ponto  $\bar{S}'$  no subespaço desviatório  $E_{5S}$  é a superfície de uma hipersfera com centro em  $\bar{S}'$  e raio  $\Delta\sigma_{\text{Mises}}$ .

Para uma história de deformações, é possível representar a deformação desviatória em um subespaço euclidiano 5D transformado  $E_{5e}$  utilizando a mesma matriz de transformação  $A$  utilizada para tensões desviatórias, resultando em deformações desviatórias de ordem reduzida.

$$\bar{e}' \equiv \bar{e}_{5D} = [e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_4 \ e_5]^T = A \cdot \bar{\varepsilon} = A \cdot \bar{e} \quad (2.13)$$

onde  $e_1 \equiv \varepsilon_x - \frac{\varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_z}{2} = \frac{3}{2}\varepsilon_x$ ,  $e_2 \equiv \frac{\varepsilon_y - \varepsilon_z}{2}\sqrt{3} = \frac{e_y - e_z}{2}\sqrt{3}$ ,  $e_3 \equiv \frac{\gamma_{xy}}{2}\sqrt{3}$ ,  
 $e_4 \equiv \frac{\gamma_{xz}}{2}\sqrt{3}$ ,  $e_5 \equiv \frac{\gamma_{yz}}{2}\sqrt{3}$ .

A deformação desviatória 5D  $\bar{e}'$  no subespaço de deformação  $E_{5e}$  também tem propriedades muito semelhantes ao subespaço  $E_{5S}$ .

Para histórias constituídas apenas pela combinação da tensão uniaxial  $\sigma_x$  e a torção  $\tau_{xy}$  (onde  $\sigma_y = \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ ), pode ser utilizado um subespaço 2D para representar a tensão e deformação desviatória:

$$\bar{S}_{2D} \equiv [S_1 \ S_3]^T = [\sigma_x \ \tau_{xy}\sqrt{3}]^T \quad (2.14)$$

$$\bar{e}_{2D} \equiv [e_1 \ e_3]^T = \left[ \varepsilon_x \cdot (1+\bar{\nu}) \ \frac{\gamma_{xy}}{2}\sqrt{3} \right]^T \quad (2.15)$$

onde  $S_1 \equiv \sigma_x$ ,  $S_3 \equiv \tau_{xy}\sqrt{3}$  e  $e_1 \equiv \varepsilon_x - \frac{-\bar{\nu}\varepsilon_x}{2} - \frac{-\bar{\nu}\varepsilon_x}{2} = \varepsilon_x \cdot (1+\bar{\nu})$  que, assumindo que  $\varepsilon_y = \varepsilon_z \equiv -\bar{\nu} \cdot \varepsilon_x$ , resulta em  $e_1 = \varepsilon_x \cdot (1+\bar{\nu})$  e  $e_2 \equiv 0$ .

Tais simplificações são a maior vantagem da formulação de ordem reduzida 5D. Separando a deformações desviatórias em suas componentes elástica e plástica, temos

$$\bar{\epsilon}_{2De} \equiv (1+\nu) \cdot \left[ \epsilon_{xe} \quad \frac{\gamma_{xye}}{2 \cdot (1+\nu)} \sqrt{3} \right]^T \quad (2.16)$$

$$\bar{\epsilon}_{2Dp} \equiv \frac{3}{2} \cdot \left[ \epsilon_{xp} \quad \frac{\gamma_{xyp}}{\sqrt{3}} \right]^T \quad (2.17)$$

As transformações entre os espaços 6D e 5D são resumidas na Tabelas 1 e 2

Tabela 1. Transformação direta e inversa entre o espaço 6D e 5D, na forma matricial

<b>Transformação</b>	<b>A partir de 6D para 5D</b>	<b>A partir de 5D para 6D</b>
<b>Tensão</b>	$\bar{S}' = A \cdot \bar{\sigma} = A \cdot \bar{S}$	$\bar{S} = \frac{2}{3} A^T \cdot \bar{S}' \Rightarrow \bar{\sigma} = \bar{S} + \bar{\sigma}_h$
<b>Deformação elastoplástica</b>	$\bar{e}' = A \cdot \bar{\epsilon} = A \cdot \bar{e}$	$\bar{e} = \frac{2}{3} A^T \cdot \bar{e}' \Rightarrow \bar{\epsilon} = \bar{e} + \bar{\epsilon}_h$
<b>Deformação elástica</b>	$\bar{e}_e' = A \cdot \bar{\epsilon}_e = A \cdot \bar{e}_e$	$\bar{e}_e = \frac{2}{3} A^T \cdot \bar{e}_e' \Rightarrow \bar{\epsilon}_e = \bar{e}_e + \bar{\epsilon}_h$
<b>Deformação plástica</b>	$\bar{e}_p' = A \cdot \bar{\epsilon}_p = A \cdot \bar{e}_p$	$\bar{e}_p = \bar{e}_p = \frac{2}{3} A^T \cdot \bar{e}_p'$ (Já que $\bar{\epsilon}_h$ é elástica)

Tabela 2. Transformação direta e inversa entre o espaço 6D e 5D, na forma escalar

<b>Transformação</b>	<b>A partir de 6D para 5D</b>	<b>A partir de 5D para 6D</b>
<b>Tensão</b>	$S_1 = \sigma_x - (\sigma_y + \sigma_z) / 2$ $S_2 = (\sigma_y - \sigma_z) \sqrt{3} / 2$ $S_3 = \tau_{xy} \sqrt{3}, S_4 = \tau_{xz} \sqrt{3}$ $S_5 = \tau_{yz} \sqrt{3}$	$\sigma_x = \sigma_h + S_1 \cdot 2 / 3$ $\sigma_y = \sigma_h - S_1 / 3 + S_2 / \sqrt{3}$ $\sigma_z = \sigma_h - S_1 / 3 - S_2 / \sqrt{3}$ $\tau_{xy} = S_3 / \sqrt{3}, \tau_{xz} = S_4 / \sqrt{3}, \tau_{yz} = S_5 / \sqrt{3}$

<b>Deformação elastoplástica</b>	$e_1 = \varepsilon_x - (\varepsilon_y + \varepsilon_z) / 2$ $e_2 = (\varepsilon_y - \varepsilon_z) \sqrt{3} / 2$ $e_3 = \gamma_{xy} \sqrt{3} / 2$ $e_4 = \gamma_{xz} \sqrt{3} / 2$ $e_5 = \gamma_{yz} \sqrt{3} / 2$	$\varepsilon_x = \varepsilon_h + e_1 \cdot 2 / 3$ $\varepsilon_y = \varepsilon_h - e_1 / 3 + e_2 / \sqrt{3}$ $\varepsilon_z = \varepsilon_h - e_1 / 3 - e_2 / \sqrt{3}$ $\gamma_{xy} = e_3 \cdot 2 / \sqrt{3}, \quad \gamma_{xz} = e_4 \cdot 2 / \sqrt{3}$ $\gamma_{yz} = e_5 \cdot 2 / \sqrt{3}$
<b>Deformação elástica</b>	$e_{1e} = \varepsilon_{xe} - (\varepsilon_{ye} + \varepsilon_{ze}) / 2$ $e_{2e} = (\varepsilon_{ye} - \varepsilon_{ze}) \sqrt{3} / 2$ $e_{3e} = \gamma_{xye} \sqrt{3} / 2$ $e_{4e} = \gamma_{xze} \sqrt{3} / 2$ $e_{5e} = \gamma_{yze} \sqrt{3} / 2$	$\varepsilon_{xe} = \varepsilon_h + e_{1e} \cdot 2 / 3$ $\varepsilon_{ye} = \varepsilon_h - e_{1e} / 3 + e_{2e} / \sqrt{3}$ $\varepsilon_{ze} = \varepsilon_h - e_{1e} / 3 - e_{2e} / \sqrt{3}$ $\gamma_{xye} = e_{3e} \cdot 2 / \sqrt{3}, \quad \gamma_{xze} = e_{4e} \cdot 2 / \sqrt{3}$ $\gamma_{yze} = e_{5e} \cdot 2 / \sqrt{3}$
<b>Deformação plástica</b>	$e_{1p} = \varepsilon_{xp} - (\varepsilon_{yp} + \varepsilon_{zp}) / 2$ $e_{2p} = (\varepsilon_{yp} - \varepsilon_{zp}) \cdot \sqrt{3} / 2$ $e_{3p} = \gamma_{xyp} \cdot \sqrt{3} / 2$ $e_{4p} = \gamma_{xzp} \cdot \sqrt{3} / 2$ $e_{5p} = \gamma_{yzp} \cdot \sqrt{3} / 2$	$\varepsilon_{xp} = e_{1p} \cdot 2 / 3$ $\varepsilon_{yp} = -e_{1p} / 3 + e_{2p} / \sqrt{3}$ $\varepsilon_{zp} = -e_{1p} / 3 - e_{2p} / \sqrt{3}$ $\gamma_{xyp} = e_{3p} \cdot 2 / \sqrt{3}, \quad \gamma_{xzp} = e_{4p} \cdot 2 / \sqrt{3}$ $\gamma_{yzp} = e_{5p} \cdot 2 / \sqrt{3}$

### 2.2.3.

#### Incremento de deformação plástica equivalente e deformação plástica total

Várias equações de plasticidade incremental utilizam a norma  $|d\bar{\varepsilon}_p|$  do incremento de deformação plástica  $d\bar{\varepsilon}_p$ , que define a variação infinitesimal do vetor de deformação plástica. Uma maneira de representar a norma através do incremento de deformação plástica  $d\mathcal{p}$ , uma quantidade escalar positiva que pode ser definida como a variação absoluta da deformação efetiva plástica de Mises  $\varepsilon_{p,Mises}$ . Esta deformação é dada por  $\varepsilon_{p,Mises} = |\bar{\varepsilon}_p| / (1+0.5)$ , assumindo coeficiente de Poisson plástico 0.5. A partir das relações  $|\bar{\varepsilon}_p| = |\varepsilon_p| = |\bar{\varepsilon}_p'| \cdot \sqrt{2/3}$  entre as representações da deformação 6D e 5D, pode-se expressar o  $d\mathcal{p}$  como

$$\varepsilon_{p,Mises} = \frac{2}{3} \cdot |\bar{\varepsilon}_p'| \quad \Rightarrow \quad d\mathcal{p} = \frac{2}{3} \cdot |d\bar{\varepsilon}_p'| = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot |d\bar{\varepsilon}_p| = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot |d\bar{\varepsilon}_p| \quad (2.18)$$

A integral desse incremento positivo  $d\mathbf{p}$  é definida como a deformação plástica acumulada  $\mathbf{p}$ , e expressada como

$$\mathbf{p} = \int d\mathbf{p} = \frac{2}{3} \cdot \int |d\bar{\epsilon}_p'| = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \int |d\bar{\epsilon}_p| = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \int |d\bar{\epsilon}_p| \quad (2.19)$$

Note que  $\epsilon_{p,Mises}$  e  $\mathbf{p}$  são quantidades diferentes, já que  $\epsilon_{p,Mises}$  pode oscilar durante um ciclo de carga, enquanto  $\mathbf{p}$  aumenta monotonicamente em qualquer processo de deformação plástica.

#### 2.2.4. Função de escoamento e regra de fluxo

A função de escoamento é uma equação no espaço de tensões  $\bar{\sigma}$  que descreve a combinação das componentes de tensão que causam escoamento. A função de escoamento mais utilizada é a baseada no critério de escoamento de Mises:

$$F \equiv F_1 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x\sigma_y - \sigma_x\sigma_z - \sigma_y\sigma_z + 3 \cdot (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) - r_1^2 = 0 \quad (2.20)$$

onde  $r_1$  é a tensão de escoamento (seja monotônica  $r_1 = S_y$  ou cíclica  $r_1 = S_{yc}$ , ou algum valor entre eles). A função de escoamento assume que o material é isotrópico e insensível à pressão hidrostática.

Geometricamente, a função de escoamento de Mises  $F = 0$  descreve, em sua representação em 2D no diagrama  $\sigma_x - \sigma_y$ , o contorno de uma elipse girada  $45^\circ$  a partir do eixo x, vide Figura 2.1.

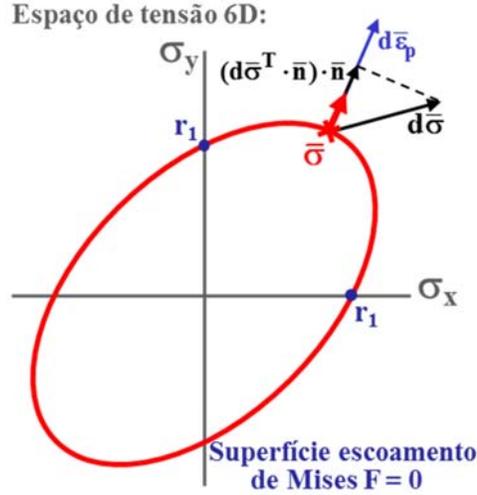


Figura 2.1 A superfície de escoamento de Mises no plano  $|\sigma_x - \sigma_y|$  com o vetor normal e a regra de fluxo plástico

A regra de fluxo de Prandtl-Reuss descreve a relação entre um incremento  $d\bar{\sigma}$  de tensão, direcionado para fora da superfície de Mises, e o incremento de deformação plástica correspondente:

$$d\bar{\epsilon}_p = \frac{1}{C} \cdot (d\bar{\sigma}^T \cdot \bar{n}) \cdot \bar{n} \quad (2.21)$$

onde  $d\bar{\sigma}^T \cdot \bar{n}$  é o produto escalar de  $d\bar{\sigma}$  e  $\bar{n}$ ,  $C$  é geralmente conhecido por módulo de plasticidade, e  $\bar{n}$  é o vetor unitário normal à superfície  $F = 0$  e no estado atual  $\bar{\sigma}$ ,

$$\bar{n} = \frac{\partial F / \partial \bar{\sigma}}{|\partial F / \partial \bar{\sigma}|} \quad (2.22)$$

onde  $|\partial F / \partial \bar{\sigma}|$  é a norma do gradiente de  $F$ ,

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{\sigma}} = \left[ \frac{\partial F}{\partial \sigma_x} \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma_y} \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma_z} \quad \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy} \sqrt{2}} \quad \frac{\partial F}{\partial \tau_{xz} \sqrt{2}} \quad \frac{\partial F}{\partial \tau_{yz} \sqrt{2}} \right]^T \quad (2.23)$$

O módulo de plasticidade generalizado  $C$  pode ser obtido para o caso uniaxial utilizando a equação de Ramberg-Osgood,

$$C = \frac{2}{3} \cdot h_c H_c \left( \frac{\sigma_x}{H_c} \right)^{1-1/h_c} \quad (2.24)$$

onde  $h_c$  e  $H_c$  são o expoente e coeficiente de encruamento cíclico.

### 2.2.5.

#### Regra do fluxo plástico no espaço desviatório 5D

É possível representar a função de escoamento de Mises, a regra de fluxo plástico e a lei de Hooke com relação aos vetores  $\bar{S}' \equiv \bar{S}_{5D}$  e deformação  $\bar{e}' \equiv \bar{e}_{5D}$  5D, em vez de utilizar vetores 6D  $\bar{\sigma}$ ,  $\bar{\epsilon}$ ,  $\bar{S}$  ou  $\bar{e}$  de Voigt-Mandel, com ajuda da matriz de transformação A. No espaço desviatório 5D, demonstrou-se que a lei de Hooke torna-se simplesmente.

$$\bar{e}' = \bar{S}'/2G \quad \Rightarrow \quad d\bar{e}' = d\bar{S}'/2G \quad (2.25)$$

A partir das relações  $\bar{e}'_e = A \cdot \bar{e}_e$ ,  $\bar{e}'_p = A \cdot \bar{e}_p$  e  $\bar{e}'_p = \bar{\epsilon}_p$ , tem-se que os incrementos de deformação elástico e plástico são  $d\bar{e}'_e = A \cdot (d\bar{\epsilon}_e - d\bar{\epsilon}_h)$  e  $d\bar{e}'_p = A \cdot d\bar{\epsilon}_p$ . No espaço desviatório 5D, a função de escoamento é ainda mais simplificada, para

$$F = \left[ S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2 + S_5^2 \right] - r_1^2 = |\bar{S}'|^2 - r_1^2 = 0 \quad (2.26)$$

onde,  $|\bar{S}'|$  é a norma do vetor de tensão desviatória 5D de ordem reduzida. A superfície de escoamento é então a hiperesfera com raio  $r_1$  (e não  $r_1 \cdot \sqrt{2/3}$ , como na representação 6D) em tal subespaço desviatório, que concorda com  $|\bar{S}| = \sigma_{Mises}$ , onde  $\sigma_{Mises}$  é a tensão equivalente de Mises e  $r_1$  é a resistência ao escoamento atual. Quando é representado num diagrama 2D  $S_1$ - $S_2$ , assumindo  $S_3 = S_4 = S_5 = 0$ , a superfície resultante na fronteira é descrita por um círculo (vide Figura 2.2).

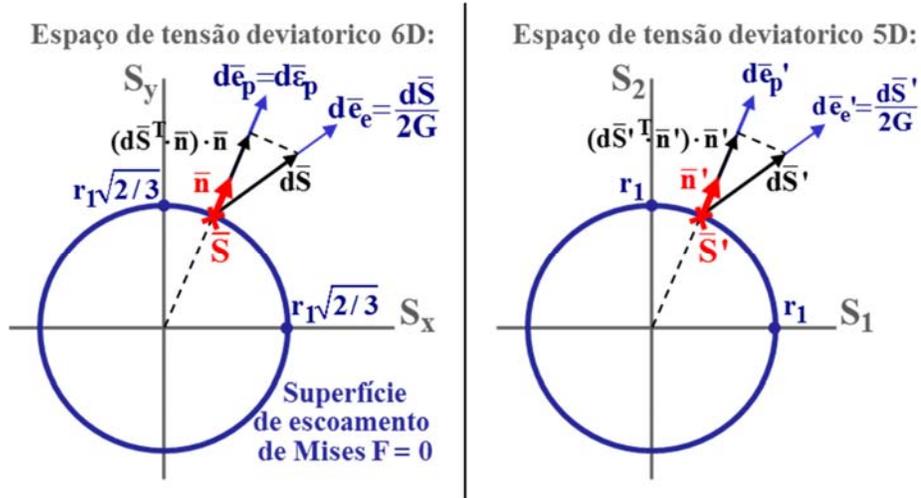


Figura 2.2 Superfície de escoamento de Mises no espaço de tensão desviatório 6D e 5D, onde ilustra-se o vetor normal  $\bar{n}$  e a regra de fluxo

A regra de fluxo plástico no subespaço 5D resulta em

$$d\bar{\epsilon}_p' = \frac{1}{C} \cdot (d\bar{S}'^T \cdot \bar{n}') \cdot \bar{n}' \quad (2.27)$$

e o incremento de deformação plástica 6D pode ser calculado a partir de

$$d\bar{\epsilon}_p = \frac{2}{3} A^T d\bar{\epsilon}_p' = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{C} \cdot (d\bar{S}'^T \cdot \bar{n}') \cdot A^T \cdot \bar{n} = \frac{1}{C} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot (d\bar{S}'^T \cdot \bar{n}') \cdot \bar{n} \quad (2.28)$$

Note que a equação de fluxo plástico acima é somente válida se  $d\bar{S}'^T \cdot \bar{n}' > 0$  ou seja, se o estado de tensão atual  $\bar{S}'$  está sobre a superfície de escoamento e seu incremento  $d\bar{S}'$  é na direção exterior de  $F = 0$ , caso contrário o incremento é elástico e  $d\bar{\epsilon}_p = d\bar{\epsilon}_p' = 0$ .

### 2.2.5.1.

#### Problema direto em 5D (dada uma história de tensões)

Se  $\bar{S}'$  está sobre a superfície de escoamento e sua variação  $d\bar{S}'$  é na direção para fora de  $F = 0$  (e.g.  $d\bar{S}'^T \cdot \bar{n}' > 0$ ), então o incremento de deformação  $d\bar{\epsilon}$  pode ser calculado utilizando a formulação 5D:

$$\left. \begin{aligned} \bar{S}' &= A \cdot (\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_h) \\ d\bar{S}' &= A \cdot (d\bar{\sigma} - d\bar{\sigma}_h) \end{aligned} \right\} \Rightarrow d\bar{\epsilon}' = d\bar{\epsilon}_e' + d\bar{\epsilon}_p' = \frac{d\bar{S}'}{2G} + \frac{1}{C} (d\bar{S}'^T \cdot \bar{n}') \cdot \bar{n}' \quad (2.29)$$

O incremento de deformação no espaço 5D é convertido no incremento de deformação  $d\bar{\epsilon}$  em 6D utilizando

$$d\bar{\epsilon} = d\bar{\epsilon}_e + d\bar{\epsilon}_p + d\bar{\epsilon}_h = \frac{2}{3} A^T \cdot (d\bar{\epsilon}_e' + d\bar{\epsilon}_p') + \frac{d\bar{\sigma}_h}{3\mathcal{K}} \quad (2.30)$$

resultando em

$$d\bar{\epsilon} = \frac{2}{3} A^T \cdot \left( \frac{d\bar{S}'}{2G} + \frac{1}{C} (d\bar{S}'^T \cdot \bar{n}') \cdot \bar{n}' \right) + \frac{d\bar{\sigma}_h}{3\mathcal{K}} \quad (2.31)$$

Por outro lado, se  $\bar{S}'$  não está sobre a superfície de escoamento ou seu incremento  $d\bar{S}'$  não é na direção para fora de  $F = 0$  (e.g.  $d\bar{S}'^T \cdot \bar{n}' \leq 0$ ), então o incremento de tensão é puramente elástico, resultando em  $d\bar{\epsilon} = d\bar{\epsilon}_e + d\bar{\epsilon}_h$ .

### 2.2.5.2. Condição de consistência

A condição de consistência é uma equação que garante que o novo estado de tensões  $\bar{S}' + d\bar{S}'$  durante o processo de deformação plástica irá cair sobre a superfície de escoamento  $r_1$ , cuja equação no espaço 5D  $E_{5S}$  é:

$$F = |\bar{S}' - \bar{\alpha}'|^2 - r_1^2 = (\bar{S}' - \bar{\alpha}')^T \cdot (\bar{S}' - \bar{\alpha}') - r_1^2 = 0 \quad (2.32)$$

onde  $\bar{\alpha}'$  é o vetor de translação da superfície de escoamento, que permite determinar o centro da superfície de escoamento no espaço de tensão 5D. A condição de deformação elástica é associada com  $F < 0$  (dentro da superfície de escoamento). Entretanto, para a condição de deformação plástica, sempre deve ser válido  $F = 0$  e  $dF = 0$ , resultando em:

$$dF = 2 \cdot d\bar{S}'^T \cdot (\bar{S}' - \bar{\alpha}') - 2 \cdot d\bar{\alpha}'^T \cdot (\bar{S}' - \bar{\alpha}') - 2 \cdot dr_1 = 0 \quad (2.33)$$

Sempre que  $\bar{S}'$  está sobre a superfície de escoamento, o comprimento radial  $|\bar{S}' - \bar{\alpha}'| = |\bar{S}' - \bar{S}_{c1}'|$  é igual a seu raio  $r_1$  e o vetor normal  $\bar{n}'$  pode ser determinado através de  $\bar{n}' = (\bar{S}' - \bar{\alpha}') / |\bar{S}' - \bar{\alpha}'| = (\bar{S}' - \bar{\alpha}') / r_1$ . A condição de consistência é obtida dividindo a equação (2.33) por  $2 \cdot r_1$ .

$$d\bar{S}'^T \cdot \bar{n}' = d\bar{\alpha}'^T \cdot \bar{n}' + dr_1 / r_1 \quad (2.34)$$

Na condição de consistência, o termo  $dr_1/r_1$  leva em conta a variação do raio da superfície de escoamento, mudando gradualmente devido aos efeitos de encruamento isotrópico ou não proporcional.

### 2.3. Modelos de plasticidade incremental

Na presença de plasticidade cíclica, o material pode experimentar uma série de mudanças e seu comportamento tensão-deformação, que pode ser representada num diagrama de tensão através da mudança de sua superfície de escoamento, e.g. Considerando-se uma história tração-torção aplicada ao material, o comportamento de sua superfície de escoamento pode ser descrito no diagrama  $\sigma_x \times \tau_{xy} \cdot \sqrt{3}$  mediante um círculo de raio  $r_1 = \sigma_{Mises} = \sqrt{\sigma_x^2 + (\tau_{xy} \sqrt{3})^2}$ .

A seguir apresentam-se alguns dos modelos de plasticidade incremental que se baseiam em fenômenos observados durante carregamentos cíclicos multiaxiais. Todos esses modelos são frequentemente complexos e incluem numerosas constantes do material, que deverão ser determinadas mediante ensaios.

#### 2.3.1. Encruamento cinemático

O efeito *Bauschinger* observado sobre carregamento cíclico é a mudança no valor absoluto do oposto da tensão de escoamento, após deformação plástica. Em outras palavras, carregar um corpo de prova acima de seu limite de escoamento num sentido reduz (em valor absoluto) a tensão de escoamento na direção oposta.

Na Figura 2.3 mostra-se o efeito *Bauschinger* para uma história uniaxial representada no diagrama  $\sigma_x \times \tau_{xy} \cdot \sqrt{3}$ , onde a superfície de escoamento  $\sigma_{Mises} = S_y$  translada-se sem nenhuma mudança na forma ou raio  $r_1$ . Se o centro da superfície de escoamento é transladado na direção  $x$  no espaço de tensão por

$(\sigma_{\text{Max}} - S_y)$ , então a superfície resultante será intersectada com o eixo  $x$  na nova tensão de escoamento à tração  $(\sigma_x - S_y + S_y) = \sigma_x$  e na nova tensão de escoamento compressivo  $(\sigma_x - S_y - S_y) = (\sigma_x - 2S_y)$ . Dado que este fenômeno envolve somente a translação cinemática da superfície de escoamento, é chamado de encruamento cinemático.

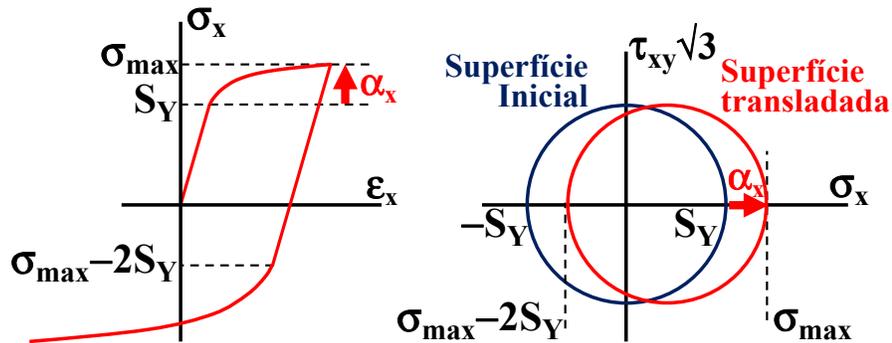


Figura 2.3 Encruamento cinemático

O novo centro da superfície de escoamento é representada pelo vetor  $\alpha$ , e comumente é chamado de vetor de translação da superfície de escoamento, responsável por armazenar a memória plástica. Na Figura 2.3, a resistência à tração no primeiro ciclo translada o centro da superfície de escoamento a partir de seu valor inicial  $\alpha = [0 \ 0]^T$  para  $\alpha = [\sigma_x - S_y \ 0]^T$ .

### 2.3.2. Encruamento isotrópico

O encruamento isotrópico resulta a partir da mudança na microestrutura nos estados iniciais do carregamento cíclico, aumentando ou diminuindo sua resistência contra a deformação plástica do material. Geralmente, os materiais submetidos à deformação plástica cíclica uniaxial tendem a endurecer ou amolecer, isto devido às interações entre os deslocamentos até sua estabilização, após alguns ciclos (entre 5 e 50 ciclos nos metais), e.g. Metais recozidos tendem a deformar e a endurecer ciclicamente, devido à sua baixa resistência ao escoamento e, por outro lado, os aços temperados tendem a amolecer ciclicamente. Durante o processo de estabilização, o raio da superfície de escoamento muda gradualmente a partir de  $S_y$

para  $S_{yc}$  (vide Figura 2.4). Uma vez que a superfície de escoamento se expande ou se contrai uniformemente em todas as direções, chama-se a este fenômeno de encruamento isotrópico.

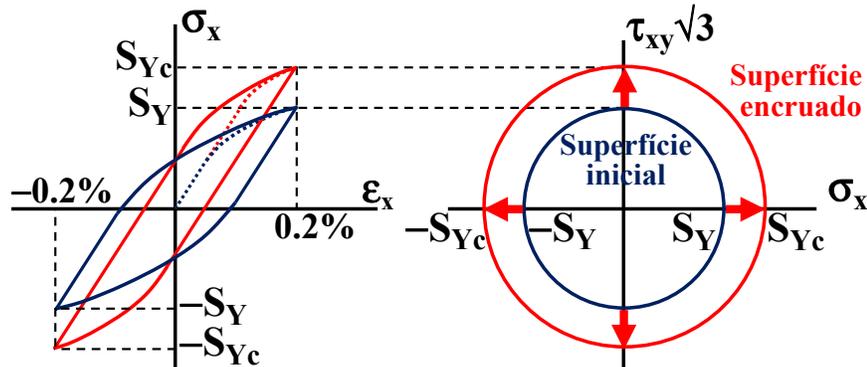


Figura 2.4 Encruamento isotrópico para um material que encrua

Observa-se que o encruamento isotrópico causa incremento gradual na amplitude de sua tensão até sua estabilização, enquanto o amolecimento isotrópico causa sua diminuição. Esta transição gradual da superfície de escoamento, pode ser modelada por uma mudança gradual do expoente e do coeficiente monotônico de Ramberg-Osgood ( $H, h$ ) para seus valores cíclicos ( $H_c, h_c$ ). Para simplificar a equação da transição associada, recomenda-se ajustar a equação de Ramberg-Osgood para uma curva monotônica tensão-deformação com parâmetros ( $H_m, h_c$ ), utilizando-se o mesmo expoente  $h_c$  da curva cíclica e o coeficiente de encruamento monotônico equivalente  $H_m$ .

### 2.3.3. Encruamento não-proporcional

Alguns materiais submetidos aos carregamentos cíclicos multiaxial não-proporcionais (NP) podem endurecer por deformação muito mais do que o esperado a partir da curva cíclica  $\sigma_x \epsilon$  uniaxial. Este fenômeno é chamado de encruamento não-proporcional, encruamento cruzado, ou encruamento adicional, que depende da história do carregamento através do fator não proporcional  $F_{NP}$  ( $0 \leq F_{NP} \leq 1$ ), e do material através do coeficiente de encruamento  $\alpha_{NP}$  (tipicamente  $0 \leq \alpha_{NP} \leq 1$ ). O encruamento NP pode ser modelado utilizando o coeficiente de encruamento  $H_c$

e o expoente  $h_c$  da equação cíclica uniaxial de Ramberg-Osgood, assumindo-se que  $h_c$  não varia, enquanto o coeficiente de encruamento  $H_c$  é incrementado gradualmente até o coeficiente de encruamento NP:

$$H_{NP} = H_c \cdot (1 + \alpha_{NP} \cdot F_{NP}) \quad (2.35)$$

onde  $H_c$  é o coeficiente de encruamento cíclico uniaxial de Ramberg-Osgood.

Na Figura 2.5, comparam-se os laços de histerese produzidos por uma história NP tração-torção fora de fase e uma história proporcional, ambas com a mesma amplitude de deformação normal  $\Delta\varepsilon / 2 \cong 0.4\%$  [6]. Na história NP, o raio da superfície de escoamento aumenta gradualmente a partir de um valor de resistência ao escoamento entre  $S_y$  e  $S_{yc}$  devido ao encruamento isotrópico, até sua resistência ao escoamento com encruamento NP  $S_{yNP}$ .

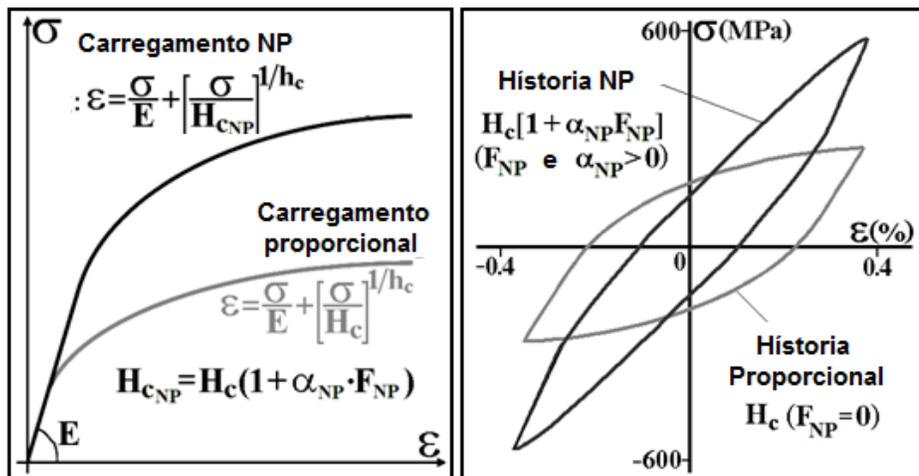


Figura 2.5 Efeito da carga cíclica NP sobre o encruamento NP, e laços de histerese proporcional e NP causado pela mesma gama  $\Delta\varepsilon$  num aço AISI 304

Quando o encruamento NP é significativo, as histórias NP podem causar vida à fadiga muito mais curtas que as produzidas por histórias proporcionais com a mesma gama de deformação  $\Delta\varepsilon$ , sempre que o encruamento NP aumenta sua correspondente gama de tensão  $\Delta\sigma$ . Portanto, cálculos baseados no controle de

deformação em histórias NP, como os encontrados em corpos de prova  $\epsilon_N$ , ou em entalhes muito afiados, deveriam levar em consideração o efeito de encruamento NP para evitar previsões não conservadoras. Entretanto, a vida à fadiga para histórias NP sobre controle de tensão (caso mais comum na prática) pode ser maior que para o carregamento proporcional com a mesma gama de tensão  $\Delta\sigma$ , já que para atingir a gama de tensão  $\Delta\sigma$  é necessário uma menor gama de deformação  $\Delta\epsilon$  devido ao encruamento NP. A vida à fadiga associada às histórias NP sobre o controle da deformação (vide Figura 2.5) podem ser ordens de grandeza menores que as associadas às histórias proporcionais, mesmo se ambas as histórias têm a mesma gama de deformação normal  $\Delta\epsilon / 2 \cong 0.4\%$ .

O coeficiente de encruamento  $\alpha_{NP}$  é um parâmetro que reflete a sensibilidade do material às histórias não-proporcionais (vide Tabela 3). Estas, à temperatura ambiente, são geralmente altas nos aços inoxidáveis ( $\alpha_{NP} \cong 1$  para o aço inox-316), menor em aços carbonos ( $\alpha_{NP} \cong 0.3$  para o aço 1045) e muito baixas nas ligas de alumínio ( $\alpha_{NP} \cong 0$  para o Al 7075).

Tabela 3. Coeficiente de Encruamento NP.

<b>Material</b>	$\alpha_{NP}$
Aço Inox-316	1.0
Aço Inox-304	0.5-1.0
Aço Inox-316 (550°C)	0.37
OFHC cobre	0.3
Aço 1045	0.3
Aço Inox-304 (650°C)	0.3
Inconel 718	0.2
Al 6061-T6	0.2
Aço 42 CrMo	0.15
Aço 1% Cr Mo-V	0.14
En15R	0.14
Al 7075	0.0
Al 1100	0.0

O encruamento não proporcional não depende só do material através de  $\alpha_{NP}$ , mas também da trajetória do carregamento, através do fator NP  $F_{NP}$ . As histórias

proporcionais não levam ao encruamento não-proporcional resultando em  $F_{NP} = 0$ . O maior efeito de encruamento NP ocorre quando  $F_{NP} = 1$ , e.g. para uma história de carregamento tração-torção  $90^\circ$  fora de fase, que gera um círculo no diagrama de tensão de Mises  $\sigma_x \times \tau_{xy} \sqrt{3}$  ou deformação  $\epsilon_x \times \gamma / \sqrt{3}$ . Na Figura 2.6 apresentam-se o fator NP para três trajetórias de deformação.

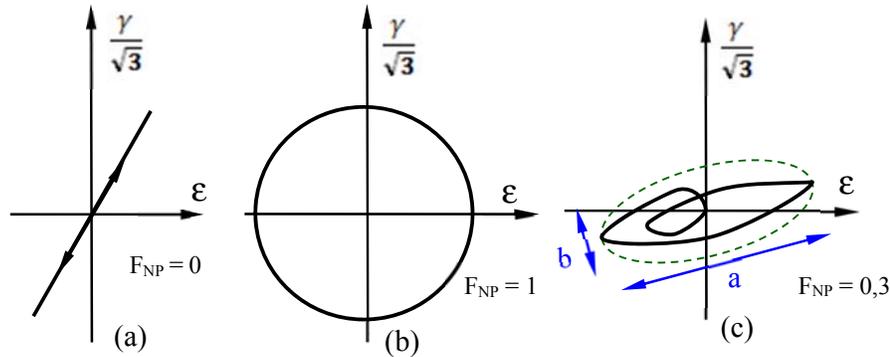


Figura 2.6 Fator não proporcional para 3 tipos de carregamentos (a) proporcional, (b)  $90^\circ$  fora de fase e (c) genérico.

Para determinar o fator não proporcional  $F_{NP}$  desenha-se uma elipse que circunscreve a trajetória inteira da história, e  $F_{NP}$  se dá em função da razão de aspecto da elipse,  $F_{NP} = b/a$ . Na Figura 2.6, a trajetória proporcional a  $90^\circ$  fora de fase, define os dois valores as extremidades  $F_{NP} = 0$  e  $F_{NP} = 1$ , respectivamente. E para a trajetória genérica, determina-se  $F_{NP} = 0,3$ .

#### 2.3.4. Fluência cíclica ou Ratcheting

*Ratcheting*, também conhecido como fluência cíclica, é a acumulação de qualquer componente de deformação plástica com o incremento do número de ciclos. Tal incremento de deformação constante em uma certa direção pode influenciar a vida à fadiga de partes mecânicas devido ao esgotamento prematuro da ductilidade do material, muito mais rápido do que a vida de iniciação à fadiga. Geralmente, a fluência cíclica está associada à tensão média da história do carregamento uniaxial ou multiaxial, já que qualquer história de carregamento desequilibrado pode provocá-la. Existem dois tipos de *ratcheting*: uniaxial e

multiaxial. O primeiro é causado por uma história uniaxial (ou proporcional) desequilibrada, e o segundo causado por uma história NP multiaxial desequilibrada, ambas sobre controle de tensão.

#### **2.3.4.1. Ratcheting uniaxial**

A fluência cíclica uniaxial é o acúmulo de deformação na direção da tensão média diferente de zero, devido a uma história uniaxial desequilibrada. Este fenômeno é resultado da diferença no comportamento não linear do material em tração e compressão (anisotropia entre tração e compressão). O comportamento de *ratcheting* uniaxial para um carregamento uniaxial cíclico desequilibrado é um laço elastoplástico que não fecha, que faz com que o material acumule deformação a cada ciclo.

Considere a história de carregamento uniaxial apresentado na Figura 2.7, com variação da tensão entre  $\sigma_{\max}$  ( $\sigma_{\max} > S_{Yc}$ ) e  $-S_{Yc}$ . Para facilitar, considera-se um material com comportamento tensão-deformação bi-linear e sem nenhuma transição de encruamento isotrópico. A deformação plástica ao longo da trajetória AB é maior que em CD, mesmo que ambas as trajetórias possuam a mesma variação de tensão. Este comportamento assimétrico (não Masing) provoca uma inclinação da trajetória da tensão AB menor que a inclinação da trajetória de compressão CD, o que resulta num incremento de deformação plástica após cada laço. Nota-se que este aumento de deformação plástica não pode ser explicado pelo amolecimento isotrópico, pois as trajetórias AB, A'B' e A''B'' são paralelas, com um comportamento isotrópico estabilizado. Da mesma forma, as trajetórias CD, C'D' e C''D'' são também paralelas, embora não sejam paralelas a AB, devido ao comportamento não-Masing.

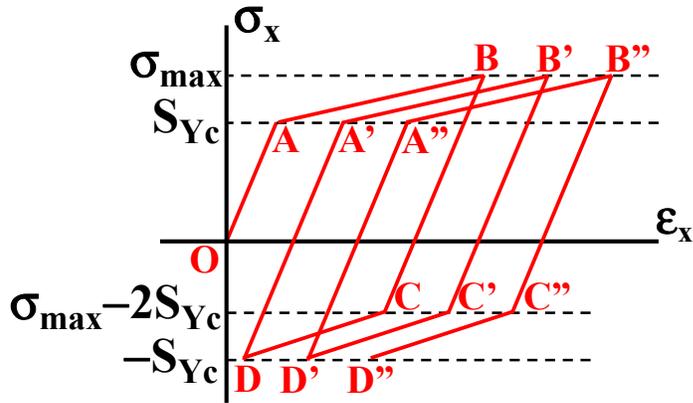


Figura 2.7 Ratcheting uniaxial para um material submetido a uma história de tensões desequilibrada entre  $\sigma_{\max} > S_{Yc}$  e  $-S_{Yc}$ .

Na Figura 2.7, a deformação de *ratcheting*  $\epsilon_{ri}$  pode ser calculada após o primeiro ciclo como  $\epsilon_{r1} = (\epsilon_B + \epsilon_D)/2$ , após o segundo ciclo como  $\epsilon_{r2} = (\epsilon_{B'} + \epsilon_{D'})/2$ , e assim por diante. A taxa de *ratcheting* por ciclo  $d\epsilon/dN$  é calculada pela diferença entre as deformações de *ratcheting* de ciclos consecutivos  $d\epsilon/dN = (\epsilon_{ri+1} - \epsilon_{ri})$ . A taxa de *ratcheting* incrementa-se com a gama de tensão e a tensão média, no entanto é muito mais sensível à tensão média. Geralmente, a taxa de *ratcheting* varia com o número de ciclos, mesmo para os carregamentos de amplitude constante. Para histórias com grandes amplitudes de tensão, a taxa  $d\epsilon/dN$  tende a aumentar a cada ciclo, até que o componente falha devido ao esgotamento da ductilidade do material (vide Figura 2.8(a)). Entretanto, para histórias com baixas amplitudes de deformações, a taxa tende a diminuir até atingir o estado estacionário com  $d\epsilon/dN = 0$  e o laço de histerese estável fechar completamente (vide Figura 2.8 (b)).

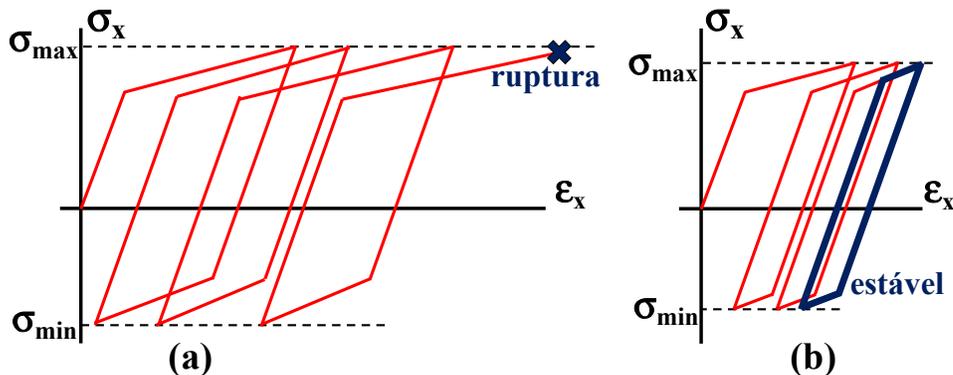


Figura 2.8 Ratcheting uniaxial para um material submetido a uma história de tensões

desequilibradas com (a) alta e (b) baixa amplitude de deformação

#### **2.3.4.2. Ratcheting multiaxial**

A fluência cíclica multiaxial é o acúmulo de deformação plástica ao longo de uma determinada direção, devido a uma história de carregamento multiaxial desequilibrada. Na Figura 2.9 apresenta-se um eixo submetido a uma história de torção cíclica elastoplástica com amplitude  $\tau_a$  combinada com uma tração axial constante  $\sigma_m$ . Inicialmente, a trajetória uniaxial  $OO'$  provoca uma deformação elástica na direção normal até atingir  $\sigma_m$ . Sempre que a trajetória  $O'A_0$  está dentro da superfície de escoamento, causa uma deformação cisalhante elástica, sem nenhuma componente axial. Após o estado de tensão atingir a superfície de escoamento no ponto  $A_0$ , a superfície de escoamento inicia seu deslocamento para o ponto  $A$ , gerando deformação plástica.

Na maioria dos materiais, tal deformação plástica ocorre ao longo da direção normal  $\bar{n}_A$  à superfície de escoamento, conhecido como condição de normalidade. Sempre que o vetor normal  $\bar{n}_A$  na Figura 2.9 (a) não for vertical, a deformação plástica ao longo da trajetória  $A_0A$  não só irá atingir um nível de deformação cisalhante elastoplástico  $\gamma_a$ , mas também provocará o incremento de deformação puramente plástica na tração (*ratcheting* incremental).

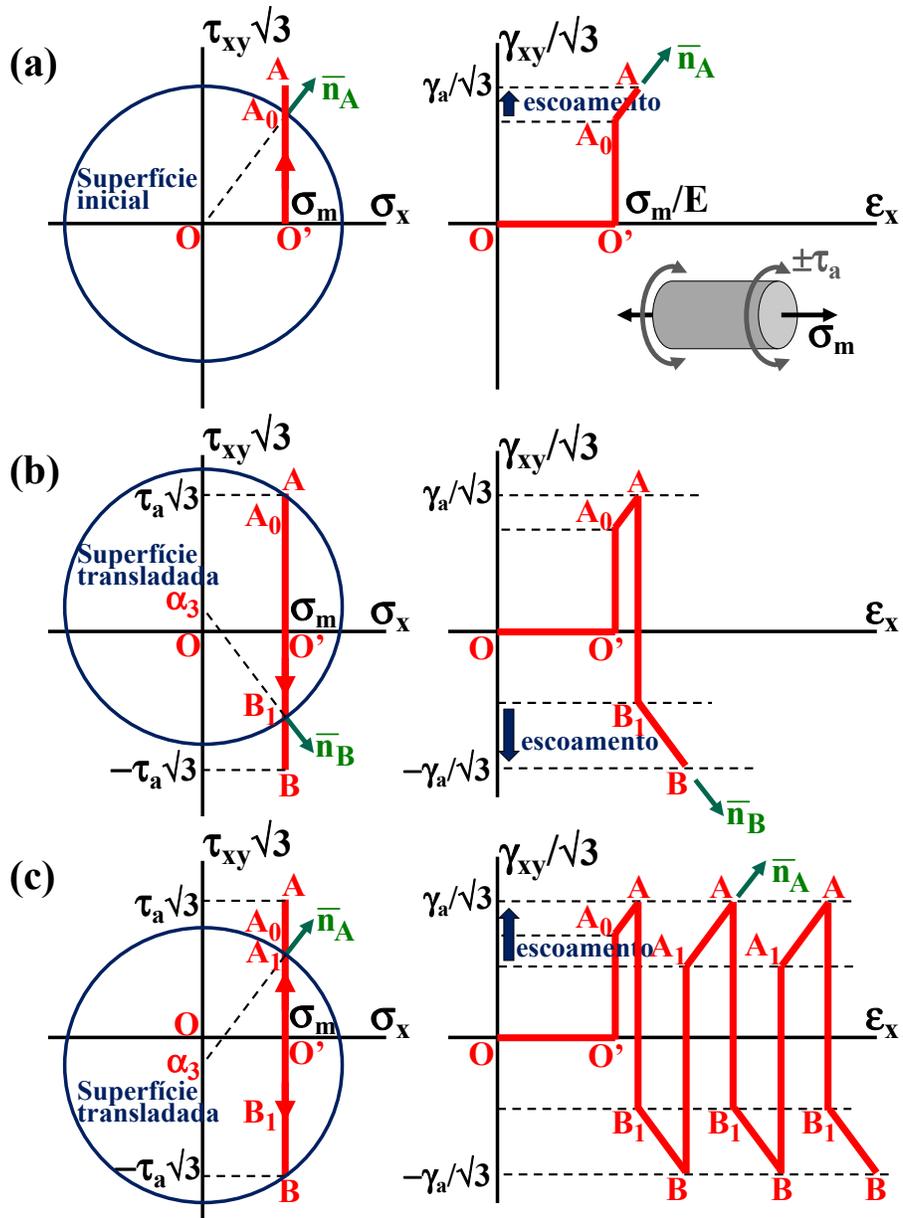


Figura 2.9 Ratcheting multiaxial na direção axial do diagrama  $\epsilon_x \times \gamma_{xy}/\sqrt{3}$  devido a uma história de torção cíclica com amplitude  $\tau_a$  e tensão axial  $\sigma_m$  constante.

A trajetória  $A_0A$  provoca a translação da superfície de escoamento até seu centro atingir a posição  $(0, \alpha_3)$ , como se mostra na Figura 2.9 (b), onde  $\alpha_3$  é a componente de translação torsional. Logo, descarrega-se elasticamente o componente de cisalhamento ao longo da trajetória  $AB_1$ , até atingir o estado de tensões da superfície deslocada em  $B_1$ , associando-o com o vetor normal  $\bar{n}_B$ . Então, a superfície de escoamento inicia sua translação para o ponto B, provocando a

deformação plástica em ambas componentes de cisalhamento e axial. Na Figura 2.12 (c) mostra-se o processo contínuo de *ratcheting* multiaxial com uma taxa de *ratcheting* constante.

Outro problema típico de *ratcheting* pode ocorrer se o eixo é submetido a uma tensão compressão cíclica, com uma componente de cisalhamento estática. Este cálculo de *ratcheting* multiaxial é muito semelhante ao do exemplo anterior, exceto no deslocamento da superfície de escoamento, que se dá na direção axial e o *ratcheting* resultante ocorre na direção cisalhante, como se apresenta na Figura 2.10.

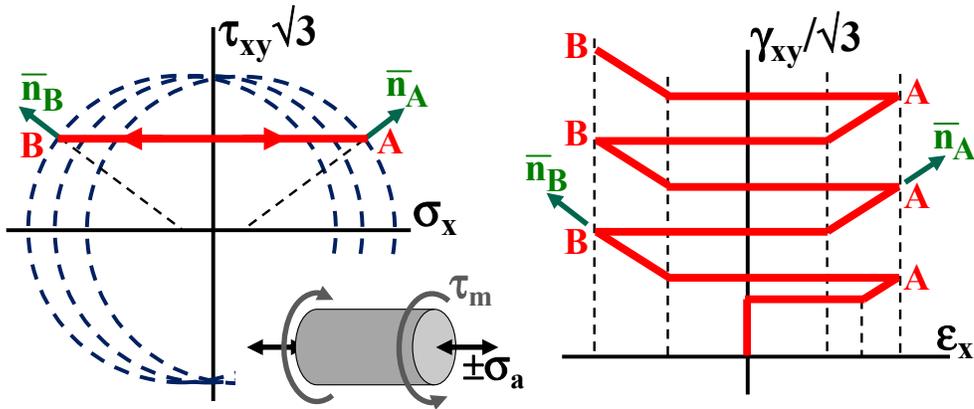


Figura 2.10 Ratcheting multiaxial no diagrama  $\epsilon_x \times \gamma_{xy}/\sqrt{3}$  devido a uma história de tração-compressão cíclica com amplitude  $\sigma_a$  e tensão cisalhante constante  $\tau_m$ .

No próximo capítulo, apresenta-se a formulação e implementação de um simulador de plasticidade incremental, que permite reproduzir o comportamento dos modelos de plasticidade incremental apresentados.

### 3 Simulador de Plasticidade Incremental

#### 3.1. Introdução

Neste capítulo apresenta-se a formulação de um simulador de modelos de plasticidade incremental, implementando-o no software Matlab. Este simulador permite reproduzir o comportamento de alguns modelos de plasticidade incremental, tais como fluência cíclica uniaxial e multiaxial, encruamento isotrópico e não proporcional. O método de integração utilizado neste trabalho para resolver as equações diferencial é o método de Euler.

#### 3.2. Encruamento isotrópico incremental

O encruamento isotrópico caracteriza-se pela expansão / contração da superfície de escoamento devido ao encruamento ou amolecimento. Este comportamento de transição pode ser modelado através da evolução do raio da superfície de escoamento  $r_1$ , a partir da tensão de escoamento monotônico  $S_Y$  (medido no ensaio de tração) até seu valor cíclico  $S_{YC}$ . A maioria dos modelos de encruamento isotrópico assume que esta transição evolui como uma função dos incrementos de deformação plástica equivalente  $d\mathcal{P}$ .

##### 3.2.1. Encruamento isotrópico baseado em deformação plana

A equação de evolução do raio da superfície de escoamento  $r_1$  é descrito por

$$dr_1 = (S_{YC} - r_1) \cdot b_c \cdot d\mathcal{P} \quad (3.1)$$

onde  $d\mathcal{P} = |\bar{d}\epsilon_p| \cdot \sqrt{2/3} = |\bar{d}\epsilon_p| \cdot \sqrt{2/3}$  é o incremento de deformação plástica equivalente e  $b_c$  a taxa de encruamento isotrópico. Após sua integração e para a condição inicial  $r_1 = S_Y$ , esta equação resulta em:

$$r_1 = S_{Yc} + (S_Y - S_{Yc}) \cdot e^{-b_c \cdot \mathcal{P}} \quad (3.2)$$

onde  $\mathcal{P}$  é a deformação plástica acumulada, e calculada em sua formulação contínua ou discreta como

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \int d\mathcal{P} \equiv \sum \Delta\mathcal{P} = \frac{2}{3} \cdot \sum |\Delta\bar{\epsilon}_p| \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sum |\Delta\bar{\epsilon}_p| = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sum |\Delta\bar{\epsilon}_p| \end{aligned} \quad (3.3)$$

O encruamento isotrópico afeta não só a resistência do escoamento, mas também a forma inteira da curva tensão-deformação. Assume-se que as curvas tensão-deformação cíclica e monotônica podem ser modeladas pela equação de Ramberg-Osgood utilizando-se os coeficientes de encruamento  $H_m$  e  $H_c$ , respectivamente, mas com o mesmo expoente  $h_c$ . Portanto, para calcular o efeito do encruamento isotrópico sobre a curva tensão-deformação, basta calcular a evolução do coeficiente encruamento atual de Ramberg-Osgood  $H(\mathcal{P})$ , a partir do monotônico  $H(\mathcal{P} = 0) = H_m$ , até o estabilizado ciclicamente  $H(\mathcal{P} \rightarrow \infty) = H_c$ , mantendo-se  $h_c$  constante. Geralmente o número de ciclos envolvidos na transição do encruamento isotrópico é pequeno comparado com a típica vida à fadiga. O uso de  $h_c$  (ao vez de  $h$ ) na descrição da curva monotônica não compromete a precisão das previsões da vida.

Geralmente, a resistência ao escoamento é definida para uma deformação plástica de **0.2%**. Portanto,  $S_Y = H_m \cdot 0,002^{h_c}$ ,  $S_{Yc} = H_c \cdot 0,002^{h_c}$  e  $r_1 = H(\mathcal{P}) \cdot 0,002^{h_c}$ , obtém-se  $dH(\mathcal{P}) \cdot 0,002^{h_c} = [H_c - H(\mathcal{P})] \cdot 0,002^{h_c} \cdot b_c \cdot d\mathcal{P}$  e  $H(\mathcal{P}) \cdot 0,002^{h_c} = H_m \cdot 0,002^{h_c} + (H_c - H_m) \cdot 0,002^{h_c} \cdot (1 - e^{-b_c \cdot \mathcal{P}})$ . Cancelando o termo  $0,002^{h_c}$  obtém-se equação da evolução para  $H(\mathcal{P})$  baseado na lei de *Voce*.

$$dH(\mathcal{P}) = [H_c - H(\mathcal{P})] \cdot b_c \cdot d\mathcal{P} \quad (3.4)$$

$$H(\mathcal{P}) = H_m + (H_c - H_m) \cdot (1 - e^{-b_c \cdot \mathcal{P}}) \quad (3.5)$$

### 3.3. Encruamento Não Proporcional Incremental

#### 3.3.1. Modelo Generalizado de Tanaka

O modelo de encruamento NP de Tanaka [49] faz uso do tensor de polarização  $C_T$  que armazena o valor absoluto da deformação plástica acumulada e sua direção para uma história de carregamentos, através dos valores e dos vetores próprios de  $C_T$ , respectivamente. Estes vetores e valores próprios influenciam o valor do parâmetro não proporcional  $A_T$  ( $0 \leq A_T \leq 1$ ), que é definido como

$$A_T = \sqrt{1 - \frac{|C_T \cdot \bar{n}'|^2}{\text{tr}(C_T^T \cdot C_T)}}}, \text{ onde } dC_T = (\bar{n}' \cdot \bar{n}'^T - C_T) \cdot b_T \cdot d\boldsymbol{p}.$$

A evolução não proporcional do raio da superfície de escoamento  $r_1$  a partir da resistência ao escoamento ciclicamente estabilizado  $S_{Yc}$  até ao valor desejado pode ser descrita por uma equação muito semelhante à adotada pela evolução isotrópica,

$$S_{yt} = S_{Yc} \cdot [1 + \alpha_{NP} \cdot (F_{NPt} + F_{NPm})] \quad (3.6)$$

$$dr_1 = (S_{Yt} - \eta) \cdot b_{NP} \cdot d\boldsymbol{p} \quad (3.7)$$

onde  $b_{NP}$  é a taxa de encruamento NP,  $F_{NPt}$  é o valor final do fator de NP (que pode variar a cada ciclo, em especial para as histórias não-periódicas), e  $F_{NPm}$  é um fator de memória que armazena o encruamento permanente causado pela história plástica anterior.

Assumindo que a solução da equação de evolução descreve-se por

$$r_1 = S_{Yc} \cdot [1 + \alpha_{NP} \cdot F_{NP}(\boldsymbol{p})] \quad (3.8)$$

ao substituir-se a equação (3.6) e (3.7) na (3.8) tem-se que

$$dr_1 = [S_{Yc} \cdot \alpha_{NP} \cdot (F_{NPt} + F_{NPm}) - S_{Yc} \cdot \alpha_{NP} \cdot F_{NP}(\boldsymbol{p})] \cdot b_{NP} \cdot d\boldsymbol{p} \quad (3.9)$$

Cancelando-se o produto  $S_{Yc} \cdot \alpha_{NP}$ , obtém-se que a equação da evolução do fator NP transiente  $F_{NP}(\boldsymbol{p})$  é

$$dF_{NP}(\boldsymbol{p}) = [F_{NPt} + F_{NPm} - F_{NP}(\boldsymbol{p})] \cdot b_{NP} \cdot d\boldsymbol{p} \quad (3.10)$$

onde  $F_{NPt}$  é o fator NP final e  $F_{NPm}$  é o fator NP de memória.

A generalização do modelo de Tanaka assume que o valor final do fator transiente NP  $F_{NP}(\mathcal{P})$  é igual a  $F_{NPt} = (A_T \sqrt{2})^{\beta_T}$ , já que o parâmetro não proporcional  $A_T$  é igual à zero em histórias proporcionais e tende a  $1/\sqrt{2}$  para as trajetórias circulares para deformação plástica. Portanto, o fator de NP desejado tende corretamente para os casos limites  $F_{NPt} = 0$  e  $F_{NPt} = 1$ , independente do valor ajustado para o expoente  $\beta_T$ , tornando o fator NP  $F_{NP}(\mathcal{P})$  correto para os valores desejados 0 e 1, respectivamente. Na presente tese, trabalha-se com histórias reais  $90^\circ$  fora de fase, que resultam em  $F_{NPt} = 1$ . Além disso, neste trabalho não são levados em consideração os efeitos da história prévia sobre o encruamento cíclico, portanto se considera o fator NP de memória  $F_{NPm} = 0$ .

O encruamento isotrópico e NP podem ser expressos num único modelo combinando as Equações 3.6 e 3.8. Seus efeitos serão considerados independentes entre si, dado que o raio da superfície de escoamento evolui segundo.

$$r_I = \underbrace{S_{Yc} \cdot [1 + \alpha_{NP} \cdot F_{NP}(\mathcal{P})]}_{\text{Evolução NP}} + \underbrace{(S_Y - S_{Yc}) \cdot e^{-b_c \cdot \mathcal{P}}}_{\text{Evolução isotrópica}} \quad (3.11)$$

Considerando-se  $S_Y = H_m \cdot 0,002^{h_c}$ ,  $S_{Yc} = H_c \cdot 0,002^{h_c}$  e cancelando o termo  $0,002^{h_c}$ , resulta-se na equação que descreve a evolução do coeficiente de Ramberg-Osgood transiente:

$$H(\mathcal{P}) = \underbrace{H_c \cdot [1 + \alpha_{NP} \cdot F_{NP}(\mathcal{P})]}_{\text{Evolução NP}} + \underbrace{(H_m - H_c) \cdot e^{-b_c \cdot \mathcal{P}}}_{\text{evolução isotrópica}} \quad (3.12)$$

### 3.4. Modelo de encruamento cinemático múltiplas-superfícies

O modelo de encruamento cinemático baseado no efeito de *Bauschinger* pode ser modelado no espaço de tensões permitindo o deslocamento da superfície de escoamento sem a mudança em seu tamanho e forma. Assim, no espaço de tensões desviatórias, o encruamento cinemático mantém o raio  $r_I$  da superfície de escoamento constante, enquanto o centro é transladado, mudando-se o módulo

plástico generalizado  $C$ . Vários modelos têm sido propostos para se calcular o valor atual de  $C$ , como a superfície de escoamento transladada, assim como direção de translação para obter o incremento de deformação plástica associada. A maioria dos modelos de encruamento podem ser divididos em duas classes: modelo de múltiplas-superfícies e encruamento não-linear. Nesta seção centra-se no estudo do modelo de múltiplas-superfícies, as quais assumem que  $C$  é constante em cada superfície. Isso resulta na descrição multi-linear da curva tensão deformação. Ou seja, é constituída por vários segmentos lineares que tratam de aproximar sua forma não-linear.

### **3.4.1. Representação de múltiplas-superfícies**

O primeiro modelo de múltiplas-superfícies foi introduzido por Mróz em 1967, que definiu uma família de superfícies, aninhadas no espaço de tensão, uma no interior da outra (vide Figura 3.3). As superfícies são definidas no espaço de tensões desviatórias  $E_{SS}$  de ordem reduzida 5D adotadas, utilizando-se a função de escoamento de Mises para descrever cada superfície. O espaço 5D tem duas vantagens sobre a formulação 6D: evitar a redundância na representação das tensões desviatórias, o que permite diminuir o custo computacional nos cálculos das tensões e deformações, e o fato de que  $r_1$  na superfície de escoamento seja igual à tensão de escoamento, sem a necessidade de incluir o fator de escala  $\sqrt{2/3}$ , como se apresentará na Figura 3.1. Embora todas as equações do encruamento cinemático sejam representadas no espaço 5D, sua conversão para 6D é trivial, como se apresentou nas Tabelas 1 e 2. A localização do centro da superfície de escoamento é definida como o ponto  $\bar{S}_{c1}$ , que é igual ao vetor *backstress*  $\bar{\alpha}$ . Além da superfície de escoamento com raio  $r_1$ , as  $M-1$  superfícies de encruamento com raios  $r_2, r_3, \dots, r_M$  são definidas dentro da superfície de ruptura com raio  $r_{M+1}$ , igual à tensão real de ruptura  $\sigma_U$  do material.

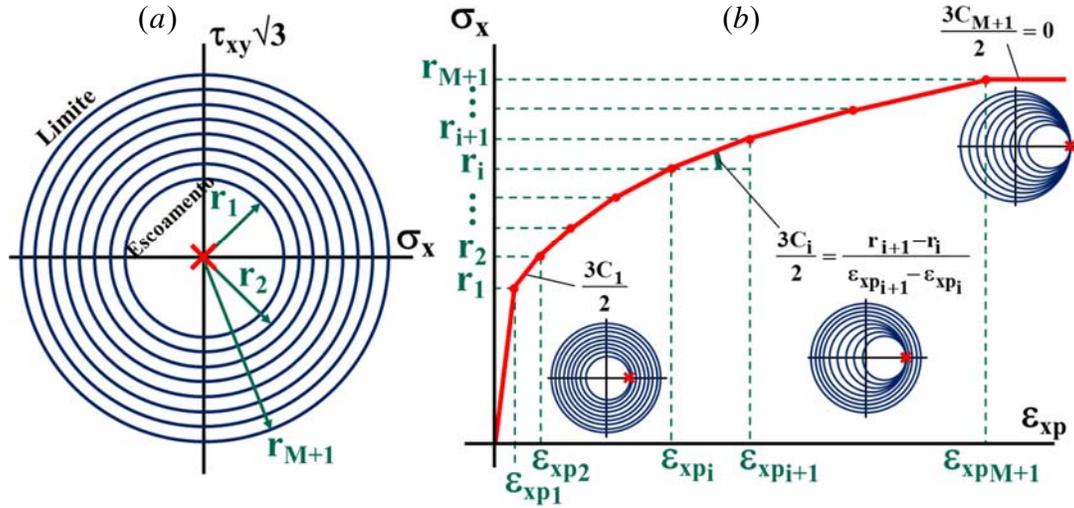


Figura 3.1. (a) Superfície de escoamento, encruamento e falha no sub espaço  $\sigma_x \times \tau_{xy}/\sqrt{3}$  de  $E_{55}$  e (b) raios correspondentes  $r_i$  e o módulo de plasticidade generalizado  $C_i$

Estas  $M+1$  superfícies aninhadas devem ter raios crescentes  $r_1 < r_2 < \dots < r_{M+1}$  e devem ser inicializadas de forma concêntrica na origem do espaço  $E_{55}$ , e.g. inicialmente  $\bar{S}'_{ci} = 0$ . O raio  $r_i$  da superfície de encruamento é igual ao nível de tensão definido pelo usuário associado à deformação plástica que delinea a representação multilinear da curva tensão-deformação (vide Figura 3.1).

A diferença entre os raios de superfícies consecutivas é definida como  $\Delta r_i \equiv r_{i+1} - r_i$ . A princípio, o raio  $r_i$  pode mudar durante a deformação plástica como resultado dos efeitos do encruamento isotrópico e NP. A superfície de falha nunca é transladada, porque qualquer tensão que atinja seu limite causa fratura no material devido ao critério  $|\bar{S}'| = r_{M+1} = \sigma_U$ , portanto seu centro está sempre na origem do espaço  $E_{55}$ , i.e.  $\bar{S}'_{c_{M+1}} \equiv 0$ .

O vetor *backstress* pode ser decomposto na soma de  $M$  componentes  $\bar{\alpha}'_1, \bar{\alpha}'_2, \dots, \bar{\alpha}'_M$  que descrevem a posição relativa  $\bar{\alpha}'_i \equiv \bar{S}'_{ci} - \bar{S}'_{c_{i+1}}$  entre os centros de superfícies consecutivas (vide Figura 3.2). Note-se que o comprimento (norma)  $|\bar{\alpha}'_i|$  de cada componente de translação da superfície de escoamento está sempre entre 0, se  $\bar{S}'_{ci}$  e  $\bar{S}'_{c_{i+1}}$  coincidem (condição sem encruamento) e  $\Delta r_i$  se as

superfícies são mutuamente tangentes (condição de saturação ou máximo encruamento).

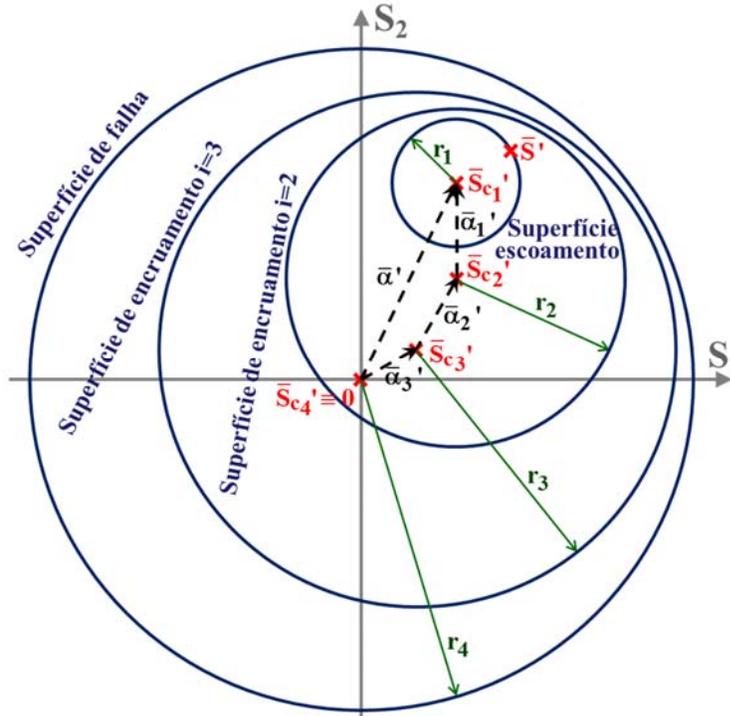


Figura 3.2 Superfície de escoamento, encruamento e falha no sub espaço desviatório  $S_1 \times S_2$  para  $M = 3$ , apresentando o vetor de translação da superfície de escoamento  $\bar{\alpha}'$

Como mostra a Figura 3.3, a condição saturada do componente de translação da superfície de escoamento  $\bar{\alpha}_i'$  alinhado ao vetor  $\bar{n}'$  que é perpendicular a estas superfícies na tensão atual  $\bar{S}'$ , resulta em  $\bar{\alpha}_i' = \bar{n}' \cdot (r_{i+1} - r_i) = \bar{n}' \cdot \Delta r_i$ .

A partir de  $\bar{S}_{c_{M+1}}' \equiv 0$  e da definição de componentes *backstress*, obtém-se que o centro  $\bar{S}_{c_i}'$  da superfície de escoamento ou qualquer encruamento  $i$  é a soma de todas as componentes de translação da superfície de escoamento a partir de  $\bar{\alpha}_i'$  para  $\bar{\alpha}_M'$ :

$$\bar{S}_{c_i}' = \bar{\alpha}_i' + \bar{\alpha}_{i+1}' + \bar{\alpha}_{i+2}' + \dots + \bar{\alpha}_{M-2}' + \bar{\alpha}_{M-1}' + \bar{\alpha}_M' \quad (3.13)$$

A regra principal da evolução destas superfícies é: **(i)** eles devem transladar-

se como um corpo rígido, quando o ponto  $\bar{S}'$  que define o estado de tensões desviatórias atuais no espaço  $E_{SS}$  alcança seu limite. **(ii)** as superfícies não podem passar uma através da outra, portanto elas gradualmente tornam-se mutuamente tangentes no ponto da tensão atual.

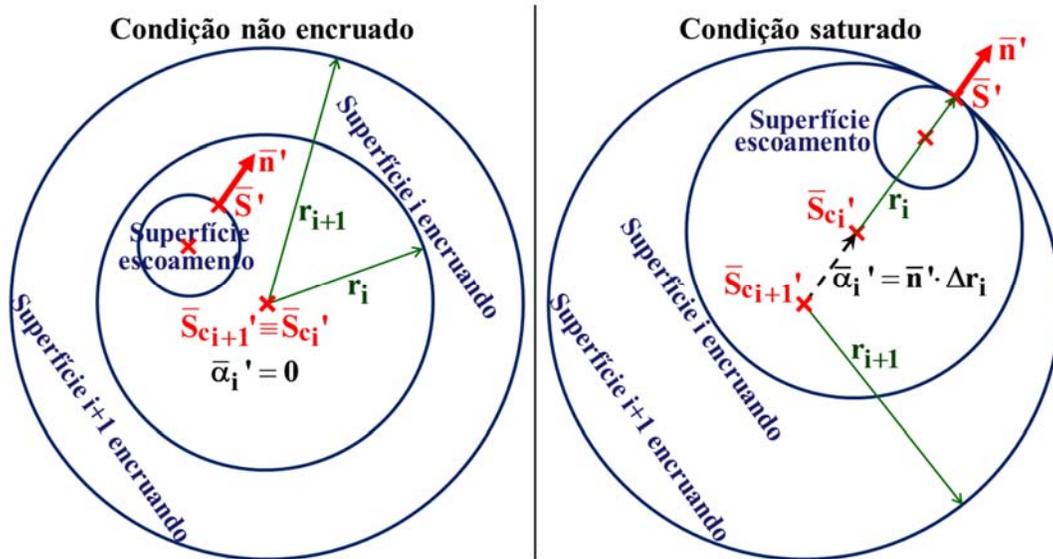


Figura 3.3 Configurações (a) sem encruamento e (b) saturado das superfícies consecutivas  $i$  e  $i+1$

A superfície externa que está se movendo é chamado de superfície ativa, com índice  $i_A$ . Qualquer mudança no estado das tensões no interior da superfície de escoamento assume-se elástico, sem translação de nenhuma superfície, desde que  $|\bar{S}' - \bar{S}_{ci}'| < r_i$ . Portanto nenhuma superfície é ativada e  $i_A = 0$ . À medida que a tensão se incrementa até um estado plástico, a tensão no ponto  $\bar{S}'$  primeiro encontrará a superfície de escoamento, tornando ativa essa superfície ( $i_A = 1$ ), e seguirá em frente até atingir a primeira superfície de encruamento. A superfície se tornará ativa  $i_A = 2$ , quando as duas superfícies se movimentarão juntas na tangente  $\bar{S}'$  até encontrar a próxima superfície de encruamento, e assim por diante.

### 3.4.2. Regras da translação das superfícies

A regra adotada para a translação destas superfícies foi a proposta por Jiang e

Sehitoglu [50, 51]. O modelo de plasticidade de Jian assume que a direção da translação total da superfície de escoamento é a soma da direção em que cada superfície  $i$  é transladada, permitindo a modelagem do comportamento transitório de amolecimento e encruamento. Os componentes da direção de translação efetiva são obtidos pela seguinte expressão,

$$\bar{v}_i' = \bar{n}' \cdot \Delta r_i - (|\bar{\alpha}_i'| / \Delta r_i)^{\chi_i} \cdot \bar{\alpha}_i' \quad (3.14)$$

onde  $\chi_i$  é o expoente de ratcheting, com  $0 \leq \chi_i < \infty$ . O módulo plástico generalizado  $C$  é calculado a partir de:

$$C = \frac{2}{3} \cdot (c_1 \cdot \bar{v}_1'^T + c_2 \cdot \bar{v}_2'^T + \dots + c_M \cdot \bar{v}_M'^T) \cdot \bar{n}' \equiv \frac{2}{3} \cdot (c \cdot \bar{v}'^T) \cdot \bar{n}' \quad (3.15)$$

onde  $c$  é o coeficiente de módulo plástico generalizado efetivo e  $\bar{v}'$  é a direção de translação efetiva, enquanto  $c_i$  é o coeficiente calibrado para cada superfície.

### 3.4.3. Descrição do algoritmo

Todas as superfícies de escoamento e encruamento são inicialmente centrados na origem, na configuração sem encruamento com as componentes de translação das superfícies de escoamento (*backstress*)  $\bar{\alpha}_1' = \bar{\alpha}_2' = \dots = \bar{\alpha}_M' = 0$ .

Para uma dada história de tensão, cada incremento de tensão 6D  $\Delta \bar{\sigma}$  deve primeiro ser projetada sobre o sub espaço  $E_{ss}$  5D para se obter o incremento da tensão desviatória  $\Delta \bar{S}' = A \cdot \Delta \bar{\sigma}$ , onde  $A$  é a matriz de projeção. O incremento de tensão hidrostática 6D  $\Delta \bar{\sigma}_h = \Delta \sigma_h \cdot [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  é, então, associado e calculado utilizando-se  $\Delta \sigma_h = (\Delta \sigma_x + \Delta \sigma_y + \Delta \sigma_z) / 3$ , do qual se obtém o incremento de deformação hidrostática, a partir de  $\Delta \bar{\epsilon}_h = 3\mathcal{K} / \Delta \bar{\sigma}_h$ , onde  $\mathcal{K}$  é módulo de compressão do material, dado por  $\mathcal{K} = E / [3 \cdot (1 - 2\nu)]$ .

O centro da superfície de escoamento  $\bar{S}_{c1}' \equiv \bar{\alpha}'$  é obtido a partir das componentes de translação das superfícies de escoamento 5D atual, através de

$\bar{\alpha}' = \bar{\alpha}'_1 + \bar{\alpha}'_2 + \dots + \bar{\alpha}'_M$ . O comprimento  $|\bar{S}' - \bar{\alpha}'|$  é calculado entre o centro do estado de tensões atuais e a superfície de escoamento. Se  $|\bar{S}' - \bar{\alpha}'| = \eta_1$ , então o estado de tensão atual  $\bar{S}'$  está sobre a borda da superfície. Portanto, o vetor normal 5D  $\bar{n}'$  à superfície de escoamento em  $\bar{S}'$  é calculado como  $\bar{n}' = (\bar{S}' - \bar{\alpha}') / |\bar{S}' - \bar{\alpha}'| = (\bar{S}' - \bar{\alpha}') / \eta_1$ .

Se  $|\bar{S}' - \bar{\alpha}'| = \eta_1$  e  $\Delta\bar{S}'^T \cdot \bar{n}' < 0$ , então  $\Delta\bar{S}'$  provoca uma condição de descarregamento elástico, a partir da borda da superfície de escoamento. Por outro lado, se  $|\bar{S}' - \bar{\alpha}'| < \eta_1$ , então o estado de tensão atual  $\bar{S}'$  é elástico, uma vez que está dentro da superfície de escoamento. Em ambos casos, o incremento da tensão  $\Delta\bar{S}'$  assume-se puramente elástico. Para uma dada história de deformações, estima-se  $\Delta\bar{S}'$  pela lei de Hooke  $\Delta\bar{S}' = 2G \cdot \Delta\bar{e}'$ .

Para saber se todo o incremento  $\Delta\bar{S}'$  é de fato puramente elástico, a equação  $|\bar{S}' + b^* \cdot \Delta\bar{S}' - \bar{\alpha}'| = \eta_1$  é resolvida para a raiz positiva de  $b^*$  para encontrar o incremento de tensão  $b^* \cdot \Delta\bar{S}'$  que iria atingir a superfície de escoamento. Se  $b^* \geq 1$ , então  $\Delta\bar{S}'$  é um incremento inteiramente elástico, e os componentes elásticos e plásticos dos incrementos de deformação são calculados pela lei de Hooke  $\Delta\bar{e}'_e = \Delta\bar{e}' = \Delta\bar{S}' / 2G$  e  $\Delta\bar{e}'_p = 0$ . Caso contrário, se  $0 < b^* < 1$ , então somente a fração  $b^* \cdot \Delta\bar{S}'$  do incremento de tensão é elástica; esta etapa de cálculo é repetida localmente servindo-se de um degrau de entrada refinada  $b^* \cdot \Delta\bar{\sigma}$  ou  $b^* \cdot \Delta\bar{\epsilon}$  que induz incremento desviatório elástico  $b^* \cdot \Delta\bar{S}'$ , atingindo exatamente a superfície de escoamento. Neste caso, a fração restante  $(1 - b^*) \cdot \Delta\bar{\sigma}$ , ou  $(1 - b^*) \cdot \Delta\bar{\epsilon}$ , será utilizada no cálculo da próxima etapa sobre condições elastoplásticas.

O incremento puramente elastoplástico ocorre se  $|\bar{S}' - \bar{\alpha}'| = \eta_1$  e  $\Delta\bar{S}'^T \cdot \bar{n}' > 0$ . As direções de translação  $\bar{v}'_i$  em 5D são calculadas para superfície a partir do

modelo de translação escolhido como uma função de  $\bar{n}'$  e  $\bar{\alpha}_i'$ , usada para calcular o módulo de plasticidade atual  $C$  a partir da equação ((3.14)). Note-se que, para a formulação das múltiplas –superfícies,  $C$  obtém-se apenas a partir do valor  $C_i$  da superfície ativa. Para a história de deformações, o incremento elastoplástico  $\Delta\bar{S}'$  (que originalmente foi assumido como elástico) é calculado a partir de  $C$ , utilizando a solução do problema inverso  $\Delta\bar{S}' = 2G \cdot [\Delta\bar{e}' - (\Delta\bar{e}'^T \cdot \bar{n}') \cdot \bar{n}' \cdot 2G / (2G + C)]$  em 5D. A componente plástica do incremento de deformação em 5D é, então, obtida a partir do incremento elastoplástico  $\Delta\bar{S}'$  utilizando a regra da normalidade  $\Delta\bar{e}_p' = (\Delta\bar{S}'^T \cdot \bar{n}') \cdot \bar{n}' / C$ , enquanto a componente elástica é obtida da lei de Hooke  $\Delta\bar{e}_e' = \Delta\bar{S}' / 2G$ .

A translação da superfície sempre ocorre durante a deformação plástica, para todas as superfícies de escoamento e encruamento, a partir dos incrementos  $\Delta\bar{\alpha}_i' = c_i \cdot \bar{v}_i' \cdot \Delta p$ , onde  $\Delta p = (2/3) \cdot |\Delta\bar{e}_p'|$ . Finalmente, a cada incremento são armazenadas as tensões e as deformações no sub-espço 5D e 6D. Na Tabela 4 descreve-se o algoritmo.

Tabela 4. Algoritmo de plasticidade incremental, apresentando suas semelhanças e diferenças

Algoritmo de múltiplas-superfícies	Algoritmo de cinemática não-linear
Cálculo do incremento hidrostático em 6D $\Delta\bar{\sigma}_h$ ou $\Delta\bar{\epsilon}_h$ , correlacionados por $\Delta\bar{\sigma}_h = 3\mathcal{K} \cdot \Delta\bar{\epsilon}_h$ .	
A histórias de tensões projetar no sub-espço 5D $\Delta\bar{S}' = A \cdot \Delta\bar{\sigma}$ ; a histórias de deformações projetar no sub-espço 5D $\Delta\bar{e}' = A \cdot \Delta\bar{\epsilon}$ .	
Cálculo do centro da superfície de escoamento a partir das componentes de translação da superfície de escoamento ( <i>Backstress</i> ) 5D: $\bar{\alpha}' = \bar{\alpha}_1' + \bar{\alpha}_2' + \dots + \bar{\alpha}_M'$ .	
Se $ \bar{S}' - \bar{\alpha}'  = r_1$ (o estado de tensão atual $\bar{S}'$ está sobre a superfície), então o vetor normal $\bar{n}'$ à superfície de escoamento em $\bar{S}'$ (5D) é calculado utilizando	

$\bar{n}' = (\bar{S}' - \bar{\alpha}') /  \bar{S}' - \bar{\alpha}'  = (\bar{S}' - \bar{\alpha}') / \eta_1$ .	
Se $ \bar{S}' - \bar{\alpha}'  < \eta_1$ (o $\bar{S}'$ atual está no interior da superfície de escoamento) ou $ \bar{S}' - \bar{\alpha}'  = \eta_1$ com $\Delta\bar{S}'^T \cdot \bar{n}' < 0$ (descarregamento elástico, a partir da borda da superfície de escoamento), então se assume $\Delta\bar{S}'$ e $\Delta\bar{e}'$ elásticos, correlacionados a partir da lei de Hooke por $\Delta\bar{e}' = \Delta\bar{e}_e' = \Delta\bar{S}' / 2G$ , com $\Delta\bar{e}_p' = 0$ . Deste modo, resolver $ \bar{S}' + a \cdot \Delta\bar{S}' - \bar{\alpha}'  = \eta_1$ para “a” encontrar o incremento de tensão $a \cdot \Delta\bar{S}'$ que atinja a superfície de escoamento. Assim, se $a \geq 1$ , então esta etapa de cálculo finaliza aqui, uma vez o incremento é totalmente elástico, caso contrário se $0 < a < 1$ deve se repetir a etapa de cálculo refinando a entrada localmente $a \cdot \Delta\bar{\sigma}$ ou $a \cdot \Delta\bar{\epsilon}$ .	
Caso contrário, se $ \bar{S}' - \bar{\alpha}'  < \eta_1$ com $\Delta\bar{S}'^T \cdot \bar{n}' > 0$ , testa-se $d\bar{S}'^T \cdot \bar{n}' < 0$ se é descarregamento elástico ou elastoplástico.	
É importante obter-se em 5D as direções de translação da superfície $\bar{v}_i'$ a partir do modelo escolhido como uma função de $\bar{n}'$ e $\bar{\alpha}_i'$ .	
Módulo linear tirado da superfície ativa: $C = C_i$ para $i = i_A$	Módulo não-linear: $C = \frac{2}{3} \cdot \sum_{i=1}^M c_i \cdot \bar{v}_i'^T \cdot \bar{n}'$
Para história de deformação, $\Delta\bar{S}'$ é obtido a partir de C por $\Delta\bar{S}' = 2G \cdot [\Delta\bar{e}' - (\Delta\bar{e}'^T \cdot \bar{n}') \cdot \bar{n}' \cdot 2G / (2G + C)]$ .	
Cálculo do incremento de deformação elástica em 5D: $\Delta\bar{e}_e' = \Delta\bar{S}' / 2G$ .	
Cálculo do incremento de deformação plástica em 5D, a partir da regra da normalidade: $\Delta\bar{e}_p' = \frac{1}{C} \cdot (\Delta\bar{S}'^T \cdot \bar{n}') \cdot \bar{n}'$ .	
Verificar se $\bar{S}' + \Delta\bar{S}'$ ainda estará dentro da próxima superfície de encruamento $i+1$ , caso contrário repetir a etapa de cálculo com entradas refinadas localmente $a \cdot \Delta\bar{\sigma}$ ou $a \cdot \Delta\bar{\epsilon}$ , onde $0 < a < 1$ e	$\Delta\bar{\alpha}_i' = c_i \cdot \bar{v}_i' \cdot \Delta p$ para todas as superfícies de escoamento e encruamento, onde $\Delta p = \frac{2}{3} \cdot  \Delta\bar{e}_p' $ .

$F_{i+1}(\bar{S}' + a \cdot \Delta \bar{S}') = 0.$	
$\Delta \bar{\alpha}_i' = 0$ para todo $i \neq i_A$ e $\Delta \bar{\alpha}_i' = b \cdot \bar{v}_i'$ para a superfície ativa $i = i_A$ , onde $b > 0$ e $F_i =  \bar{S}' + \Delta \bar{S}' - (\bar{S}_{c_i}' + b \cdot \bar{v}_i') ^2 - r_i^2 = 0.$	Se qualquer componente <i>backstress</i> estiver sobressaturada ( $ \bar{\alpha}_i' + \Delta \bar{\alpha}_i'  > \Delta r_i$ ), repetir esta etapa de cálculo com entradas $\Delta \bar{\sigma}$ ou $\Delta \bar{\varepsilon}$ refinadas para garantir que as superfícies se encontrarão tangencialmente ( $ \bar{\alpha}_i' + \Delta \bar{\alpha}_i'  = \Delta r_i$ )
Translação da superfície de escoamento e encruamento fazendo $\bar{\alpha}_i' := \bar{\alpha}_i' + \Delta \bar{\alpha}_i'$ , $i = 1, 2, \dots, M$	
Projeção dos incrementos para 6D: $\Delta \bar{\sigma} = \Delta \bar{\sigma}_h + \frac{2}{3} A^T \cdot \Delta \bar{S}'$ e $\Delta \bar{\varepsilon} = \Delta \bar{\varepsilon}_h + \frac{2}{3} A^T \cdot (\Delta \bar{e}_e' + \Delta \bar{e}_p').$	
As variáveis a serem armazenadas e atualização em 6D e 5D são: $\bar{\sigma} := \bar{\sigma} + \Delta \bar{\sigma}$ , $\bar{\varepsilon} := \bar{\varepsilon} + \Delta \bar{\varepsilon}$ , $\bar{S}' := \bar{S}' + \Delta \bar{S}'$ e $\bar{e}' := \bar{e}' + \Delta \bar{e}_e' + \Delta \bar{e}_p'.$	

No próximo capítulo apresenta-se o projeto da máquina tração torção, a qual foi desenvolvido para se avaliar experimentalmente os modelos de plasticidade incremental apresentados.

## **4. Projeto Estrutural e Modelagem da Máquina Tração-Torção**

### **4.1. Introdução**

No presente capítulo apresenta-se o projeto e a modelagem da Máquina Tração – Torção (MTT) desenvolvida no Laboratório de Fadiga da PUC - Rio.

### **4.2. Projeto da MTT (biaxial)**

O projeto da MTT inclui a descrição geral de toda a máquina, determinação da carga e momento máximo da MTT, e o estudo da rigidez axial e torsional da máquina.

#### **4.2.1. Descrição geral da MTT**

A MTT para ensaios de fadiga multiaxial é um arranjo de componentes individuais, conectados entre si, que provêm tração e torção sobre o corpo de prova. A estrutura básica deste sistema eletromecânico consiste de dois motoredutores (um para gerar a carga axial e outro para a torção), dois macacos mecânicos (tração - torção), a estrutura da máquina (vigas e colunas), elementos de controle (célula de carga e torque, LVDT's, controladores, etc.), e outros elementos (garras para prender os corpos de prova, dispositivos de medição, etc.).

O conceito básico de um sistema eletromecânico controlado por um módulo de controle *CompactRIO* da *National Instruments* é descrito da seguinte forma:

- A estrutura da máquina MTT é constituída principalmente de duas vigas, um resistor de torque e duas colunas, como se apresenta na Figura 4.1.
- O motor-redutor converte a potência elétrica disponível em potência mecânica para o atuador.

- Os macacos mecânicos são usados para transformar a potência mecânica do motor-reductor (rotativo) em potência mecânica usável no ponto requerido. Trabalha como um atuador linear (gera força) ou atuador rotativo (gera torque).
- A célula de carga e torque, que é um transdutor que mede a força e o torque aplicado sobre um corpo de prova.
- O LVDT é um transdutor que mede o deslocamento linear e a rotação do eixo que contém o corpo de prova.
- O controlador AX2550 é a interface de potência que controla os motores DC de acordo com um sinal de voltagem de 0 a 5 V.
- Finalmente o *compactRIO* é o controlador da máquina no qual se implementam as técnicas de controle.

Na seguinte figura apresenta-se a Máquina Tração-Torção (MTT), usada para testes de fadiga no Laboratório de Fadiga da PUC – Rio, na qual se testará diferentes modelos de previsão de comportamento mecânico multiaxial e, eventualmente, as técnicas de controle.

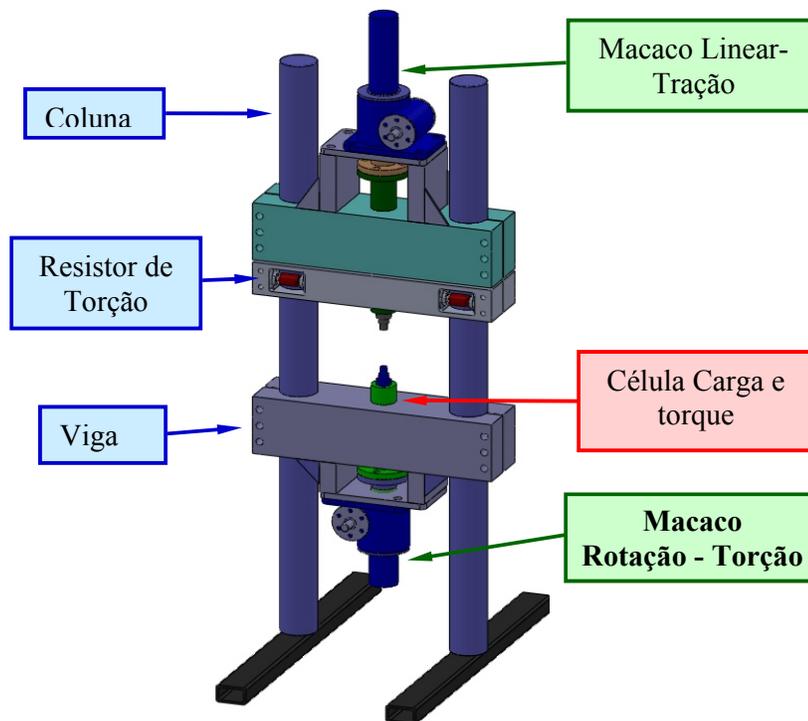


Figura 4.1 Modelo Inicial da Máquina Tração Torção

Os cálculos do projeto mecânico da estrutura da máquina são apresentados no apêndice A.

#### 4.2.2. Modelo simplificado da MTT

O projeto original da MTT, apresentado na Figura 4.1, foi modificado para um modelo simplificado, devido que a usinagem dos componentes do desenho original da MTT requeria uma oficina mecânica especializada para peças de grandes comprimentos. Além disso, as limitações nos recursos para o projeto, elevados custos de usinagem, despesas em motores e no desenvolvimento dos transdutores, motivaram a implementação de um modelo simplificado da MTT.

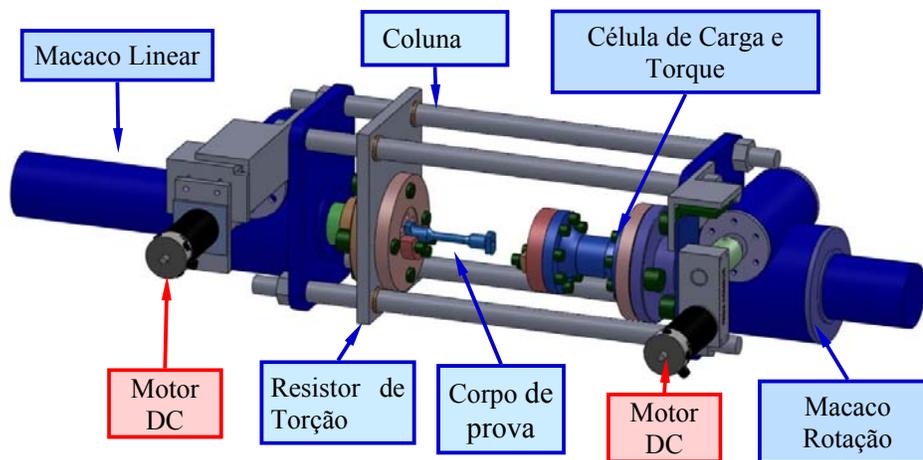


Figura 4.2 Modelo simplificado da MTT

O novo modelo consiste em unir o macaco linear ao macaco de rotação, mediante quatro colunas, como apresentado na Figura 4.2. A partir daqui, considera-se como MTT o novo modelo simplificado, onde se calcula novamente sua rigidez axial e torsional. Além disso, pelas dimensões das colunas considera-se importante determinar o carregamento máximo admissível para evitar ter o problema de flambagem nas colunas.

Portanto, o modelo original foi modificado para melhorar sua fabricabilidade e os cálculos do projeto do novo modelo de MTT são descritos no apêndice A.

No próximo capítulo se apresentará a integração dos diferentes componentes da MTT e suas conexões elétricas com sistema de controle. Além disso, apresentam-se o projeto e desenvolvimento da célula de torque e carga e, finalmente, a calibração dos diferentes transdutores.

## **5. Projeto e Integração dos Atuadores e Transdutores da MTT**

### **5.1. Introdução**

Neste capítulo, apresenta-se o desenvolvimento do sistema experimental da máquina MTT, organizado em três seções: o desenvolvimento de uma célula de carga e torque, a calibração dos transdutores e, finalmente, a integração dos componentes da MTT. O desenvolvimento da célula de carga e torque é subdividida em duas seções, a primeira focada na análise da integridade estrutural e a segunda na configuração dos extensômetros sobre a estrutura do transdutor. A calibração dos transdutores inclui o procedimento de calibração da célula de carga e torque e dos transdutores LVDT's, usados para medir o deslocamento linear e rotacional da garra. A integração da MTT inclui as conexões dos transdutores, motores e sistema de controle e a montagem dos componentes do sistema experimental desenvolvido no Laboratório de Fadiga da PUC – Rio.

### **5.2. Desenvolvimento da célula de carga e torque**

Para o desenvolvimento da MTT são necessários transdutores de força e torque. Frente a seu elevado custo e às limitações econômicas, motivou-se o desenvolvimento de uma célula de carga e torque (LTC - *Load Torque Cell*), com capacidade máxima de 200 kN e 1300 N.m. O projeto da célula de carga e torque divide-se em duas seções, a primeira está focada na análise estrutural do transdutor, em seu dimensionamento para uma vida à fadiga maior que 100 milhões de ciclos e a segunda focada na configuração dos extensômetros nas pontes de *Wheatstone* e sua localização sobre a estrutura da célula.

#### **5.2.1. Projeto estrutural da LTC**

De modo geral, a célula de carga e torque é um transdutor utilizado para se

medir a força e torque aplicados sobre o corpo de prova. Portanto, a LTC é projetada para trabalhar submetida a tração/compressão, torção ou uma combinação de ambas, como é apresentado na Figura 5.1.

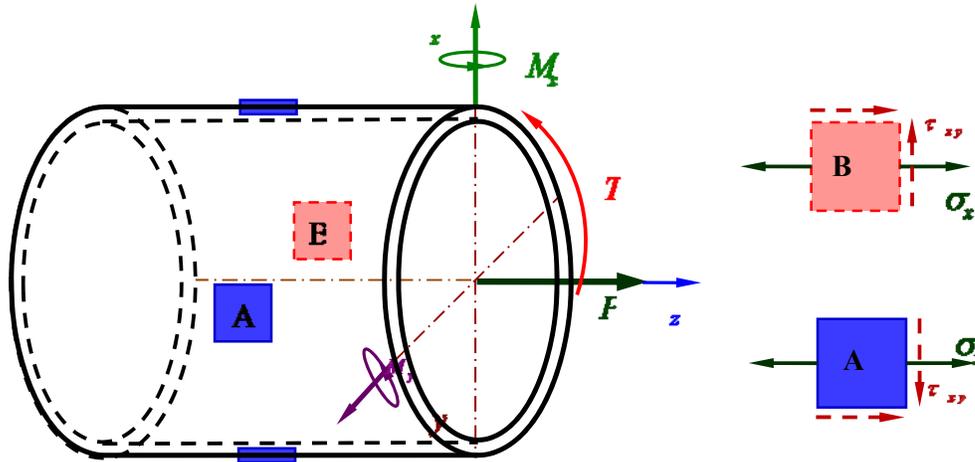


Figura 5.1 Seção circular oca da estrutura da LTC

Na Figura 5.1, apresenta-se o desenho da seção crítica da estrutura da LTC, que é a seção circular oca, localizada na parte central da estrutura do transdutor. Esta seção crítica é submetida a uma tensão normal  $\sigma_z$  e tensão cisalhante  $\tau$ , geradas pela carga  $P$  e torque  $T$ .

$$\sigma_z = \frac{P}{A} \quad (5.1)$$

$$\tau = \frac{T}{J} \quad (5.2)$$

onde  $A$  e  $J$  são a área da seção transversal e o momento polar de inércia da LTC, respectivamente. Na Figura 5.2 mostra-se o estado de tensões dos pontos A e B através do círculo de Mohr.

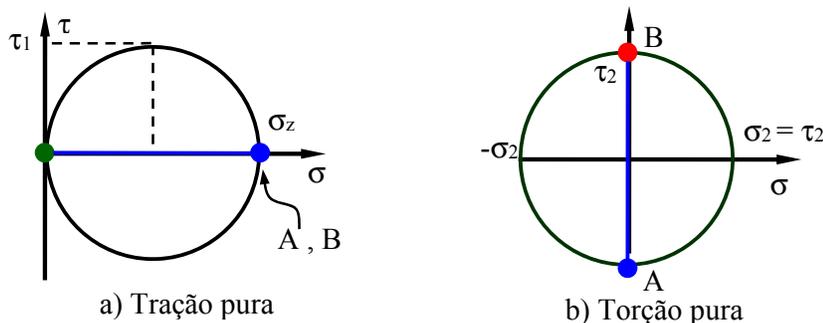


Figura 5.2 Estado de tensões típico através do Círculo de Mohr

A deformação total gerada pela combinação da carga axial  $P$  e do momento torçor  $T$  sobre a célula de torque e carga é feita utilizando-se o princípio da superposição. Na Figura 5.2, (a) os pontos A e B experimentam uma tensão axial  $\sigma_z$  devido à carga de tração  $P$  e sua representação matricial é dado por,

$$\bar{\sigma}_A^P = \bar{\sigma}_B^P = (\sigma_z \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T \quad (5.3)$$

Por outro lado, na Figura 5.2 (b) representa-se o estado de tensões cisalhante  $\tau_{zx}$ , gerado pelo momento torçor  $T$ , para os mesmos pontos A e B, e sua representação matricial é dada por

$$\bar{\sigma}_A^T = -\bar{\sigma}_B^T = (0 \ 0 \ 0 \ \tau_{zx} \ 0 \ 0)^T \quad (5.4)$$

A LTC foi projetada para se trabalhar na zona elástica, e suas deformações foram calculadas utilizando a lei de Hooke.

$$\bar{\varepsilon} = \bar{E}^{-1} \cdot \bar{\sigma} \quad (5.5)$$

onde  $\varepsilon$  é o tensor de deformação,  $\bar{E}^{-1}$  a inversa da matriz de rigidez e  $\bar{\sigma}$  o tensor de tensão, com

$$\bar{E}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade,  $\nu$  o coeficiente de Poisson e  $G = E / [2 \cdot (1 + \nu)]$  o módulo de cisalhamento.

Na Figura 5.3 mostra-se o estado de deformação, através do círculo de Mohr para os pontos A e B, gerados pela carga axial e momento torçor.

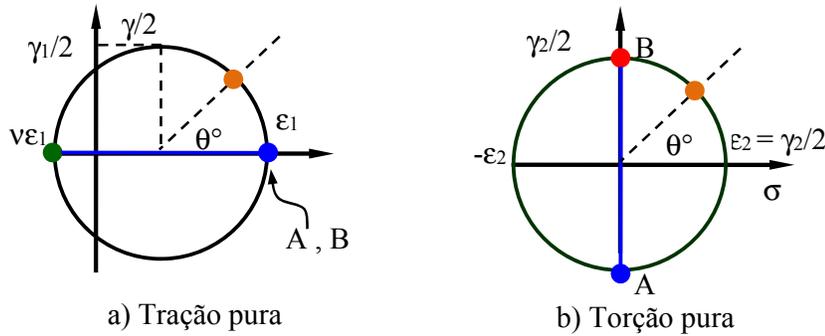


Figura 5.3 Estado de deformações típicas, através do Círculo de Mohr

As deformações  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$  na Figura 5.3 são obtidas por

$$\epsilon_1 = \frac{\sigma_z}{E} \quad (5.7)$$

$$\frac{\gamma_{zx}}{2} = \frac{\tau_{zx}}{2.G} \quad (5.8)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade e  $G = E/[2.(1+\nu)]$  o módulo de cisalhamento.

As deformações nas direções a  $0^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $90^\circ$  com relação ao eixo  $z$ , nos pontos  $A$  e  $B$  geradas pela carga axial e o momento torçor, estimam-se a partir do círculo de Mohr para deformações. Assim, para o caso de tração pura tem-se  $\epsilon_{0^\circ}^P = \epsilon_1$ ,  $\epsilon_{45^\circ}^P = \epsilon_1.(1-\nu)/2$ , e  $\epsilon_{90^\circ}^P = -\nu.\epsilon_1$ . Por outro lado, para o caso de torção pura tem-se  $\epsilon_{0^\circ}^T = \epsilon_2$ ,  $\epsilon_{45^\circ}^T = 0$ , e  $\epsilon_{90^\circ}^T = -\epsilon_2$ . Finalmente, as deformações totais são obtidas pela combinação das cargas e estimadas utilizando-se o princípio de superposição.

$$\begin{aligned} \epsilon_{0^\circ}^{total} &= \epsilon_{0^\circ}^P + \epsilon_{0^\circ}^T = \epsilon_1 + \epsilon_2 \\ \epsilon_{45^\circ}^{total} &= \epsilon_{45^\circ}^P + \epsilon_{45^\circ}^T = \frac{\epsilon_1.(1-\nu)}{2} \\ \epsilon_{90^\circ}^{total} &= \epsilon_{90^\circ}^P + \epsilon_{90^\circ}^T = -(\nu.\epsilon_1 + \epsilon_2) \end{aligned} \quad (5.9)$$

onde  $\epsilon_\theta^P$ ,  $\epsilon_\theta^T$ ,  $\epsilon_\theta^{total}$  são as deformações a  $\theta^\circ$ , com relação ao eixo  $z$ , devido à força  $P$ , ao torque  $T$  e à combinação de ambos carregamentos.

Na Tabela 5, apresenta-se as propriedades do material utilizadas no desenvolvimento da LTC.

Tabela 5. Constantes do material utilizadas para o projeto LTC

Módulo de Elasticidade, $E$	210 (GPa)
Módulo de cisalhamento, $G$	80,7 (GPa)
Constante de Poisson, $\nu$	0,3
Carga axial máxima, $P$	200 (kN)
Momento torçor máxima, $T$	1300 (N.m)

As tensões normais e cisalhantes máximas geradas pelos carregamentos, sobre a estrutura central da LTC, são  $\sigma_z = 196$  MPa e  $\tau_{zx} = 42$  MPa. Assim, para o caso da tração pura a deformação experimentada pelos extensômetros a  $0^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $90^\circ$  é obtida utilizando-se a lei de Hooke  $\epsilon_{45^\circ}^P = 326 \mu\epsilon$ ,  $\epsilon_{90^\circ}^P = -280 \mu\epsilon$ . Para o caso de torção pura tem-se  $\epsilon_{0^\circ}^T = 260 \mu\epsilon$ ,  $\epsilon_{45^\circ}^T = 0 \mu\epsilon$  e  $\epsilon_{90^\circ}^T = -260 \mu\epsilon$ .

As deformações totais experimentadas pelos extensômetros, dado a combinação das cargas de tração e torção são:  $\epsilon_{0^\circ}^{total} = 1192 \mu\epsilon$ ,  $\epsilon_{45^\circ}^{total} = 326 \mu\epsilon$ ,  $\epsilon_{90^\circ}^{total} = -540 \mu\epsilon$ .

Considerando-se a carga combinada  $\sigma = (196 \ 0 \ 0 \ 42 \ 0 \ 0)^T$  MPa, as deformações nos extensômetros são obtidas utilizando-se a lei de Hooke pelas equações (5.7) e (5.8),  $\epsilon_x = 933 \mu\epsilon$ ,  $\epsilon_y = \epsilon_z = -280 \mu\epsilon$  e  $\gamma/2 = 519 \mu\epsilon$ , e aplicando-se o critério de Von Mises, obtêm-se as deformações principais  $\epsilon_1 = 986 \mu\epsilon$ ,  $\epsilon_2 = \epsilon_3 = -333 \mu\epsilon$  e  $\gamma_{max}/2 = 670 \mu\epsilon$ . Finalmente, as deformações totais experimentada pelos extensômetros são  $\epsilon_{0^\circ}^{total} = 986 \mu\epsilon$ ,  $\epsilon_{45^\circ}^{total} = 326 \mu\epsilon$  e  $\epsilon_{90^\circ}^{total} = -333 \mu\epsilon$ .

As deformações calculadas sobre a estrutura da LTC também foram comparadas às deformações obtidas utilizando-se o software Ansys, com o propósito de validar os resultados analíticos. As simulações no Ansys foram feitas para os mesmos carregamentos ( $P = 200$  kN e  $T = 1300$  N.m).

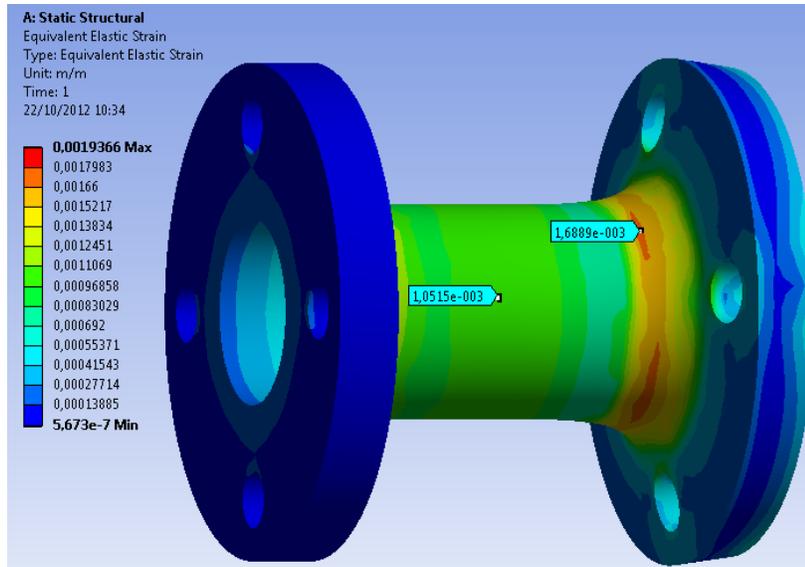


Figura 5.4 Deformações da LTC analisadas no Ansys.

A deformação total na seção central da estrutura da LTC, devido à carga de tração e torção combinadas, foi de  $\varepsilon_0^{total} = 1051 \mu\varepsilon$ . E de acordo com as especificações técnicas da *Micro-Measurement Vishay*, qualquer extensômetro com deformação total  $\varepsilon < 1500 \mu\varepsilon$  têm uma vida à fadiga de 100 milhões de ciclos [28][29]. Na Figura 5.5 apresenta-se o desenho geral da LTC projetada para carregamentos máximos especificados.

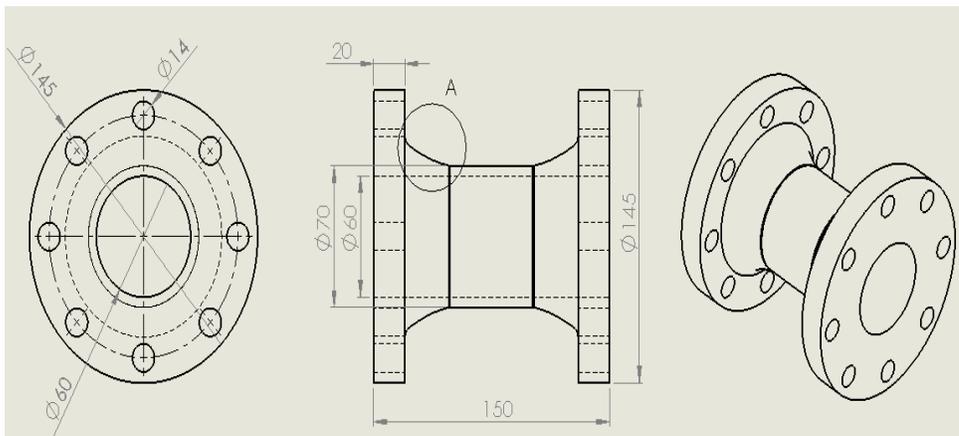


Figura 5.5 Esquema geral da LTC

Com a propósito de minimizar o fator de concentração de tensões e aumentar a vida à fadiga do transdutor, o perfil da LTC foi melhorado utilizando-se o método de "Otimização de Contorno", que consiste em adicionar ou retirar material, mudando-se o perfil da peça de acordo com o valor do fator de concentração [30].

Após a otimização do perfil, minimizou-se o fator de concentração de tensões devido a tração de um valor de  $K_{tp} = 1,65$  para outro de  $K_{tp} = 1,23$ . Na torção não se obteve muita mudança absoluta, pois se diminuiu de um valor de  $K_{tr} = 1,15$  para outro de  $K_{tr} = 1,04$ . Na Figura 5.6, apresenta-se o perfil melhorado e a comparação entre os dois perfis no entalhe.

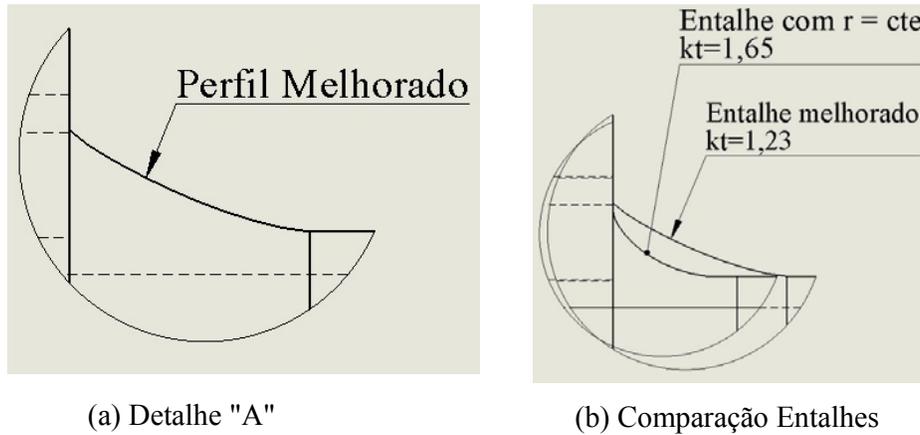


Figura 5.6 a) Perfil melhorado do entalhe b) Comparação de  $K_t$  do perfil com r constante, e melhorado

O fator de concentração de tensão no entalhe melhorado da LTC foi calculado utilizando-se a distribuição de tensão obtida no software Ansys para o carregamento combinado máximo, como se apresenta na Figura 5.7.

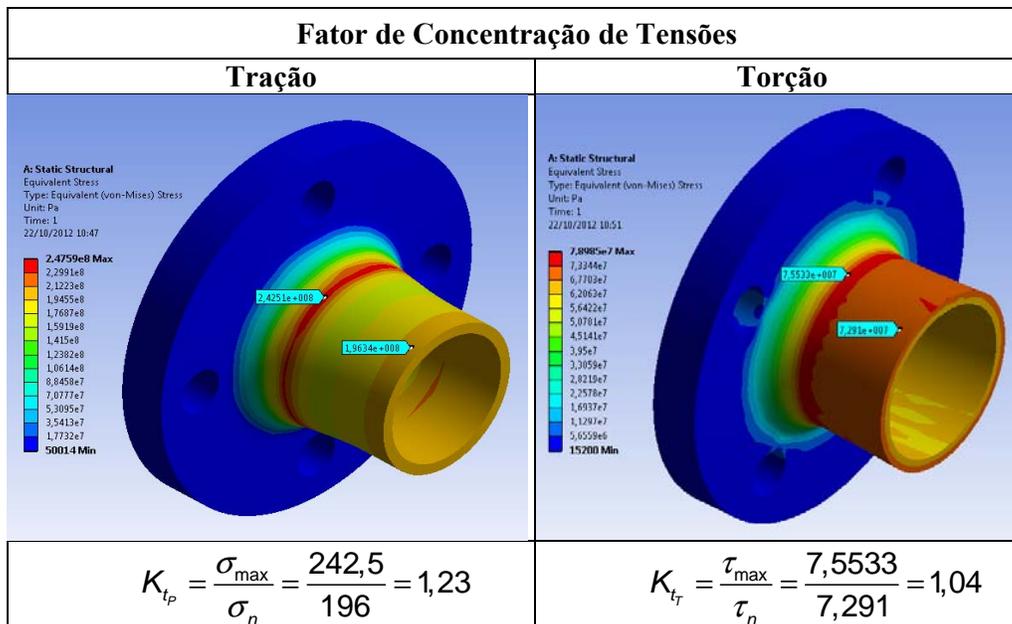


Figura 5.7 Cálculo do fator de concentração de tensão no entalhe melhorado

A otimização do fator de concentração de tensão, tanto para tração  $K_{tp}$  quanto para torção  $K_{tt}$ , é fundamental para o cálculo da vida à fadiga da LTC, projetada para uma vida à fadiga longa e teoricamente infinita. O material escolhido para a estrutura do transdutor foi uma liga de aço 4340, muito utilizada no desenvolvimento de células de carga de alta capacidade. Este material é adequado quando a estrutura do transdutor é grande, de fácil usinagem e não gera sérias distorções durante seu tratamento térmico [31]. A LTC foi usinada em um torno CNC devido à complexidade de seu perfil e, posteriormente, submetida a tratamento térmico, levando a peça a uma temperatura de 850 °C e mantendo-a durante 1 hora para se estabilizar a temperatura ao longo de sua espessura média, e logo resfriada em óleo, à temperatura ambiente. Finalmente, para aumentar sua tenacidade e ductilidade foi submetida a um processo de revenido, reduzindo-se sua dureza e resistência à ruptura a 48RHC e  $S_R = 1500$  MPa, respectivamente.

A vida à fadiga da LTC foi calculada utilizando-se o método SN, dado que a célula estará submetida a uma história de tensões elásticas. Considerando-se o caso mais crítico, este será quando a LTC é submetida a um torçor totalmente alternado  $T = \pm 1300$  N.m e uma carga axial alternada  $P = \pm 200$  kN em fase. Uma estimativa confiável do limite de fadiga  $S_L$  para as peças de aço é dada por [32].

$$S_L(10^6) = k_a \cdot k_b \cdot k_c \cdot 0,5 \cdot S_R ; \quad S_R \leq 1400 \text{ MPa} \quad (5.10)$$

O fator de acabamento é  $k_a = 0,842$ , calculado segundo Mischke [33] por  $k_a = 1,58 \cdot (S_R)^{-0,086}$ . O fator de acabamento  $k_b$ , segundo Juvinall [34] para a espessura de até 8 mm, considera  $k_b = 1$ . E o fator do tipo de carregamento para cargas axiais, segundo Juvinall, é  $k_c = 0,9$ . As estimativas da resistência à fadiga em vidas curtas para peças e estruturas de aço é dada por

$$S_F(10^3) = k_\theta \cdot k_e \cdot 0,76 \cdot S_R ; \quad S_R \leq 1400 \text{ MPa} \quad (5.11)$$

onde o fator de temperatura  $k_\theta = 1$ , devido que a LTC é projetada para trabalhar a

$\Theta_t \leq 300$  °C, e o fator de confiabilidade  $k_e = 1$  para trabalhar-se com uma confiabilidade de 50 %.

A combinação mais crítica das cargas em fase geram uma tensão normal  $\sigma_z = 196$  MPa e uma tensão cisalhante  $\tau_{zx} = 42$  N.m. A tensão equivalente para cálculo de fadiga obtém-se multiplicando o fator de concentração de tensão pela componente nominal induzida  $\sigma_z$  e  $\tau_{zx}$ , e logo combinada pelo critério de Tresca.

$$\sigma_{Tresca} = \sqrt{(K_{fP} \cdot \sigma_z)^2 + 4 \cdot (K_{fT} \cdot \tau_{zx})^2} \quad (5.12)$$

$$\sigma_{Tresca} = 256 \text{ MPa}$$

A vida em  $10^3$  e  $10^6$  ciclos para o aço 4340 dado pelas equações (5.11) e (5.10) são  $S_F(10^3) = 1140$  MPa e  $S_L(10^6) = 568$  MPa, respectivamente. A vida à fadiga é calculada utilizando-se a equação de Wöhler, dada por

$$NS_F^B = C \quad (5.13)$$

onde os coeficientes de Wöhler  $B$  e  $C$  para as condições anteriores são  $B = 9,931$  e  $C = 2,279 \cdot 10^{33}$ . Assim, a vida à fadiga para  $S = \sigma_{Tresca} = 256$  MPa substituindo na equação (5.13) é  $N = 240$  milhões, que é maior que a recomendada pela literatura (100 milhões).

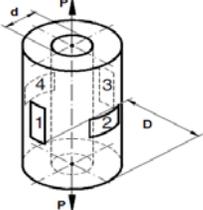
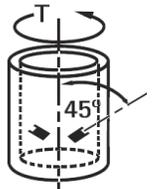
Na Tabela 6, apresenta-se a vida à fadiga da célula de carga e torque para diferentes espessuras da parede da seção tubular da estrutura da LTC.

Tabela 5. Influência da espessura na vida à fadiga da LTC

t mm	σ Nominal (MPa)		Tensões principais (MPa)			Fator de concentração		Vida à Fadiga (bilhões)		
	$\sigma_n$	$\tau_n$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\tau_{max}$	$k_{fP}$	$k_{fT}$	Usinado	Retificado	Polido
5	195,9	41,9	158	-11,2	84,6	1,23	1,07	0,01	0,2	5,72
6	165,7	36,5	173,4	-7,6	90,5	1,23	1,07	0,04	1,05	49,22
7	144,4	32,6	151,4	-7	79,2	1,23	1,07	0,1	4,2	290

A sensibilidade mecânica da célula de carga e torque depende do desenho da geometria e do carregamento aplicado, como é apresentado a continuação [35].

Tabela 6. Sensibilidade mecânica e elétrica e faixa de forças da LTC

Tipo	Representação elemento elástico	Sensibilidade		Faixa de carga
		Mecânica $\mu m / m$	Elétrica $\mathcal{E}$	
Tração pura		$\frac{4.P}{\pi.E.(D^2 - d^2)}$	2,6	$10 - 10^7$
Torção pura		$\frac{16.T.D}{\pi.E.(D^4 - d^4)}$	2,6	$10^0 - 10^3$

### 5.2.2. Configuração e conexão dos extensômetros

O circuito de conexão mais comumente utilizado em transdutores de força para medir a saída dos extensômetros é a ponte de *Wheatstone*, constituída por quatro resistências  $R_1, R_2, R_3,$  e  $R_4$  uma em cada braço da ponte, como apresentado na Figura 5.8.

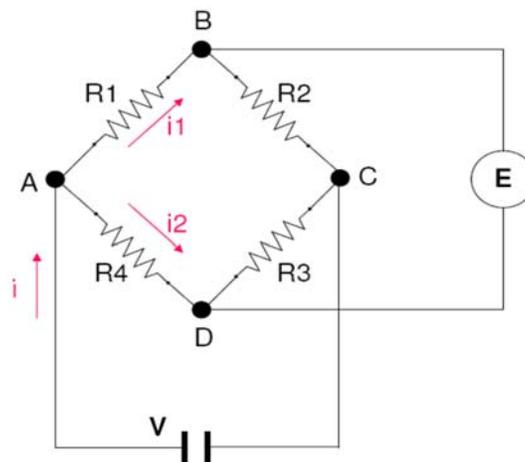


Figura 5.8 Ponte de *Wheatstone*

A equação que relaciona a tensão de saída  $E$ , a tensão de alimentação  $V$  e suas resistências é dada por

$$E = V \cdot \frac{R_1 \cdot R_3 - R_2 \cdot R_4}{(R_1 + R_2) \cdot (R_3 + R_4)} \quad (5.14)$$

A ponte é balanceada quando sua tensão de saída  $E$  é igual a zero, que ocorre quando satisfaz

$$R_1 / R_4 = R_2 / R_3 \quad (5.15)$$

A partir desta relação, pode-se dizer que um incremento nas resistências  $R_1$  ou  $R_3$  fornecerá uma saída positiva para a ponte, enquanto um incremento nas resistências  $R_2$  ou  $R_4$  diminuirá a saída da ponte.

A variação da tensão de saída é proporcional à variação da resistência dos extensômetros, pois

$$\Delta E = \frac{V}{4} \cdot \left( \frac{\Delta R_1}{R_1} - \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_3}{R_3} - \frac{\Delta R_4}{R_4} \right) \quad \text{se } r = \frac{R_2}{R_1} = 1 \quad (5.16)$$

A variação da resistência é gerada pela deformação da superfície, sobre a qual são colados os extensômetros, logo

$$\frac{\Delta R_1}{R_1} = K \cdot \epsilon \quad (5.17)$$

onde  $K$  é o fator de calibração do extensômetro e  $\epsilon$  a deformação da estrutura do transdutor.

A localização adequada dos extensômetros na estrutura da LTC e a correta configuração dos extensômetros no circuito da ponte *Wheatstone* permitem-lhe fazer medições de forças axiais, cisalhante, flexão e torção com uma precisão aceitável.

A LTC foi projetada para medir as deformações geradas pelas forças axiais e o momento torçor alinhado com o eixo “z” da célula. Portanto, sobre a estrutura central da LTC são coladas duas pontes completas de *Wheatstone*: a primeira para

mensurar a carga axial (tração / compressão) e a segunda para mensurar o momento torçor. A seguir, apresenta-se a configuração da localização dos extensômetros e as conexões da ponte *Wheatstone* para os casos de tração/compressão e torção.

### 5.2.2.1. Configuração da célula de carga

A célula de carga é um instrumento de medição baseado em extensômetros, cuja tensão de saída é proporcional à deformação da estrutura da LTC e, conseqüentemente, a carga aplicada. Na superfície exterior da seção central da LTC, com um perfil circular ôco (vide Figura 5.9), são colados os extensômetros formando-se, assim, uma ponte completa.

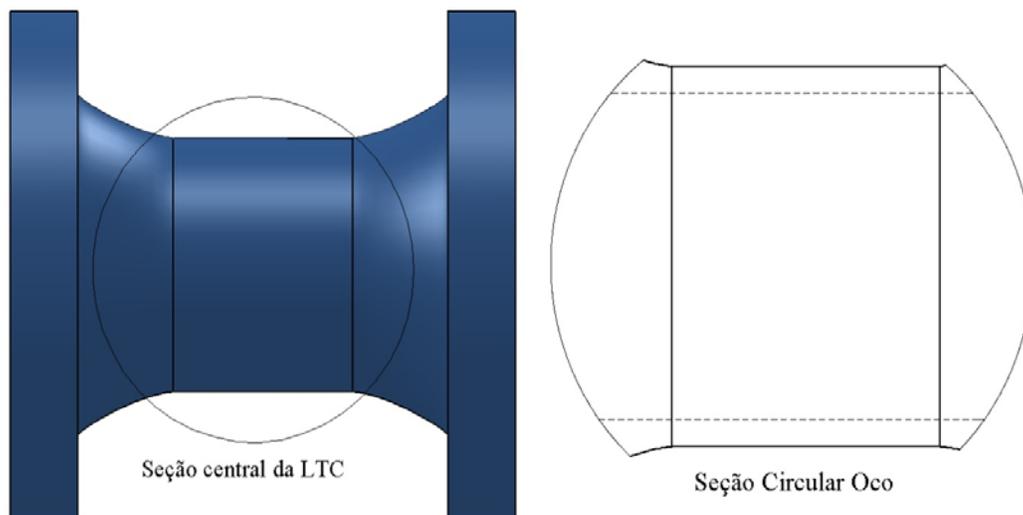


Figura 5.9 Seção central da LTC

Na superfície exterior da seção circular ôca da LTC são colados 4 extensômetros, 2 na direção longitudinal e 2 na direção transversal, os quais medem a deformação na direção “z” e “x” respectivamente.

Cada par de extensômetros é conectado e localizado, segundo a configuração apresentada na Figura 5.10. Esta configuração permite compensar os efeitos de desalinhamento entre a LTC e a carga axial, efeito temperatura e o momento torçor na direção “z”.

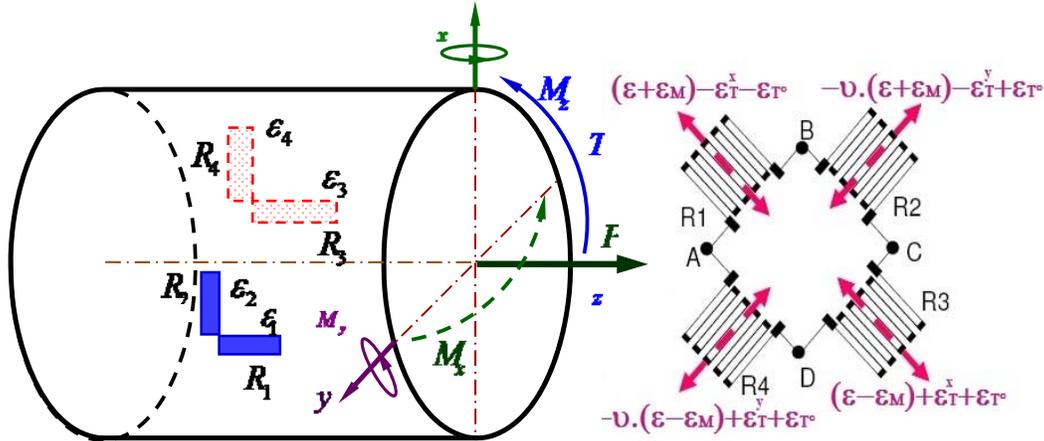


Figura 5.10 Conexão dos extensômetros na LTC, como célula de carga

Na Figura 5.10, o desalinhamento da carga  $F$ , com o eixo “z” da LTC gera os momentos  $M_x$  e  $M_y$ . A combinação destes momentos e de acordo com a localização dos extensômetros gera uma deformação positiva  $\varepsilon_M$  na resistência  $R_1$ , deformação negativa  $-\varepsilon_M$  na resistência  $R_3$ , enquanto as resistências  $R_2$  e  $R_4$  são insensíveis ao momento  $M_y$  por estarem localizadas sobre o eixo “y”. O momento torçor  $M_z$  gera deformação positiva  $\varepsilon_T$  nas resistências  $R_3$  e  $R_4$ , e gera deformação negativa  $-\varepsilon_T$  nas resistências  $R_1$  e  $R_2$ . Finalmente, o efeito da temperatura foi eliminado pela conexão adequada das resistências na ponte de *Wheatstone*. A Equação (5.18) permite relacionar as deformações dos extensômetros e as tensão de saída na ponte *Wheatstone*.

$$\Delta E = \frac{K \cdot V}{4} \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4) \quad (5.18)$$

onde  $\varepsilon_1 = \varepsilon + \varepsilon_M - \varepsilon_T^x + \varepsilon_{T^o}$ ,  $\varepsilon_2 = -v \cdot (\varepsilon + \varepsilon_M) - \varepsilon_T^y + \varepsilon_{T^o}$ ,  $\varepsilon_3 = \varepsilon - \varepsilon_M + \varepsilon_T^x + \varepsilon_{T^o}$ , e  $\varepsilon_4 = -v \cdot (\varepsilon - \varepsilon_M) + \varepsilon_T^y + \varepsilon_{T^o}$ . Substituindo na Equação (5.18), obtém-se a saída  $\Delta E$  proporcional à deformação uniaxial,

$$\Delta E = \frac{K \cdot \varepsilon \cdot (1 + \nu) \cdot V}{2} \quad (5.19)$$

onde  $K$  é o fator de calibração dos extensômetros,  $\nu$  o módulo de Poisson  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_M$ ,  $\varepsilon_T$  e  $\varepsilon_{T^o}$  são as deformações geradas pelas cargas axiais, momento de flexão, momento

torçor, e a temperatura, respectivamente.

### 5.2.2.2. Configuração da célula de torque

A adequada configuração dos extensômetros sobre a superfície central da LTC permite utilizá-la como célula de torque e medir o torque aplicado sobre corpo de prova. A tensão de saída depende da variação da resistência dos extensômetros, a qual é proporcional à deformação da estrutura da LTC e conseqüentemente ao torque aplicado. A configuração dos 4 extensômetros que constituem a ponte de *Wheatstone* de torção, é colada em pares sobre a superfície exterior da seção circular ôca da LTC. Esta configuração permite medir o torque aplicado ao corpo de prova e compensar efeitos devido aos momentos fletores, forças axiais e efeitos da temperatura (vide Figura 5.11).

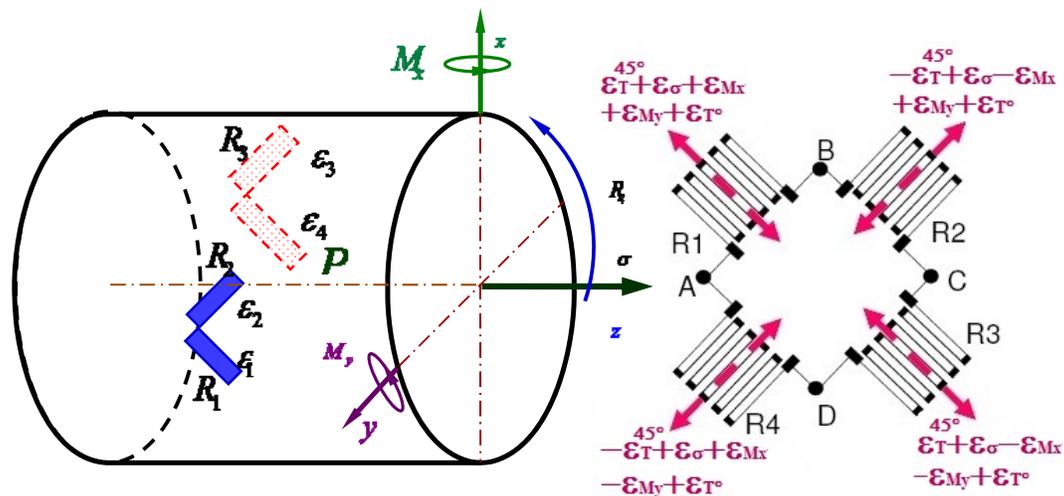


Figura 5.11 Conexão dos extensômetros na LTC como célula de carga

Na Figura 5.11,  $\epsilon_T^{45}$ ,  $\epsilon_\sigma$ ,  $\epsilon_{M_x}$ ,  $\epsilon_{M_y}$  e  $\epsilon_{T^\circ}$  aparecem devido às deformações geradas pelo torçor T, a força axial F, os momentos flexores  $M_x$ ,  $M_y$  e o efeito da temperatura respectivamente. Os extensômetros experimentam a combinação destas deformações que são dadas por  $\epsilon_1 = \epsilon_T^{45} + \epsilon_\sigma + \epsilon_{M_y} + \epsilon_{M_x} + \epsilon_{T^\circ}$ ,  $\epsilon_2 = -\epsilon_T^{45} + \epsilon_\sigma + \epsilon_{M_y} - \epsilon_{M_x} + \epsilon_{T^\circ}$ ,  $\epsilon_3 = \epsilon_T^{45} + \epsilon_\sigma - \epsilon_{M_y} - \epsilon_{M_x} + \epsilon_{T^\circ}$  e  $\epsilon_4 = -\epsilon_T^{45} + \epsilon_\sigma - \epsilon_{M_y} + \epsilon_{M_x} + \epsilon_{T^\circ}$ . Substituindo na Equação (5.20) obtém-se:

$$\Delta E = K \cdot \epsilon_T^{45} \cdot V \quad (5.20)$$

A configuração dos quatro braços da ponte *Wheatstone* (vide Figura 5.8) permite a compensação da deformação causada pelas cargas excêntricas, pelo efeito de temperatura e a deformação causada pela torção nas medições de tração e vice-versa.

### 5.2.3. Fabricação da LTC

A célula de carga e torque foi feita numa liga de aço 4340, usinada num torno CNC universal ROMI - Centur 30D, dada a complexidade do perfil melhorado do entalhe e, posteriormente, levada ao tratamento térmico. Após a fabricação, foram colados os extensômetros segundo as configurações apresentadas nas Figuras 5.10 e 5.11. Duas rosetas a 90° foram utilizadas para mensurar a força axial colada com uma defasagem de 180°. Semelhantemente, duas rosetas espinha de peixe foram utilizadas para medir o torque (vide Figura 5.12).

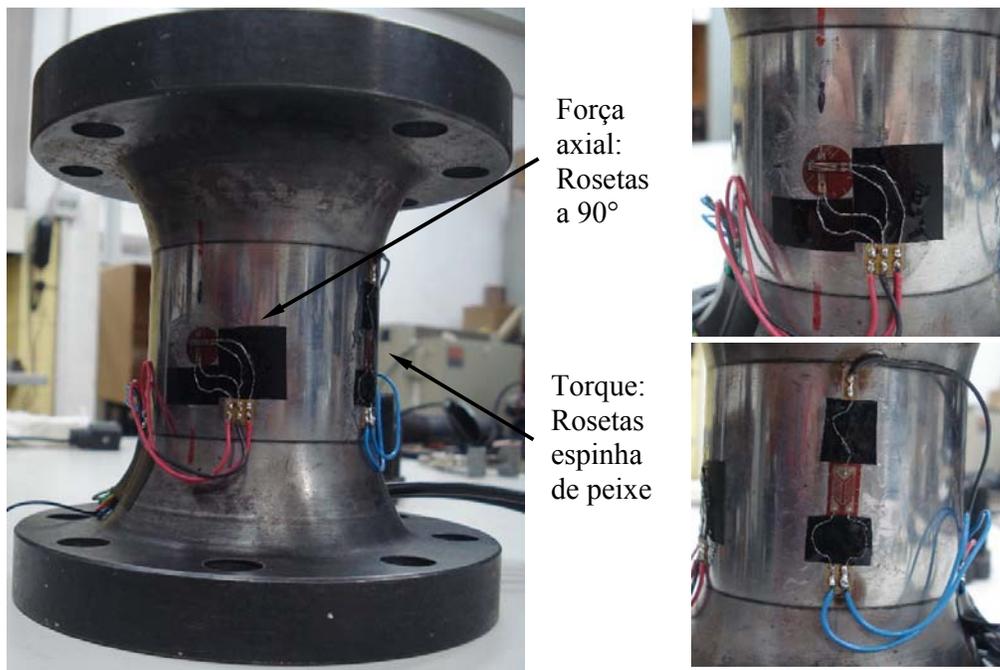


Figura 5.12 Conexão dos extensômetros na LTC

### 5.3. Calibração dos transdutores da MTT

No uso de transdutores baseados em extensômetros frequentemente surge a necessidade de calibrá-los. Este é um procedimento requerido periodicamente para assegurar-se da exatidão e linearidade do próprio instrumento [36]. Para a calibração dos transdutores foi desenvolvido um sistema de leitura no software LABVIEW utilizando-se o *cRio-9004* e o módulo de excitação de extensômetros NI-9237, que permite tomar as medidas de tensão elétrica do transdutor (célula de carga, torque ou LVDT's), e relacioná-las com seu valor real (força, torque ou deslocamento), gerando-se uma curva de calibração entre o valor medido e o padrão real.

#### 5.3.1. Calibração da célula de carga e torque

A célula de carga incorporada na LTC foi calibrada utilizando-se a máquina INSTRON modelo 8501, com capacidade máxima de  $\pm 100$  kN. Através dela foi possível medir a força padrão com exatidão, e relacioná-la com as medições através do sistema integrado de leitura (*cRio-9004*, módulo de excitação dos extensômetros NI-9237 e laptop). Na Figura 5.13 mostra-se o sistema de calibração utilizado para calibrar a força axial.

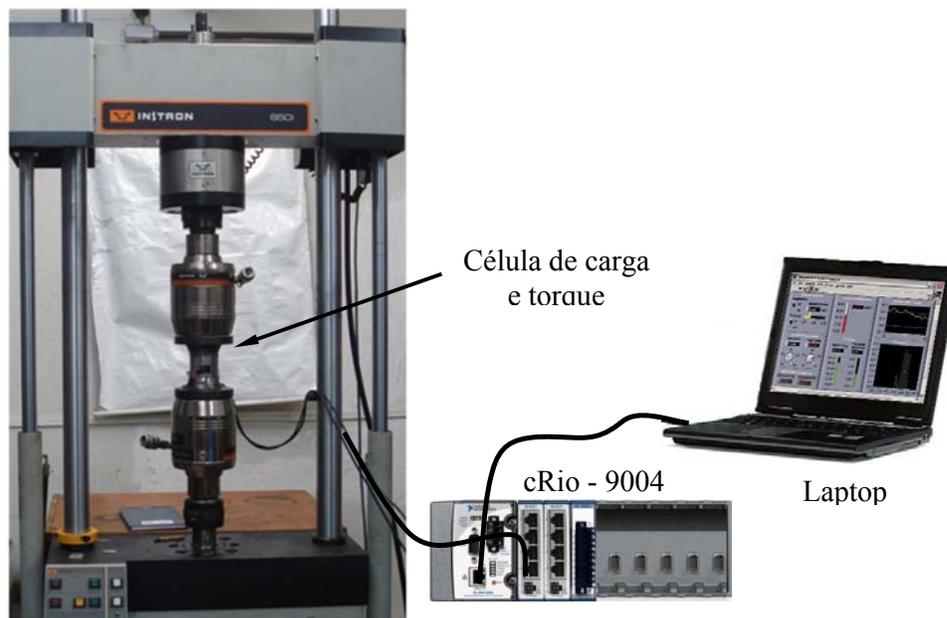


Figura 5.13 Sistema de calibração da célula de carga

A tensão de saída da ponte de *Wheatstone*, medida pelo sistema de leitura para diferentes valores de carregamento aplicado pela máquina INSTRON sobre a LTC, permitiu gerar uma curva de calibração relacionando a tensão de saída e força axial real aplicadas (vide Figura 5.14). Com isto, mostra-se que a LTC tem um comportamento linear e a tensão de saída da ponte *Wheatstone* da LTC é proporcional à força axial aplicada.

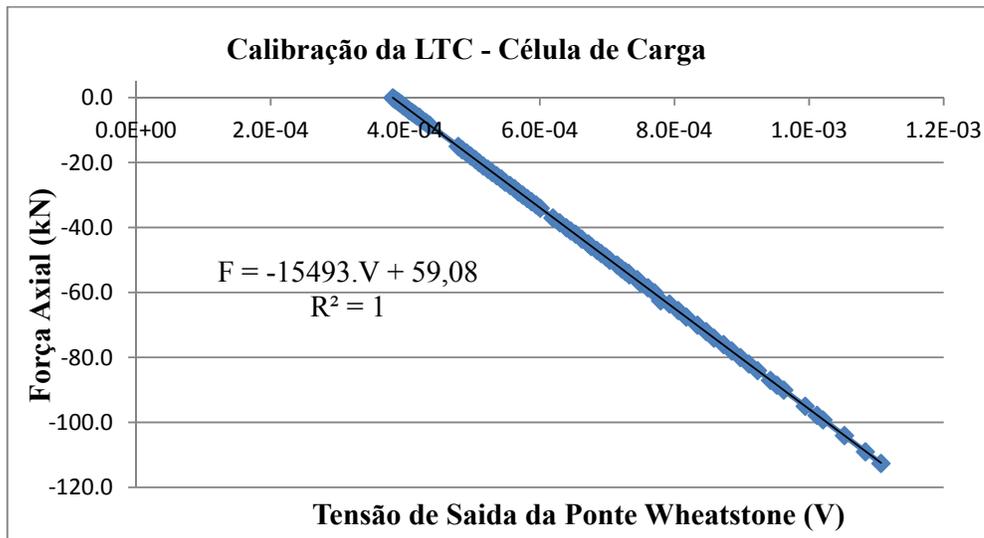


Figura 5.14 Curva de Calibração da LTC - célula de carga

No entanto, a calibração da célula de torque da LTC é feita mediante a aplicação de torque através de um braço alavanca de comprimento conhecido e, assim, aplicando valores de torque padrão.

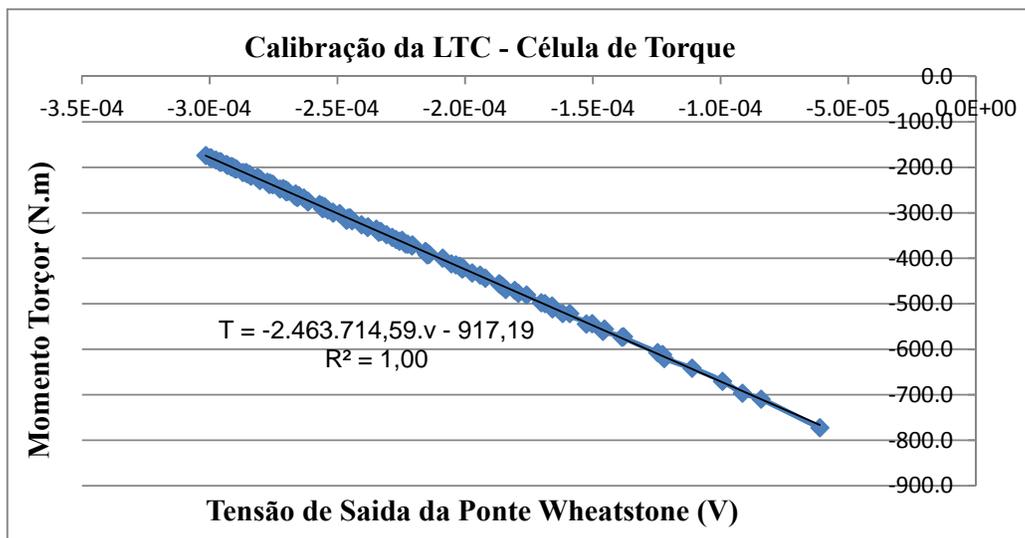


Figura 5.15 Curva de Calibração da LTC - célula de torque

### 5.3.2. Calibração do LVDT- linear

Para a calibração do LVDT Linear (DT-100A \_ *KYOWA*) foi utilizado um módulo de calibração que consistia em uma bancada milimétrica sobre a qual foi montada o LVDT e controlado seu deslocamento. O sistema de leitura (módulo NI-9237, *cRio* e Laptop) permitiu ler-se a tensão elétrica do LVDT e relacioná-la a seu valor real de deslocamento, gerando uma curva de calibração entre o deslocamento real e o valor de tensão elétrica lida no LabVIEW. Na Figura 5.16 apresenta-se o sistema de calibração do LVDT que mede o deslocamento linear do eixo da MTT.

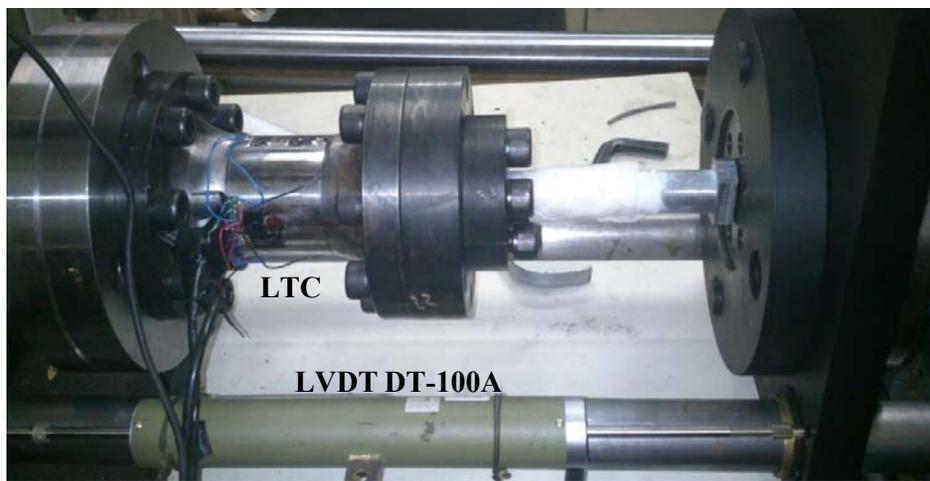


Figura 5.16 Sistema de calibração do LVDT Linear DT-100A

A curva de calibração do LVDT DT-100A é apresentada a seguir.

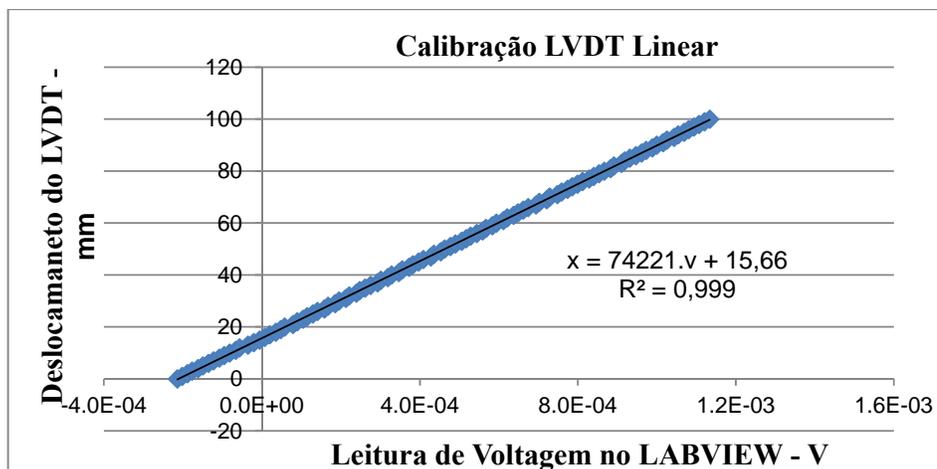


Figura 5.17 Calibração do LVDT Linear DT-100A

O LVDT-Linear DT-100A tem a função de medir o deslocamento linear do eixo da MTT (vide Figura 5.16), o qual permitiu implementar os limites de posição para uma maior segurança nos ensaios.

### 5.3.3. Calibração do LVDT- rotação

A medição da rotação do eixo da MTT permite implementação de limites para o deslocamento angular. Estes evitam que o atuador mecânico de rotação gire além do necessário, ou se acelere em caso de ruptura do corpo de prova por torção. Por este motivo, é necessário instalar um LVDT de rotação. Contudo, diante das limitações financeiras para adquirir um LVDT exclusivo para medir rotação, foi utilizado um outro LVDT-Linear DT-100<sup>a</sup>, que mede indiretamente a rotação do eixo da MTT.

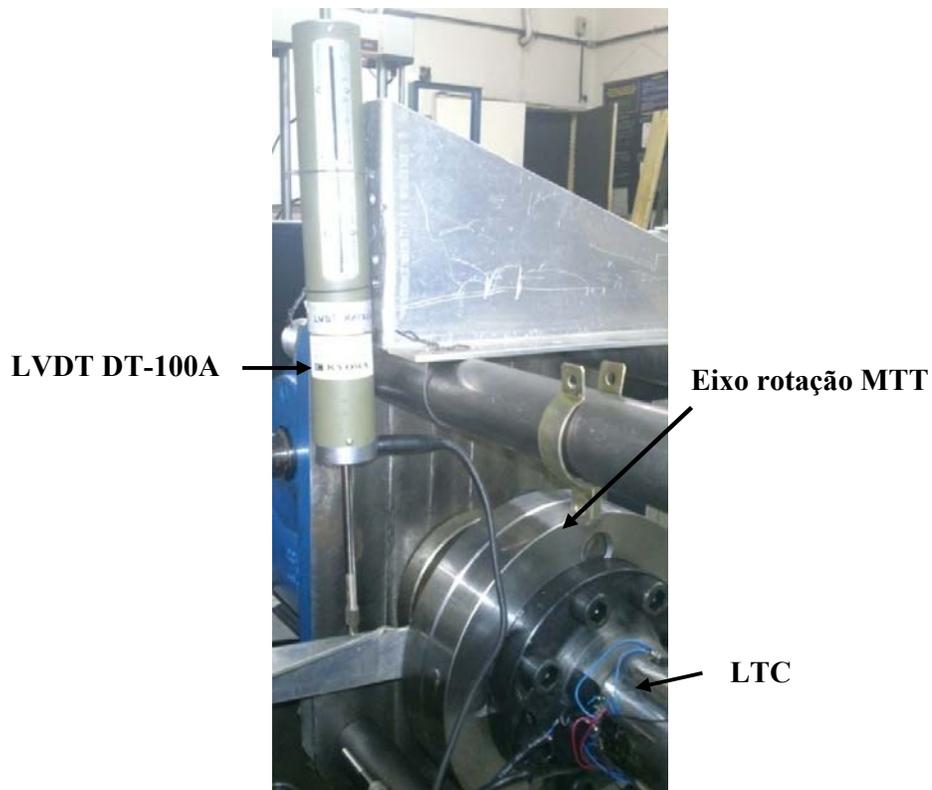


Figura 5.18 Calibração do LVDT Linear DT-100A para rotação

O LVDT DT-100A utilizado para medir a rotação foi calibrado de maneira semelhante ao LVDT-Linear. Na Figura 5.19 apresenta-se a curva de calibração do LVDT utilizado para medir a rotação do eixo da MTT.

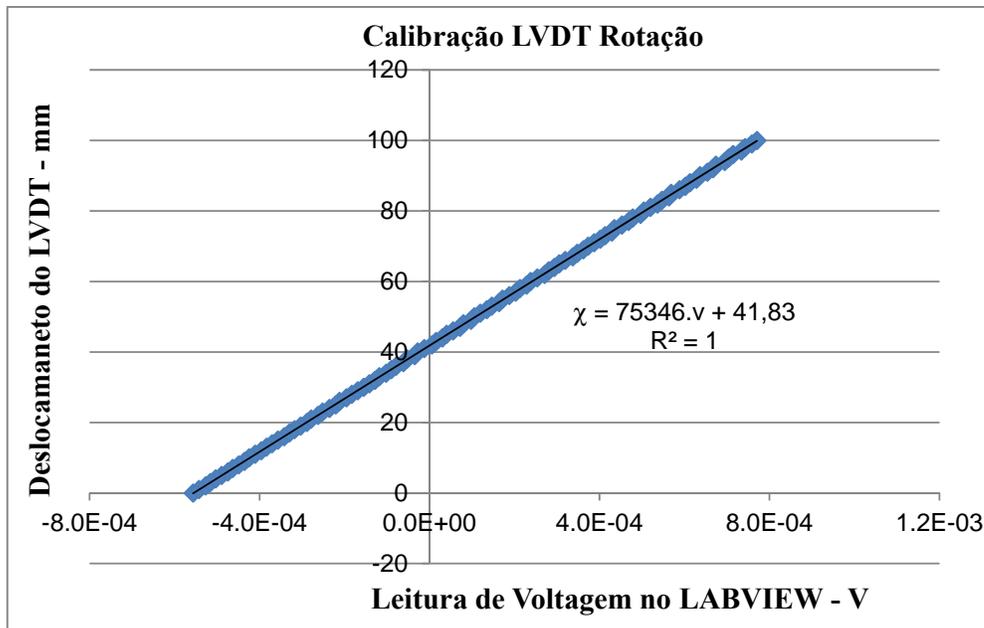


Figura 5.19 Calibração do LVDT rotação DT-100A

Todos os transdutores têm comportamento linear e foram ajustados com alta precisão a uma reta, como é apresentado nas Figuras 5.14, 5.15, 5.17 e 5.19.

#### 5.4. Desenvolvimento do sistema experimental MTT

Como já foi apresentada no capítulo quatro e Apêndice A, a MTT está composto principalmente de dois mecanismos, um para gerar força axial e outro para gerar torque, membros de transmissão de carga, transdutores para a medição das magnitudes a serem controladas, um sistema de controle provido de uma interface homem-máquina e uma estrutura rígida. Em um sistema eletromecânico, geralmente usa-se como atuador um motor DC acoplado a uma caixa redutora controlada por um *driver*, através de um sinal proporcional ou on/off. Além disso, utiliza-se um conjunto de transdutores, como célula de carga e torque, para medir a força e/ou torque aplicados no corpo de prova, LVDT's para mensurar o deslocamento do atuador e *clip gages* ou extensômetros para medir as deformações nos espécimes de prova.

Na Figura 5.20, apresenta-se a MTT desenvolvida no Laboratório de Fadiga da PUC-Rio, o sistema implementado é o modelo simplificado da MTT apresentado

e justificado no Apêndice A.

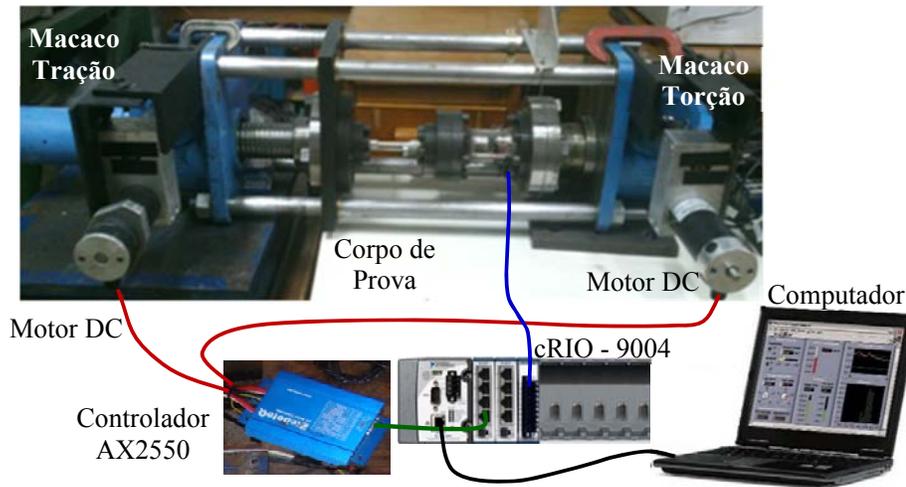


Figura 5.20 MTT desenvolvida no Laboratório de Fadiga - PUC-Rio

#### 5.4.1. Conexões elétricas da MTT

As conexões elétricas da MTT estão constituídas de duas partes. A primeira parte é a de leitura de dados, a qual inclui a conexão da célula de carga e torque e dos dois LVDT's ao módulo de aquisição de dados NI-9237 do *CompactRio* da *National Instruments*. Já a segunda parte é a de sinal de controle dos motores, constituída pela conexão do módulo NI-9263 do cRio ao controlador AX2550, que controla os motores DC mediante um sinal de controle proporcional.

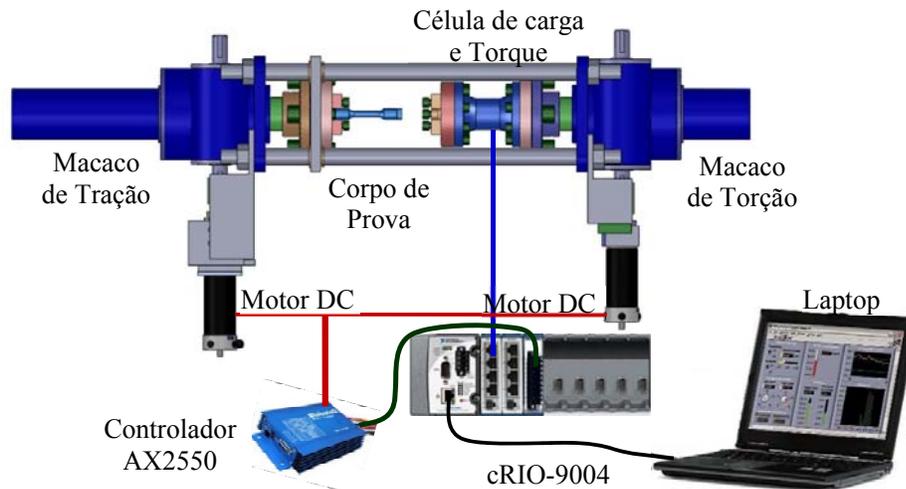


Figura 5.21 Esquema de conexões elétricas e do sistema de controle

### 5.4.2. Módulo de controle *compactRio*

O módulo de controle *CompactRio* da *National Instruments* é um controlador programável de automação, com um sistema de controle reconfigurável e aquisição de dados projetados para aplicações que requerem alto desempenho e resposta em tempo real com alta confiabilidade. Ele combina um processador em tempo real integrado a um chip FPGA de alto desempenho e robustez, com módulos de entrada/saída intercambiáveis. O FPGA é conectado ao processador em tempo real através de um bus PCI de alta velocidade, no qual cada módulo de entrada/saída conecta-se diretamente ao FPGA. O *CompactRIO* usado no sistema de controle da MTT é o *cRIO 9004*, apresentado na Figura 5.22.



Figura 5.22 Controlador *cRIO-9004*

O *cRIO-9004* tem incorporado um processador industrial classe Pentium de 195 MHz para executar em tempo real as aplicações determinísticas desenvolvidas no software *LabVIEW Real Time*. O *cRIO* tem uma memória de 512 MB de armazenamento *CompactFlash* não volátil e *DRAM* de 64 MB, além de uma porta Ethernet para a programação pela rede. O *LabVIEW Real Time* tem funções internas para transferir dados entre o *FPGA* e o processador em tempo real dentro do sistema do *CompactRIO*.

O *FPGA* (*Field Programmable Gate Arrays*) é um chip de silício reprogramável que contém blocos de lógica pre-construídos cuja interconexão e funcionalidade podem ser configuradas e re-configuradas entre si, nas diferentes aplicações desenvolvidas (vide Figura 5.23). Aplicações com algoritmos onde se precisa resposta em tempo real, sincronização, precisão, e execução de tarefas

simultâneas de forma paralela, são desenvolvidas no FPGA. O paralelismo é conseguido devido ao fato que o módulo *LabVIEW FPGA* executa sua lógica no hardware, tendo o programa a vantagem de processar as tarefas tais como aplicações de controle, leitura e gravação de saídas analógicas e/ou digitais, em tempo real e de forma determinística.

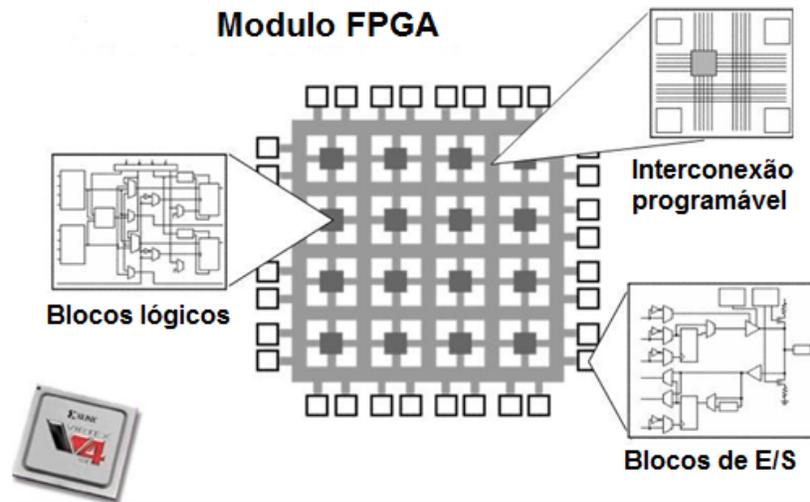


Figura 5.23 Arquitetura interna do módulo FPGA

Para o controle da MTT utilizou-se um módulo de saída analógica e módulos de excitação de extensômetros. O módulo *NI cRIO-9263* apresentado na Figura 5.24 (a) é o módulo de saída analógica utilizado para gerar tensões elétricas entre 0 V e +5 V. Essas saídas analógicas são utilizadas para ativar o controlador *Roboteq AX2550*, que atua como uma interface de potência entre o cRIO e os motores *Ampflow A28-400*, os motores DC adotados.

O módulo *NI cRIO 9237* apresentado na Figura 5.24 (b) é o módulo excitador de extensômetros utilizado para excitar e medir valores da força e do torque aplicados ao corpo de prova, através da célula de carga. Também utiliza-se para medir o deslocamento linear dos LVDT's e as deformações do corpo de prova através de um *clip gage*. Pode-se programar as tensões elétricas de excitação com os valores de 2,5 volts, 3,3 volts, 5 volts e 10 volts. Este módulo utiliza uma combinação de filtros analógicos e digitais, podendo, assim, proporcionar uma representação precisa dos sinais desejados.



Figura 5.24 a) módulo NI-9263 e b) módulo NI-9237

### 5.4.3. Software desenvolvido em LabVIEW

A interface homem-máquina implementada para o controle da máquina tração-torção foi desenvolvida no software *LabVIEW*. Este software utiliza três ambientes de programação: um computador conectado ao cRIO mediante comunicação TCP/IP, onde são armazenados os valores de força e torque e a plotagem de gráficos; um ambiente *RealTime*, no qual se configuram os parâmetros, tanto do controle por modos deslizantes de força quanto do controle PID por modos deslizantes de torque. Os sinais de força e torque desejados definem os limites de segurança de carga, torque, deslocamento e rotação angular; e ainda, um ambiente que inclua os laços de programação do controle no FPGA, nos quais são executados os laços (*loops*) do controle de força e torque, independente um do outro, chegando a velocidades de processamento em microssegundos. Os laços independentes incluem a leitura e filtragem dos sinais, algoritmo de controle, início e parada da MTT e, finalmente, os limites de segurança (vide Figura 5.25).

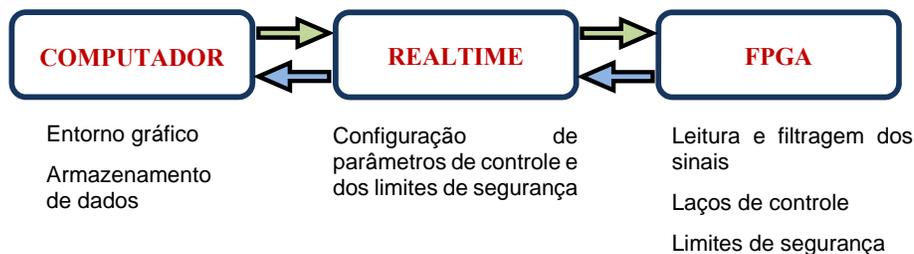


Figura 5.25 Interação dos ambientes de programação do controlador

No próximo capítulo, serão apresentadas as técnicas de controle implementadas na MTT para o controle de trajetória de força e torque e para gerar histórias do carregamento desejado.

## 6. Sistema de Controle

### 6.1. Introdução

O sistema de controle se baseia em uma malha fechada, a qual requer retroalimentar a informação de saída do sistema medida através de transdutores, comparar com o sinal de referência, e corrigir a saída mediante o sinal de controle. Esta realimentação faz possível estabilizar os sistemas instáveis, melhorando sua robustez frente às variações do comportamento de alguma parte do sistema, ou atenuando perturbações externas não mensuráveis. Na Figura 6.1 mostra-se o sistema de controle em malha fechada.

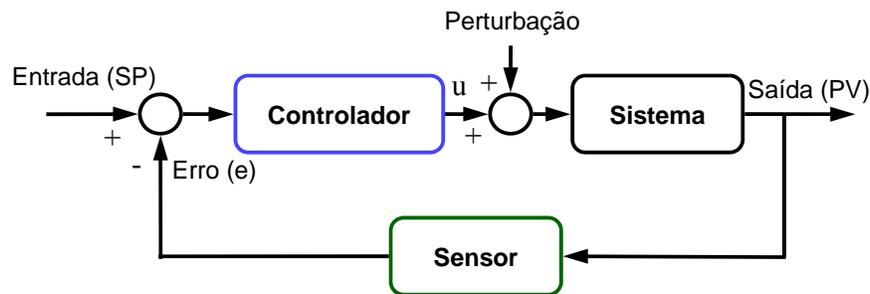


Figura 6.1 Sistema de controle em malha fechada

A entrada representa o valor desejado da planta, enquanto a saída desta corresponde ao que realmente ocorre (saída real), não só como resposta devido a um sinal de controle “u” mas também devido a sinais de perturbação. Assim, o sinal de controle “u” gerado pelo controlador sobre a planta procura minimizar o erro (diferença entre a entrada e a saída), tentando idealmente levar a zero [37].

Na Figura 6.2 apresenta-se a resposta típica do sistema a uma entrada degrau, que pode ser decomposta em duas etapas: regime transitório e regime permanente. Alguns dos parâmetros de projeto relativos ao regime transitório são o tempo de subida, o percentual de ultrapassagem (da saída em relação à entrada) e o tempo de acomodação. No regime permanente, busca-se reduzir o erro.

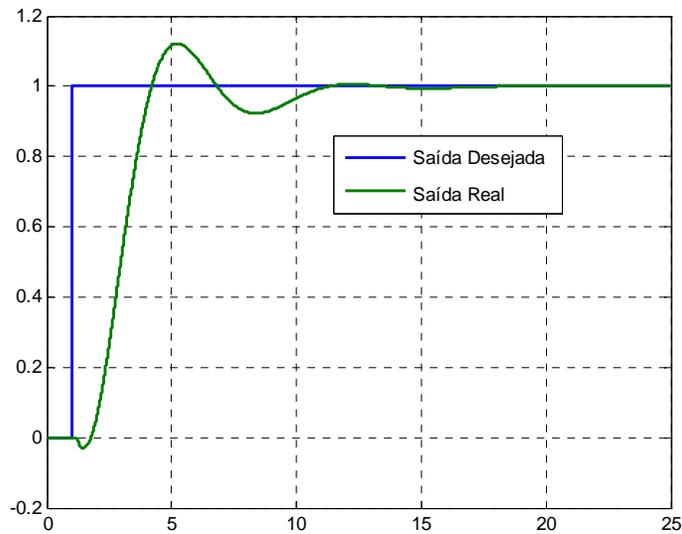


Figura 6.2 Resposta ao degrau do sistema

Neste capítulo, serão apresentadas as técnicas de controle *sliding* e *PID sliding*, que foram implementadas para lidar com as não-linearidades da MTT.

## 6.2. Controle PID

Os controladores PID apresentam robustez em diversas aplicações e são os mais amplamente utilizados na indústria. Sua estrutura de controle é muito simples de implementar, mas sua linearidade limita o grupo de plantas onde pode ser aplicado satisfatoriamente [38]. Neste caso, pode-se dizer que o sucesso dos controladores PID está na simplicidade para sua implementação e no fato que representam um componente fundamental para estratégias de controle mais sofisticadas. Por este motivo ainda hoje é amplamente usado na indústria [39]. Além disso, o controlador PID compõe-se de três algoritmos de controle, a ação proporcional, integral e derivativa. Desta forma, o algoritmo de controle compara o valor desejado (*set point* - SP) com a variável de processo (PV) para obter-se o erro (e). O erro atual é dado pela Equação (6.1), utilizada para calcular a ação proporcional, integral e derivativa.

$$e(k) = SP - PV \quad (6.1)$$

O controlador PID determina o valor da saída do controlador  $u(t)$  em função do erro medido.

$$u(t) = K_c \cdot \left( e + \frac{1}{T_i} \int_0^t e \cdot dt + T_d \cdot \frac{de}{dt} \right) \quad (6.2)$$

onde,  $K_c$  é o ganho do controlador,  $T_i$  o tempo integral e,  $T_d$  o tempo derivativo.

### 6.2.1. Controle proporcional (P)

Neste controlador, a ação proporcional se calcula como o produto do ganho proporcional e a sinal de erro medido. O controlador gera um sinal de controle proporcional ao erro para tentar corrigi-lo, estabilizando-se o sistema, como apresenta-se na equação (6.3),

$$u_p(k) = K_c \cdot e(k) \quad (6.3)$$

onde  $K_c$  é o chamado de ganho proporcional.

Um problema do controle proporcional é que não é possível obter erro de regime permanente nulo. Além disso, os valores ótimos de  $K_c$  estão só numa faixa do espaço total de controle, de maneira que se ele toma valores de  $K_c$  fora dessa faixa ou ainda muito altos, pode tornar o sistema instável.

### 6.2.2. Controle integral (I)

A ação de controle integral tem como propósito diminuir ou eliminar o erro em regime permanente, e atua para evitar fortes mudanças entre o valor desejado (SP) e o valor real (PV) da variável controlada. Este erro integra-se mediante um circuito que executa a operação matemática de integração trapezoidal, e pode ser descrito como o somatório dos produtos dos valores instantâneos da grandeza de entrada por pequenos intervalos de tempo, desde o instante inicial até o final (período de integração). Ou seja, representado como a área entre a curva do erro e o eixo do tempo e matematicamente, expresso por

$$u_i(k) = \frac{k_c}{T_i} \cdot \sum_{i=1}^k \left[ \frac{e(i) + e(i-1)}{2} \right] \cdot \Delta t \quad (6.4)$$

onde  $u_i(k)$  é a ação integral do controle,  $\Delta t$  o intervalo de tempo,  $T_i$  o tempo integral e  $e(i)$  e  $e(i-1)$  são o erro atual e o anterior, respectivamente.

O uso do integrador como controlador leva a uma melhoria na precisão do sistema, embora o torne mais lento. Além disso, o integrador introduz um pólo na origem da função de transferência em malha aberta, que tende a piorar a estabilidade relativa do sistema em malha fechada ou inclusive torná-lo instável. Motivo pelo qual esta ação de controle geralmente não se aplica de maneira isolada.

### **6.2.3. Controle derivativo (D)**

A ação do controle derivativo pode ser entendida como o cálculo da taxa (ou velocidade) de variação da grandeza de entrada, em relação ao tempo. Assim, a função da ação derivativa é a de manter o erro ao mínimo, tentando mudar o controle proporcional para a mesma velocidade na qual foi produzido, evitando-se, assim, que o erro se incremente. Isso é representado, matematicamente, através da Equação (6.5).

$$u_d(k) = -\frac{k_c \cdot T_d}{\Delta t} \cdot [PV(k) - PV(k-1)] \quad (6.5)$$

onde  $T_d$  é o tempo derivativo.

A vantagem deste controle é a sua velocidade de resposta, que se deve à imediata reação do diferenciador. Este fato faz com que a ação derivativa seja utilizada para a obtenção de respostas transitórias mais rápidas, ou seja, melhora o comportamento dinâmico do sistema em malha fechada. Assim, no regime permanente, o sinal de erro é constante e a ação derivativa é igual a zero. Ou seja, esta ação atua apenas durante a resposta transitória.

Contudo, a desvantagem deste é justamente o fato de que o diferenciador é um circuito muito susceptível aos ruídos de alta frequência, uma vez que é um filtro passa-alta, o que pode levar a complicações durante o processo de controle.

**6.2.4.**  
**Saída do controlador u(k)**

A saída do controlador u(k) é dada através da combinação dos três tipos de controle que foram representados pelas equações (6.3), (6.4) e (6.5), respectivamente. Assim, o controlador tem a vantagem das três ações de controle e é representada por

$$u(k) = u_p(k) + u_i(k) + u_d(k) \quad (6.6)$$

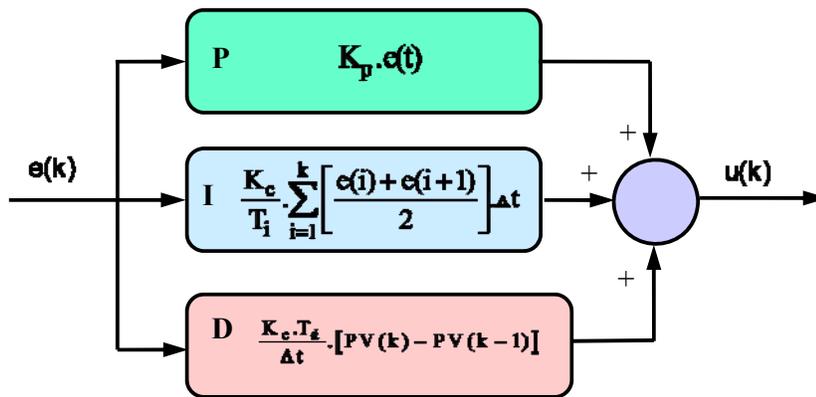


Figura 6.3 Diagrama de Blocos de um controlador PID

No controlador PID, os ganhos Proporcional, Integral e Derivativo são sintonizados com o propósito de se obter o melhor desempenho possível da resposta de saída do sistema (no regime transitório e permanente), cujo modelo matemático não necessariamente precisa ser conhecido. O valor destes ganhos é determinado aplicando-se um processo prévio de identificação para obter o modelo ou só o conhecimento prévio do comportamento da dinâmica do sistema [38].

A contribuição da ação integral está diretamente ligada à precisão do sistema e é responsável pelo erro em regime permanente. Contudo, a ação derivativa tende a aumentar a estabilidade relativa do sistema, ao mesmo tempo em que torna a resposta do sistema mais rápida, e dado seu efeito antecipatório permite contrabalançar o efeito desestabilizador da ação integral.

### 6.3.

#### Controle por modos deslizantes " *sliding mode control - SMC*"

Geralmente, no projeto de um controlador podem surgir discrepâncias entre a planta real e a modelagem desenvolvida, devido a vários fatores. Neste contexto, apesar das dificuldades, a tarefa dos engenheiros é a de assegurar o nível de desempenho exigido. Um dos muitos métodos de controle robusto desenvolvido para eliminar essa dificuldade foi o conhecido “controle por modos deslizantes – SMC” [40].

A abordagem do controle por modos deslizantes é reconhecido como uma das ferramentas mais eficientes para o desenho de controladores robustos, para os sistemas dinâmicos não lineares complexos. A principal vantagem deste modelo de controlador é sua baixa sensibilidade às variações dos parâmetros da planta e as perturbações, eliminando a necessidade de uma modelagem exata. Este método de controle altera a dinâmica do sistema não-linear, através da aplicação de um sinal de controle descontínuo que obriga ao sistema a deslizar ao longo de uma seção transversal do comportamento normal do sistema. Assim, o controle por modos deslizantes é um tipo específico de sistema de controle de estrutura variável, no qual a lei de controle é uma função não linear, que pode ser facilmente implementada pelos conversores de potência tradicionais, com operação *on-off* admissível, propriedade pela qual o SMC tem sido aprovado para ser aplicável em uma ampla gama de problemas da indústria.

#### 6.3.1.

##### Superfície de deslizamento

Esta técnica consiste em reduzir o problema de controle de um sistema genérico, descrito por uma equação não-linear de ordem " $n$ ", para uma de 1ª ordem, com incertezas em seus parâmetros e/ou em sua modelagem matemática. A metodologia do SMC consiste em projetar uma lei de controle que faça convergir todas as trajetórias desse sistema para uma superfície definida no espaço de estado, chamada de superfície de deslizamento  $S(t)$ .

A dinâmica desta superfície é escolhida pelo projetista de modo que todas as trajetórias dentro da superfície  $S(t)$  venham a convergir para seu valor desejado. O

projeto do controlador em modo deslizante consiste de duas etapas, a primeira em definir a superfície deslizante que torna o sistema dinâmico estável, e a segunda em definir uma lei de controle que garanta que todas as trajetórias converjam para a superfície deslizante [41]. Considerando-se um sistema não linear de ordem "n", tem-se uma única entrada descrita por

$$\dot{x}^n = f(X, t) + b(X, t).u + d(t) \quad (6.7)$$

onde  $X$  é o vetor de estado,  $f(X, t)$  e  $b(X, t)$  são geralmente não lineares e dependentes do tempo,  $d(t)$  é uma perturbação,  $x$  é a saída de interesse e  $u$  o sinal de controle.

Assim,  $\tilde{x} = x - x_d$  é o erro de rastreamento associado com trajetória desejada, e a superfície de deslizamento  $S(t)$  é definida pela equação  $S(\tilde{x}, t) = 0$ ,

$$S(\tilde{x}, t) = \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right) \tilde{x} \quad (6.8)$$

onde  $\lambda$  é uma constante estritamente positiva, relacionada à largura da banda em malha fechada [42].

A Equação (6.8) representa uma linha de deslizamento para um sistema de segunda ordem. Neste caso, a superfície de deslizamento é ilustrada pela seguinte Figura 6.4.

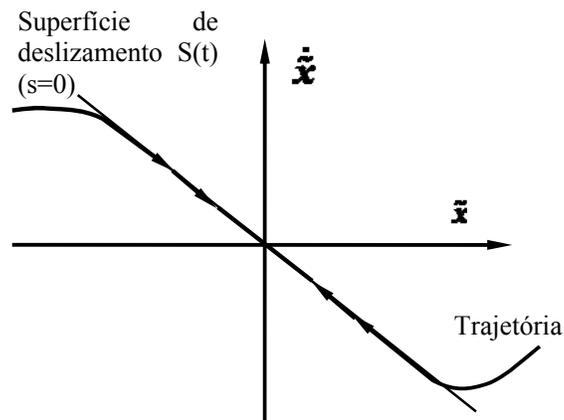


Figura 6.4 Superfície de deslizamento (Adaptado de Slotine e Li, 1991)

A superfície de deslizamento  $S(t)$  é definida pelo projetista e deve ter seus

valores tendendo a zero, assim como o valor do erro precisa convergir para zero após um intervalo de tempo, ou seja, com uma dinâmica dada por  $S(x, t) = 0$ .

### 6.3.2. Lei de controle

A lei de controle  $u$  é projetada com a finalidade que  $\tilde{x}$  alcance a superfície  $S(\tilde{x}, t) = 0$  em um intervalo de tempo finito. Uma vez atingida, permaneça deslizando nela indefinidamente. Para obter a lei de controle do sistema, deve-se derivar uma única vez a Equação (6.8) em relação ao tempo. A melhor estimativa da lei de controle é dada quando  $S = \dot{S} = 0$ , portanto

$$\dot{S} = (\ddot{x} - \ddot{x}_d) + \lambda \dot{\tilde{x}} = 0 \quad (6.9)$$

A lei de controle é dada pela equação

$$u = k_s \cdot \text{sinal}(S) \quad (6.10)$$

onde  $k_s$  é o ganho do termo chaveado e a função sinal é dada por,

$$\text{sinal}(S) = \begin{cases} +1 & \text{se } S \geq 0 \\ -1 & \text{se } S \leq 0 \end{cases}$$

### 6.3.3. O fenômeno de vibração "*Chattering*"

Um modo deslizante ideal não existe na prática. Isso implicaria que o controlador comute a uma frequência infinita. Na presença de imperfeições de comutação, tais como atraso no tempo de comutação e resposta dos atuadores, a descontinuidade na retroalimentação do controlador produz um comportamento dinâmico particular, geralmente conhecido como *chattering* [43]. Para se evitar o problema de *chattering*, segundo Slotine e Li deve-se suavizar a função sinal(S) utilizada na lei de controle, estabelecendo-se uma camada limite em torno da superfície de deslizamento  $S(t)$  sobre a qual ocorre a transição. A lei de controle suavizada é dada por,

$$u = k_s \cdot \text{sat}(S) \quad (6.11)$$

onde a função  $\text{sat}(S)$  é dada por

$$\text{sat}(S) = \begin{cases} \text{sinal}(S) & \text{se } |S| > w \\ S & \text{se } |S| \leq w \end{cases} \quad (6.12)$$

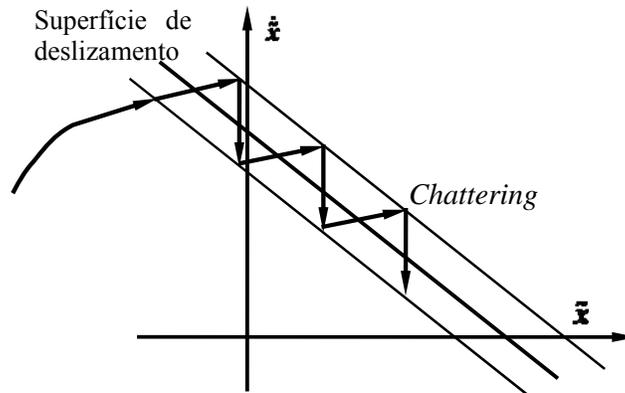


Figura 6.5 O fenômeno de *Chattering* (Adaptado de Slotine e Li, 1991)

#### 6.4. Aplicação da técnica de SMC na MTT

Para a avaliação dos modelos de plasticidade incremental é necessário fazer o controle da força e do torque aplicado pela MTT, sobre o corpo de prova, de maneira independente. Na tarefa de projetar um controlador robusto para a MTT, um dos principais desafios foi lidar com as não-linearidades presentes no sistema, como por exemplo o atrito nas colunas, zona morta nos macacos, e folga nos redutores e macacos. Baseado na robustez do controle por modos deslizantes para lidar com sistemas não-lineares, foi adaptada a teoria de controle por modos deslizantes para o controle de força da MTT, como apresentado no texto que segue.

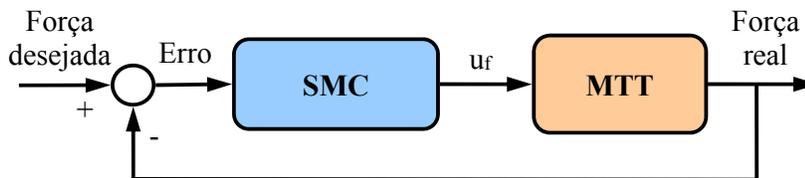


Figura 6.6 Esquema do controle de força da MTT

Para projetar o controle de força da MTT, a variável de interesse é a força axial aplicada ao corpo de prova. Tem-se, assim,  $x = F_r$  como a força real gerada pela MTT,  $x_d = F_d$  a força desejada, e o erro associado à trajetória como

$e_F = F_r - F_d$ . Logo, a superfície de deslizamento dada pela Equação (6.8) obtém-se da equação:

$$S_F = \dot{e}_F + \lambda \cdot e_F \quad (6.13)$$

Finalmente, a lei de controle segundo a Equação (6.11) é dado por

$$u_F = k_{sF} \cdot \text{sat}(\dot{e}_F + \lambda \cdot e_F) \quad (6.14)$$

onde  $u_F$  é a sinal de controle da força,  $\lambda$  o ganho proporcional, e  $k_{sF}$  o ganho de chaveamento para controle de força.

Entretanto, para implementar o controle de torque da MTT, foi necessário implementar um controlador ainda mais robusto, dada a elevada sensibilidade da célula de carga e torque. Esta, para pequenos deslocamentos angulares do sistema motor-reductor-macaco de torção, gera no sistema grandes variações nas medições de torque. Assim, para superar os desafios do controle de torque da MTT, se implementou um controlador híbrido que combina as vantagens do controle por modos deslizantes e o PID, conhecido como "*PID sliding control*". O princípio do algoritmo de controle híbrido consiste em determinar a superfície de deslizamento como a saída de um controlador PID, em função do erro ( $e$ ), sua integral ( $\int e \cdot dt$ ) e taxa de variação ( $\dot{e}$ ).

Portanto, primeiramente define-se a variável de interesse  $x = T_r$  que representa o torque gerado pela MTT,  $x_d = T_d$  é o torque desejado, e  $e_T = T_d - T_r$  é o erro associado à trajetória. Neste caso, a superfície de deslizamento para o controle de torque  $S_T$  é definida como a saída do controle PID e dada por [44].

$$S_T = \dot{e}_T + \lambda_1 \cdot e_T + \lambda_2 \cdot \int e_T \cdot dt \quad (6.15)$$

onde  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$  são fatores estritamente positivos e representam o ganho proporcional e o ganho integral, respectivamente. Os ganhos foram calibrados utilizando o mesmo critério de calibração dos parâmetros do controlador PID.

Finalmente, a lei de controle do controlador "*PID sliding control*" é dada pela Equação (6.11), resultando em

$$u_T = k_{sT} \cdot \text{sat}(\dot{e}_T + \lambda_1 \cdot e_T + \lambda_2 \cdot \int e_T \cdot dt) \quad (6.16)$$

onde  $u_T$  é o sinal de controle de torque e  $k_{sT}$  o ganho de chaveamento para o controle de torque. Na Figura 6.7 apresenta-se o esquema geral do sistema de controle da MTT, constituída de duas malhas fechadas de controle.

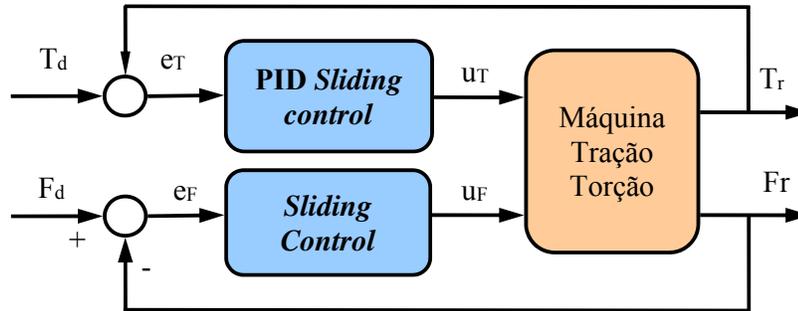


Figura 6.7 Esquema geral do sistema de controle da MTT

## 6.5. Resultados experimentais das técnicas de controle

Os resultados do controle por modos deslizantes de força e o controle PID por modo deslizante de torque para carregamentos de amplitude constante são apresentados a seguir. Neles observa-se o bom desempenho das técnicas de controle, aplicadas ao sistema eletromecânico, às incertezas e não linearidades presentes na dinâmica da MTT. Nas figuras são apresentados os resultados experimentais das técnicas de controle implementadas na MTT, para o controle trajetória da força e o torque.

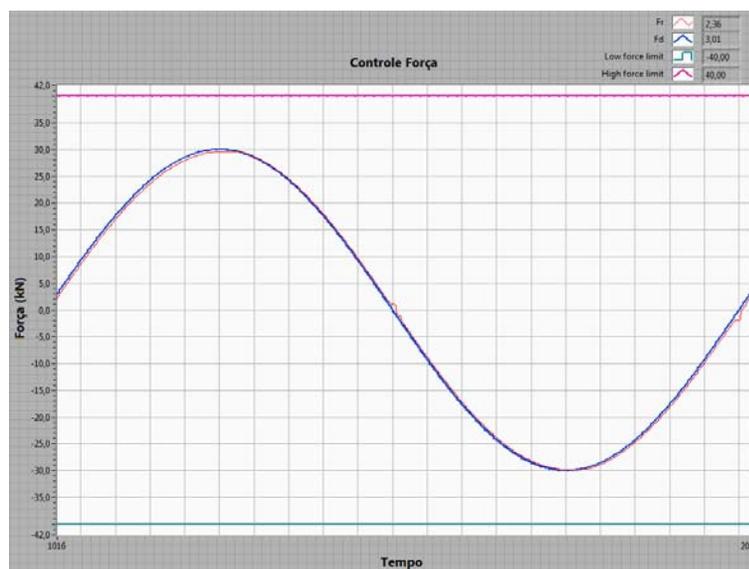


Figura 6.8 Controle por modos deslizantes para um carregamento tração de  $\pm 30$  kN

Na Figura 6.8, apresenta-se o resultado para controle de trajetória por modos deslizantes para uma força com amplitude constante de  $\pm 30$  kN (a uma frequência de trabalho de 0,01 Hz). O controle de força superou as não linearidades da dinâmica da MTT e conseguiu acompanhar a trajetória de carregamento solicitado.

Na Figura 6.9, apresenta-se a interface homem-máquina implementada no ambiente *RealTime*, onde são configurados os parâmetros da força desejada e os parâmetros do controle. Além disso, na Figura 6.9 apresenta-se os valores dos parâmetros de controle utilizados pelo controlador ao longo do ensaio.

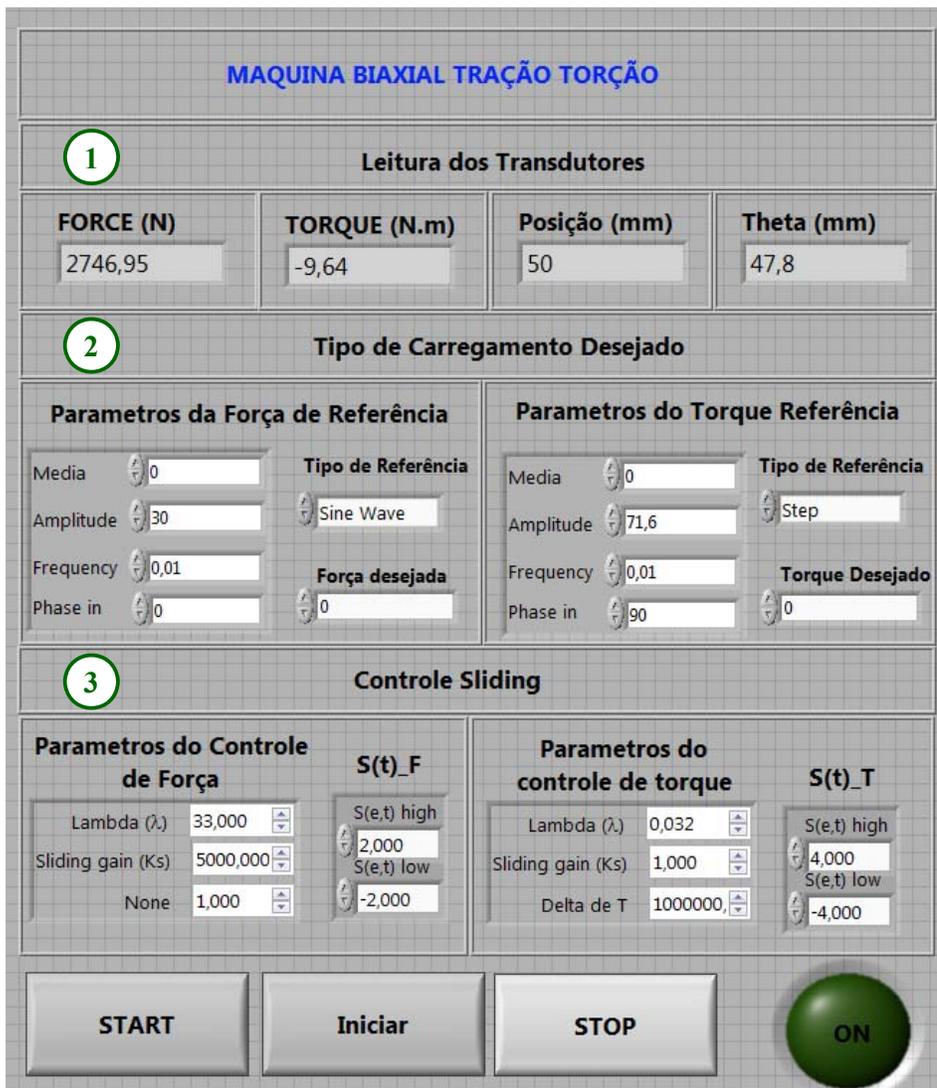


Figura 6.9 Interface de controle no ambiente *RealTime*

A Interface de controle é constituída de 3 seções (vide Figura 6.9), na seção 1 apresentam-se as leituras dos transdutores (a força e o torque aplicados sobre o

corpo de prova, o deslocamento linear e o ângulo de rotação da garra); na seção 2, configuram-se os parâmetros da trajetória de força, ou torque desejado; e na última seção configuram-se os parâmetros do controle, tanto da força, quanto do torque.

Na Figura 6.10 apresenta-se o comportamento do controle de força por modos deslizantes para outro carregamento solicitado. Neste caso, trata-se de um carregamento de amplitude constante de  $\pm 50$  kN e para a mesma frequência de trabalho.

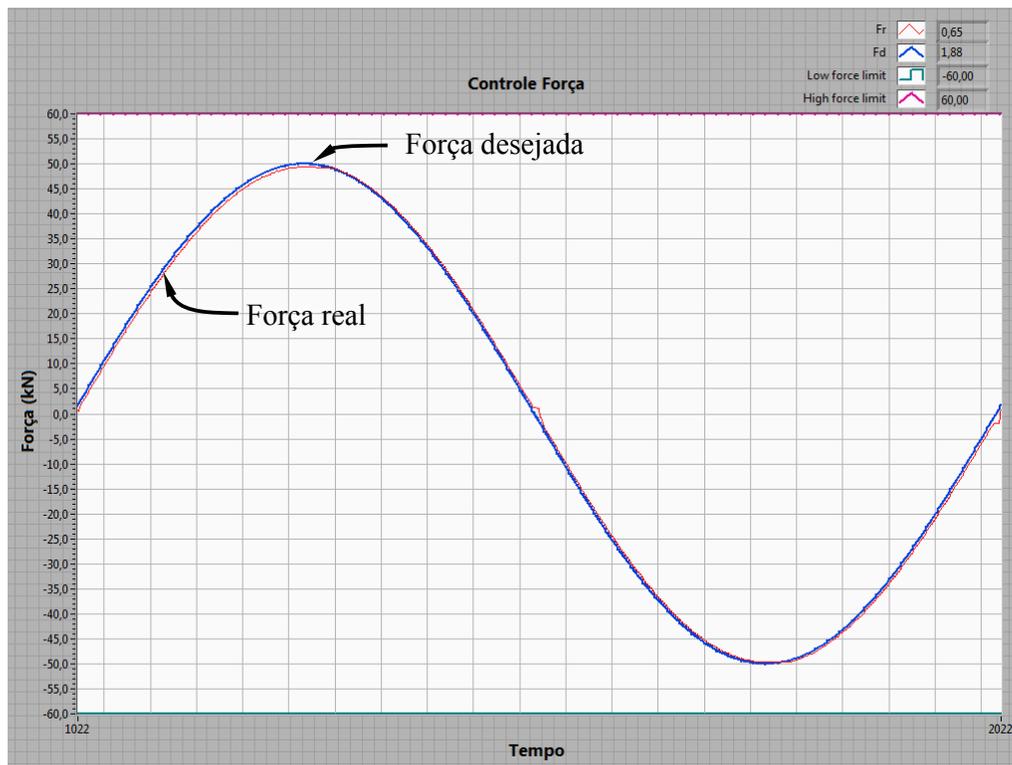


Figura 6.10 Controle por modos deslizantes para um carregamento de  $\pm 50$  kN

Na Figura 6.10 apresenta-se o comportamento do controle de força para um ciclo de simulação, onde pode-se observar que o controlador superou as não-linearidades da dinâmica do sistema, comprovando assim sua robustez. Para o controle de torque também, inicialmente, foi implementado o controle de torque por modos deslizantes. Os resultados obtidos para um torque solicitado de amplitude constante de  $\pm 71,6$  N.m, com torque médio zero e frequência de trabalho de 0,01 Hz, são apresentados na Figura 6.11. O controlador teve dificuldades para acompanhar a trajetória desejada e eventualmente apresentou problemas de oscilações.

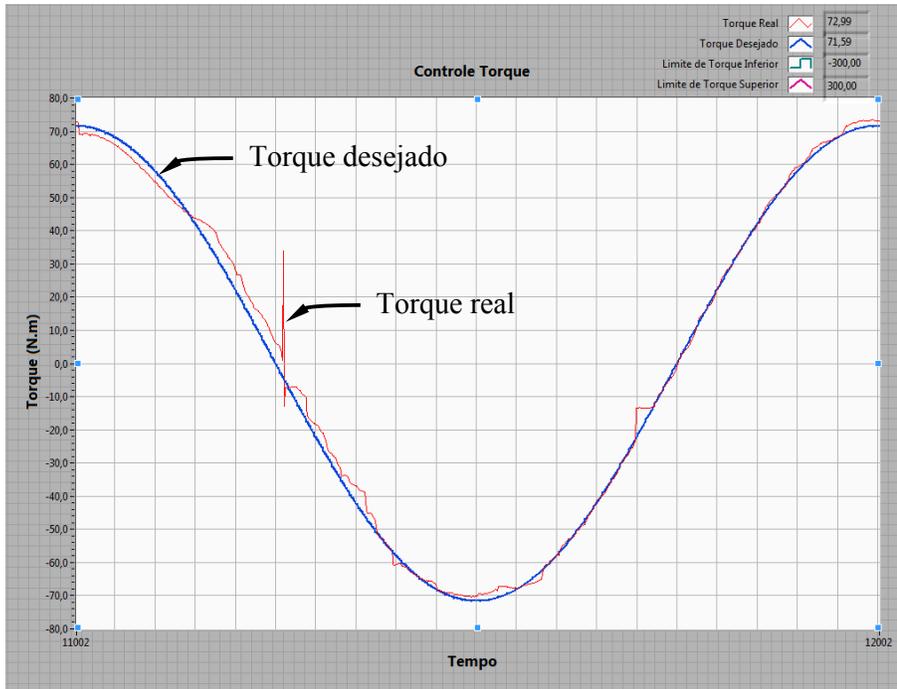


Figura 6.11 Controle de torque por modos deslizantes para torque de  $\pm 71,6$  N.m

Diante dos problemas apresentados no controle de torque, foi implementado um controle híbrido "*PID sliding control*", que combina as vantagens do controle PID e do controle por modos deslizantes, tornando-o ainda mais robusto.

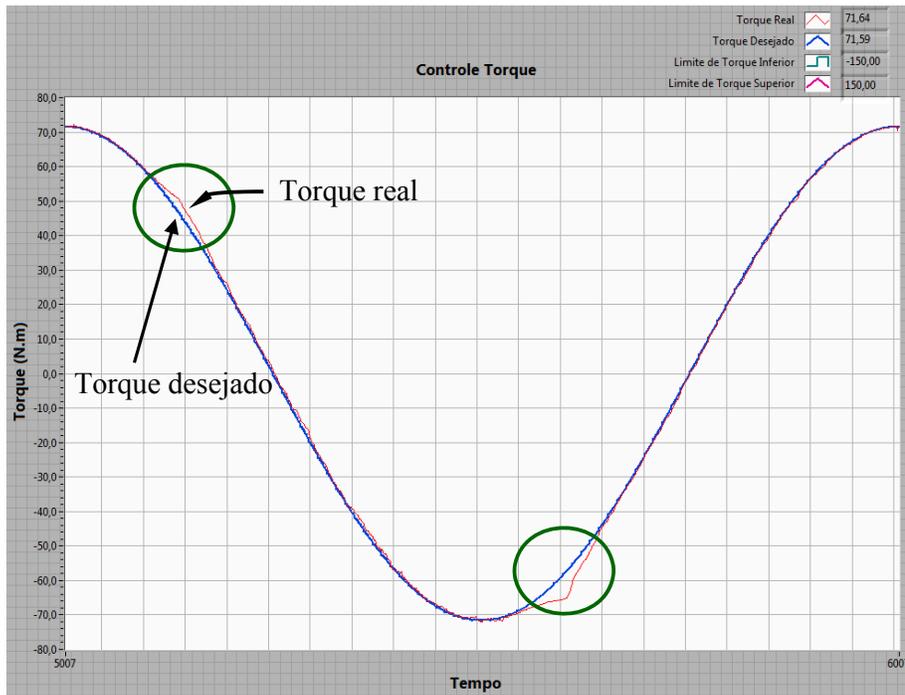


Figura 6.12 Controle *PID sliding* para um torque solicitado de  $\pm 71,6$  N.m

O controle *PID sliding* superou as oscilações e as instabilidades e conseguiu acompanhar a trajetória de torque desejada. No comportamento do controle não apresentou nenhum problema de *overshoot*, indesejado nos ensaios de fadiga. Contudo, ao se atingir o pico ou vale, apresentou um pequeno afastamento da trajetória desejada, que rapidamente foi corrigido (vide Figura 6.12). Nesta aplicação, pode-se considerar este pequeno afastamento aceitável.

Na Figura 6.13 apresenta-se o comportamento do controle de torque por *PID sliding control* para um outro valor de torque solicitado. Neste caso, trata-se de um torque solicitado a amplitude constante de  $\pm 140$  N.m, torque médio de 0 N.m com a mesma frequência de trabalho.

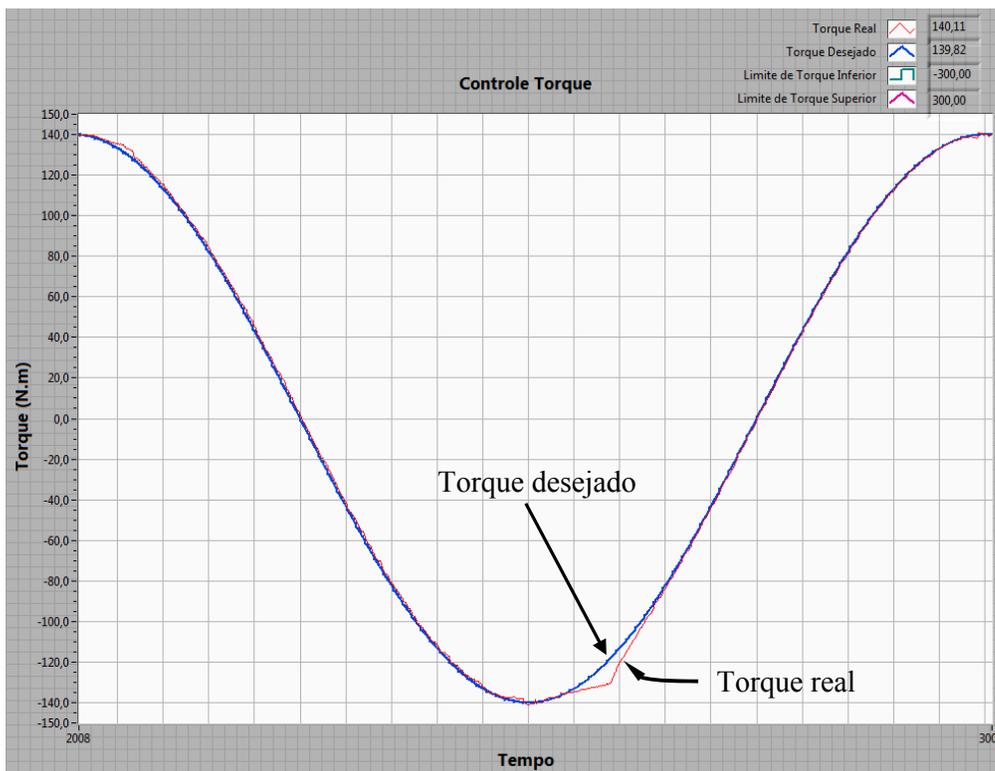
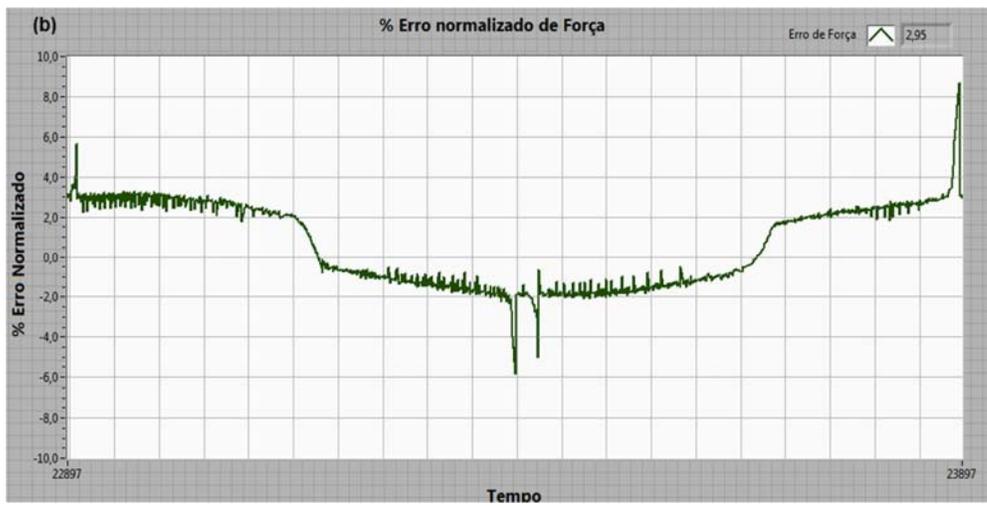
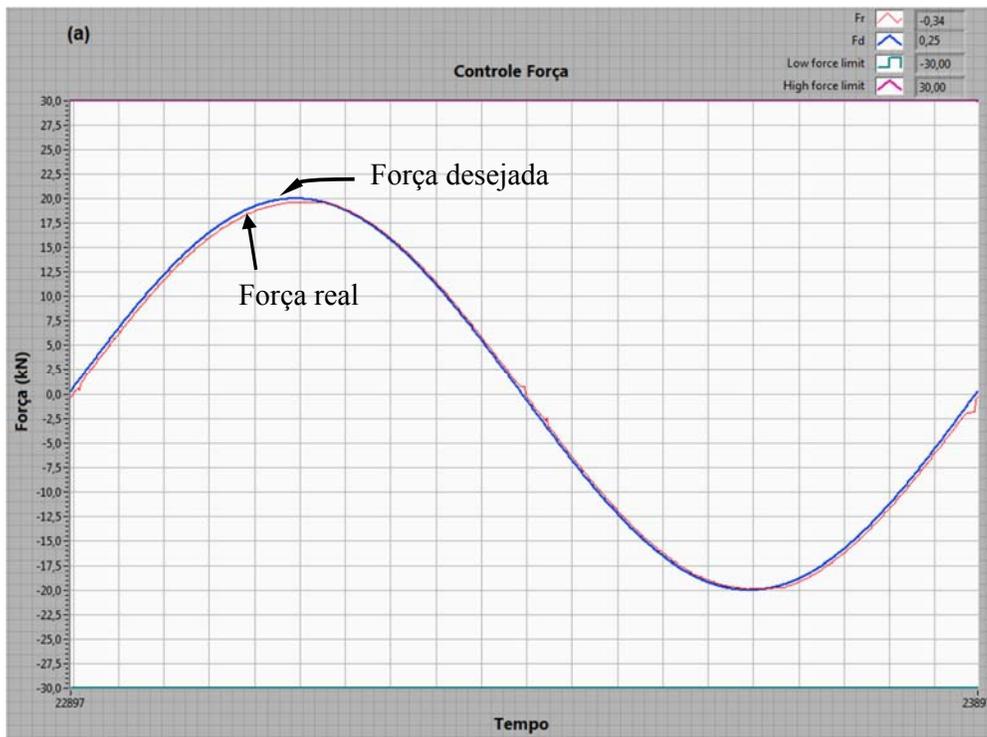


Figura 6.13 Controle *PID sliding* para um torque solicitado de  $\pm 140$  N.m

No conjunto da Figura 6.14, apresentam-se os resultados do controle de força e torque com suas trajetórias desejadas a  $90^\circ$  fora de fase, entre elas, para uma força desejada com amplitude constante de  $\pm 20$  kN e um torque desejado com uma amplitude de  $\pm 71.6$  N.m, ambas com carregamento médio igual a zero. Os valores de torque e força foram escolhidos com o objetivo de gerar a mesma tensão máxima,

tanto na tração pura quanto na torção pura.



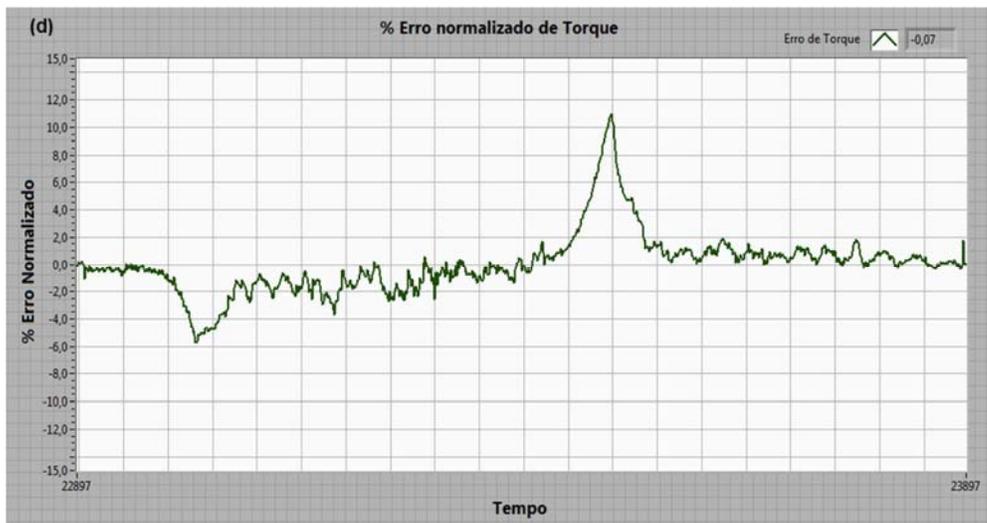
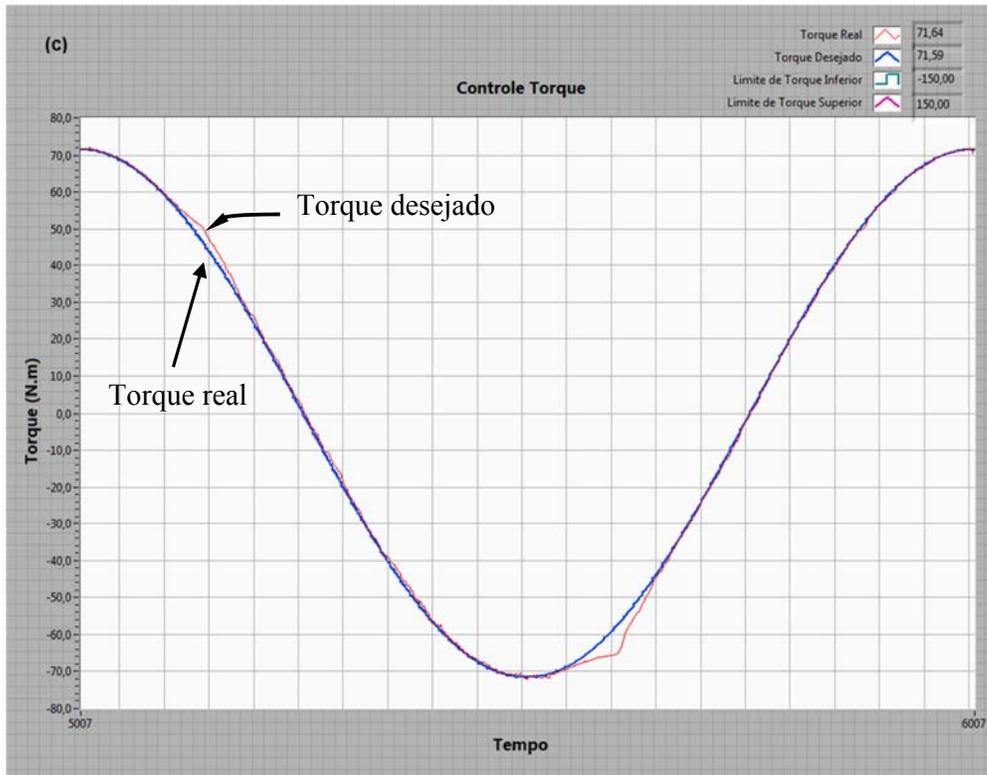


Figura 6.14 Controle de força ( $\pm 20$  kN) e do torque desejado ( $\pm 71,6$  N.m)  $90^\circ$  fora de fase

Na Figura 6.14 apresentam-se o controle de força e torque ao qual será submetido o corpo de prova no ensaio de encruamento não-proporcional. O erro normalizado da força obtida é aproximadamente de  $\pm 2\%$  e, o erro normalizado do torque (vide Figura 6.14- d) é também aproximadamente de  $\pm 2\%$ .

Para avaliar o desempenho das técnicas de controle da MTT, utilizou-se um

corpo de prova maciço com  $D = 24,8$  mm. Na Figura 6.15 apresentam-se a tensão máxima desejada de  $S_{\max} = 41,5$  MPa, sobre o corpo de prova maciço gerado pelos carregamentos apresentados na Figura 6.14.

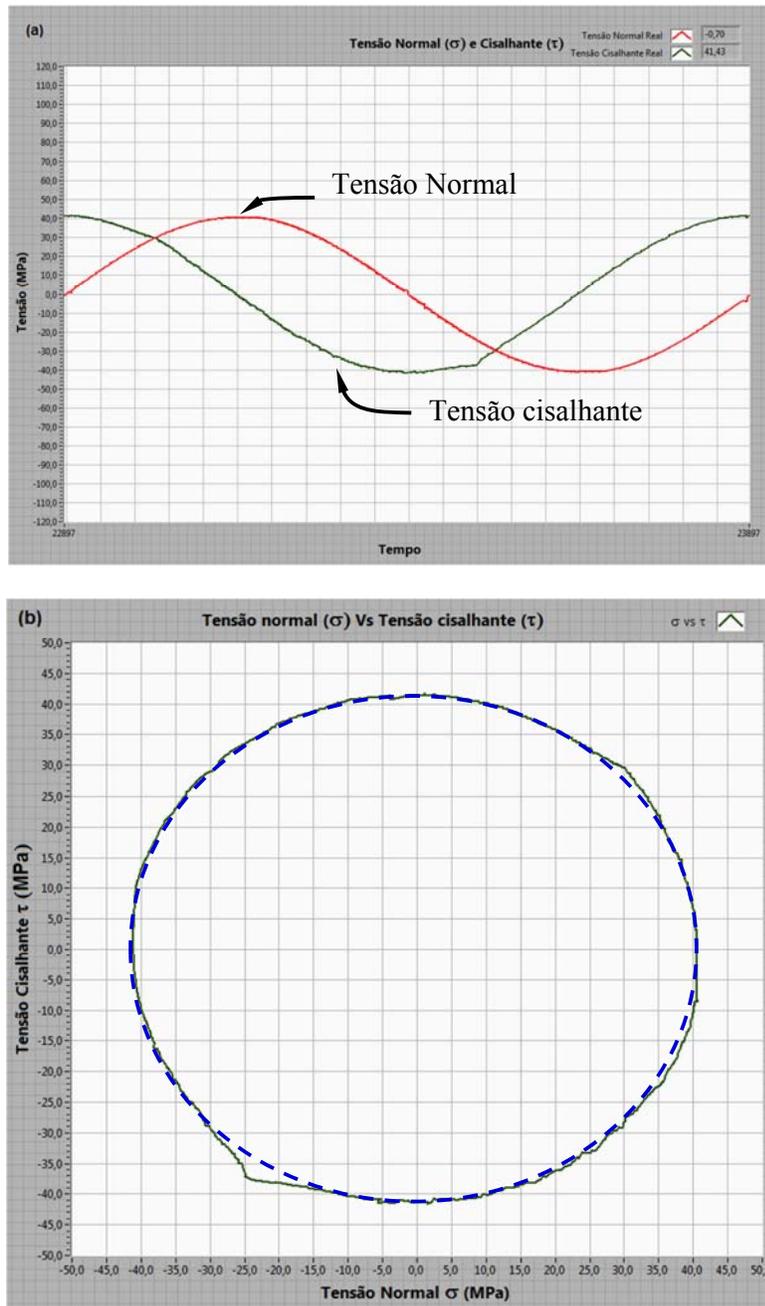
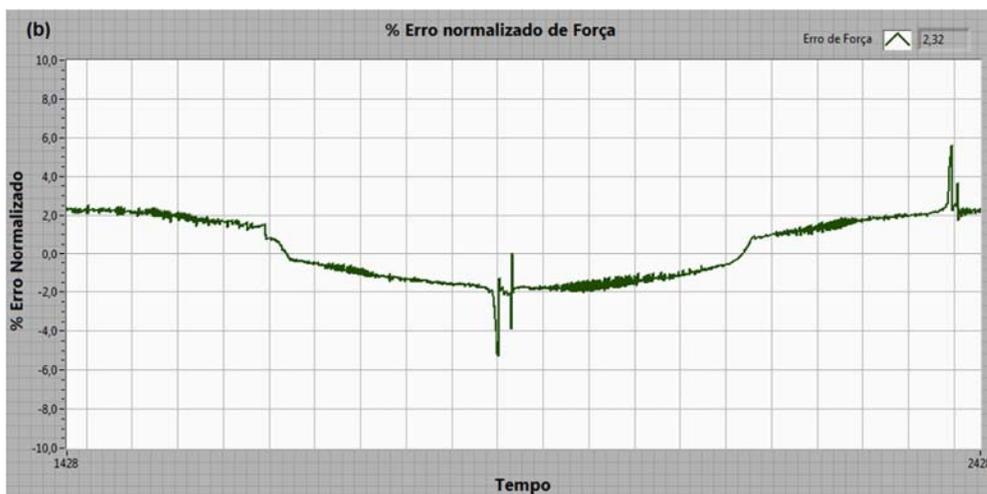
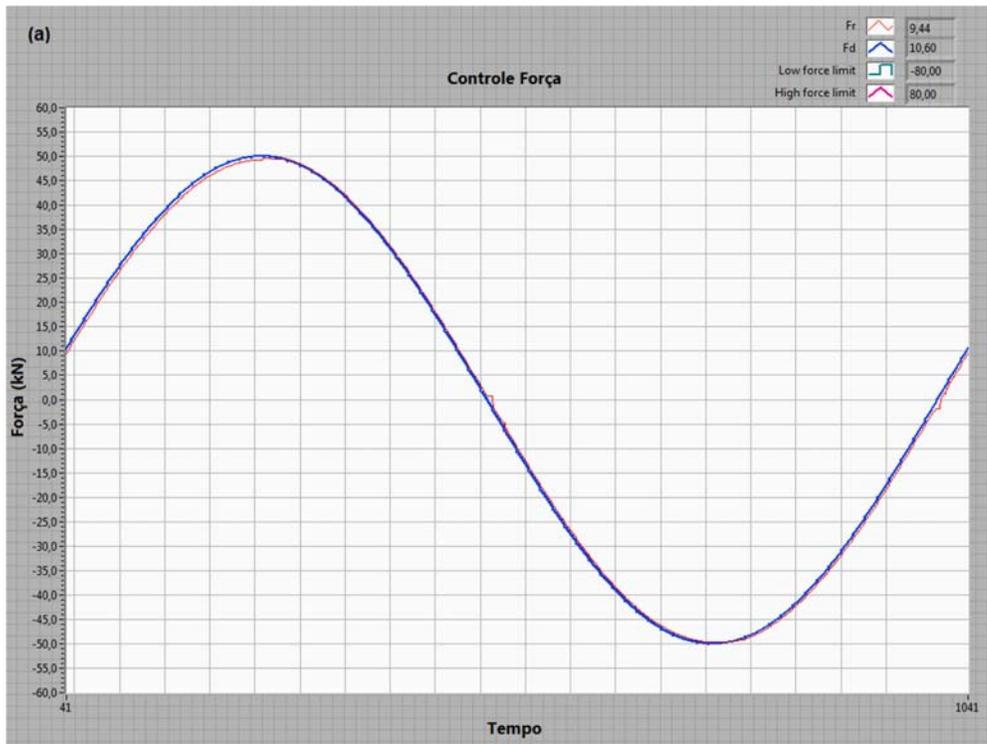


Figura 6.15 a) Tensão normal  $\sigma$  e cisalhante  $\tau\sqrt{3}$  b) Gráfico  $\sigma_x$  e  $\tau\sqrt{3}$   $90^\circ$  fora de fase

Na Figura 6.16 apresenta-se o conjunto de resultados para outra combinação de carregamentos. Neste caso, trata-se de uma força axial de amplitude  $\pm 50$  kN e

um torque desejado de  $\pm 189$  N.m, ambas com trajetória senoidal, com carga média zero e defasadas  $90^\circ$  entre elas, com erros normalizados de  $\pm 2$  %.



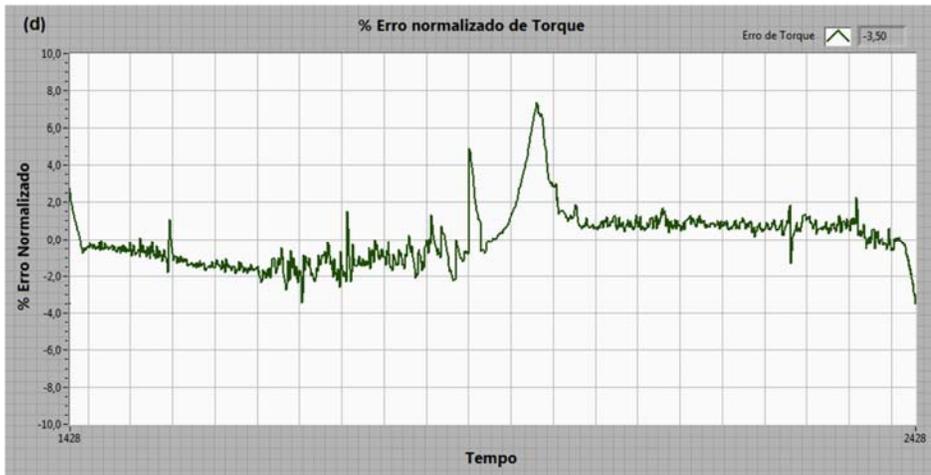
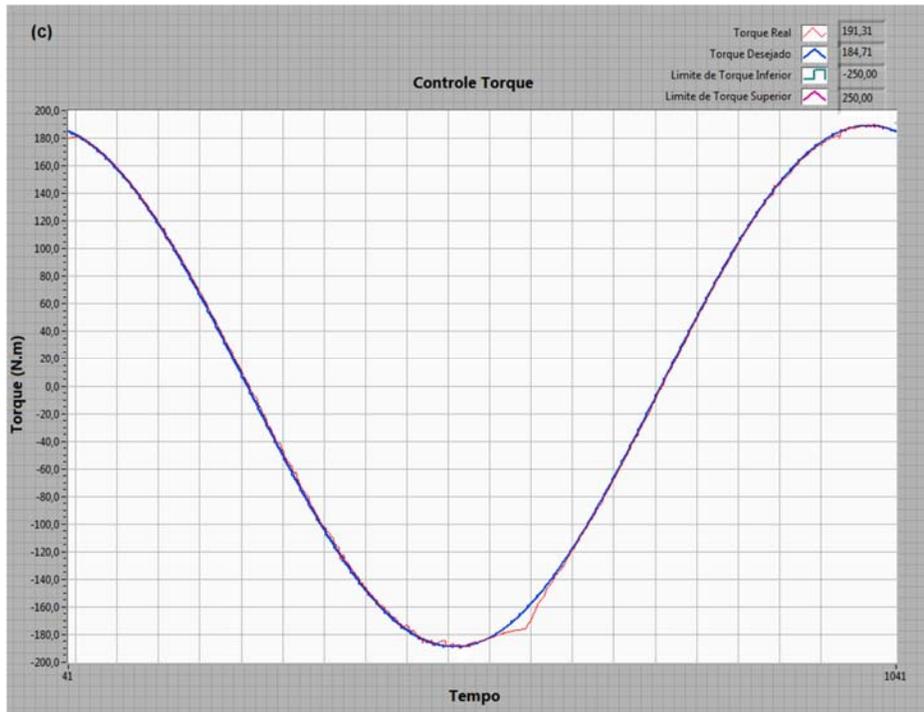


Figura 6.16 Controle de força ( $\pm 50$  kN) e do torque desejado ( $\pm 189$  N.m)  $90^\circ$  fora de fase

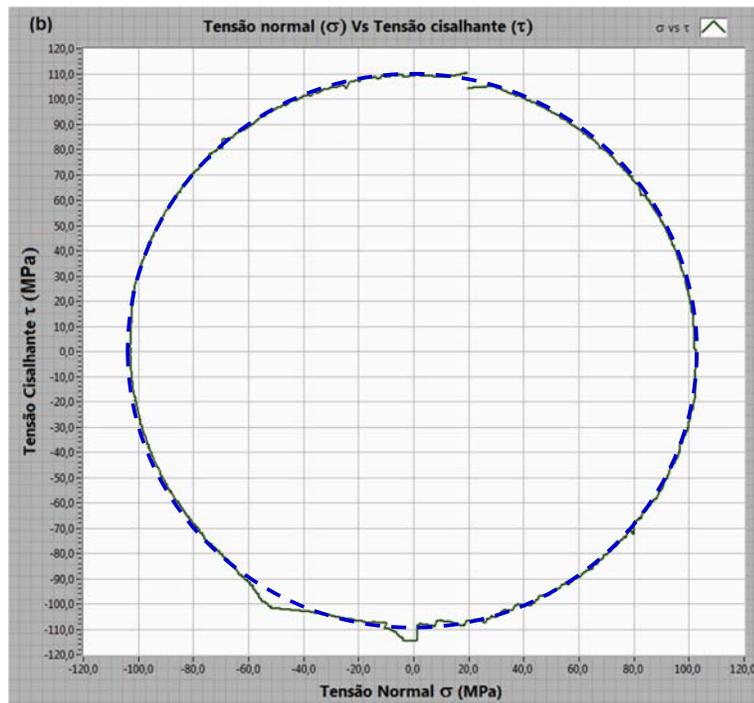
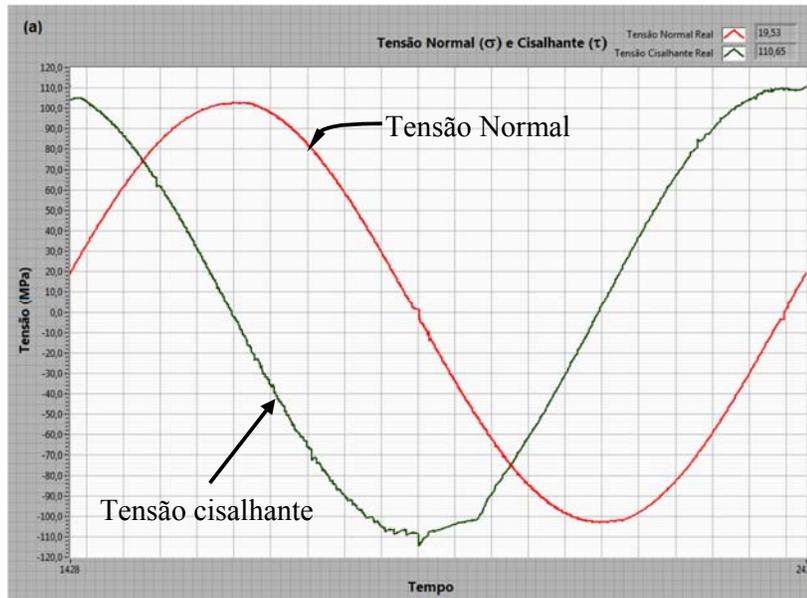


Figura 7.10 a) Tensão normal  $\sigma = 107$  MPa e cisalhante  $\tau\sqrt{3} = 107$  MPa b) Gráfico  $\sigma$  e  $\tau\sqrt{3}$   $90^\circ$  fora de fase

No próximo capítulo serão apresentados os resultados experimentais dos modelos de plasticidade incremental ensaiados na MTT.

## **7. Resultados Experimentais**

### **7.1. Introdução**

Após implementação e avaliação das técnicas de controle de força e torque, elas foram utilizadas no controle da força e do torque de acordo com as trajetórias desejadas pelos modelos de plasticidade incremental. A seguir são apresentados os resultados obtidos na avaliação experimental do modelo de fluência cíclica ou *ratcheting* e no modelo de encruamento não-proporcional.

### **7.2. Resultados experimentais do modelo de fluência cíclica (ratcheting)**

Foi avaliado experimentalmente o fenômeno de ratcheting tanto uniaxial quanto multiaxial. Foi estudado o fenômeno de *ratcheting* uniaxial para aço 1020 e para o alumínio 6351T6. Finalmente foi estudado o fenômeno de *ratcheting* multiaxial no alumínio 7075.

#### **7.2.1. Determinação das propriedades do aço 1020 e alumínio 6351T6**

Para determinar a resistência ao escoamento  $S_y$  e a resistência ruptura  $S_R$  foi realizado um teste de tração. A partir dos dados obtidos da curva  $\sigma_x \times \varepsilon_x$  foram determinados os coeficientes  $H, h$  da curva  $\sigma_x \times \varepsilon_x$  monotônica do modelo de encruamento da equação de Ramberg-Osgood.

Na Figura 7.1 apresenta-se a curva  $\sigma_x \times \varepsilon_x$  obtida no ensaio de tração tanto para o aço 1020 quanto para o alumínio 6351T6.

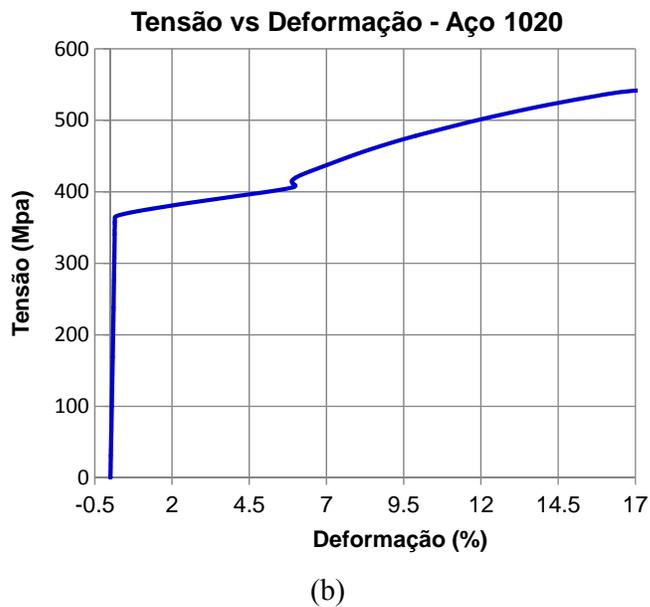
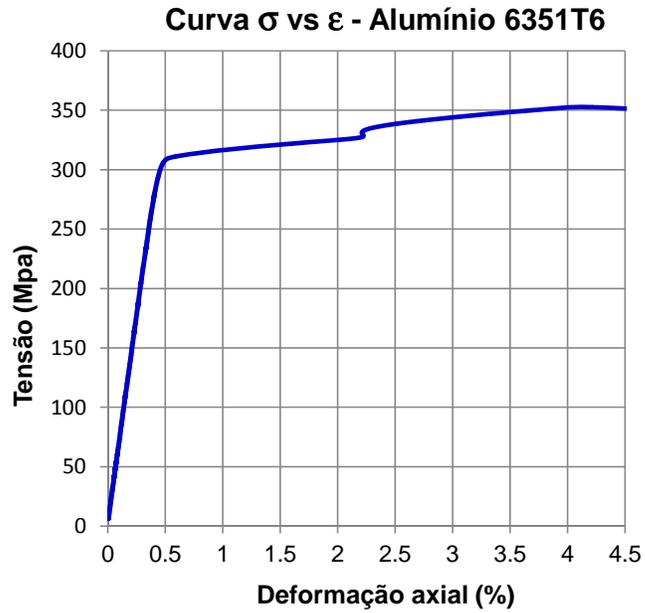


Figura 7.1 Curva  $\sigma_x$  x  $\varepsilon_x$  (a) Alumínio 6351T6 e (b) Aço 1020

A partir da curva  $\sigma_x$  x  $\varepsilon_x$  apresentada na Figura 7.1 a) foi determinada a resistência ao escoamento  $S_y = 310$  MPa,  $E_{al} = 69,6$  GPa e  $S_R = 352$  MPa para o alumínio 6351T6. Para o aço 1020 (vide figura 7.1 b), tem-se  $S_y = 365$  MPa,  $E_{aço} = 210$  GPa e  $S_R = 542$  MPa.

Os coeficientes de encruamento da equação de Ramberg-Osgood monotônico H e h são obtidos ajustando-se a uma reta os dados  $\sigma_x \times \epsilon_{pl}$  plotados em log-log, como se apresenta na Figura 7.2 para o Alumínio 6351T6.

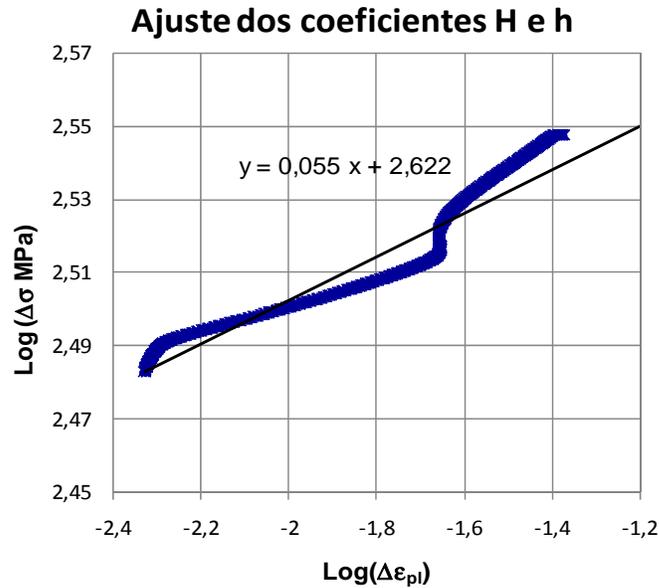


Figura 7.2 Ajuste do coeficiente H e do expoente h do Al-6351T6

A inclinação da reta ajusta e representa o expoente  $h = 0,055$  e seu coeficiente linear  $\log(H) = 2,622$ . Portanto, tem-se  $H = 420$  MPa. Na Figura 7.3 apresenta-se a curva  $\sigma_x \times \epsilon_x$ , obtida no teste de tração e na curva monotônica  $\sigma_x \times \epsilon_x$ , modelada pela equação de Ramberg-Osgood.

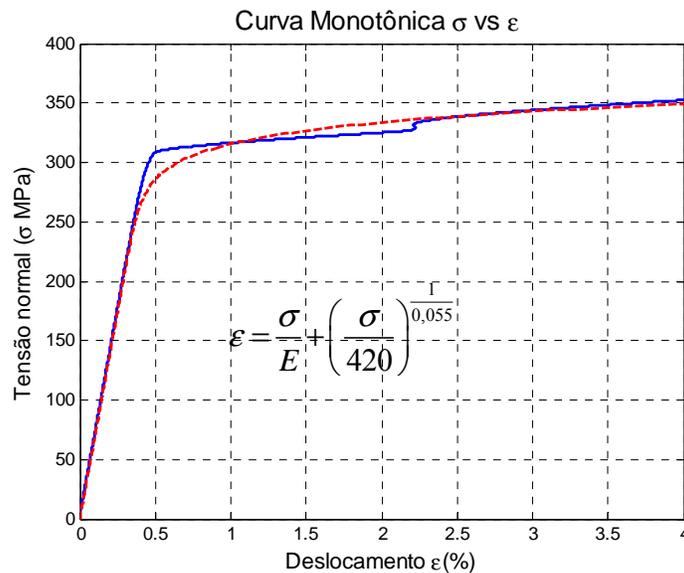
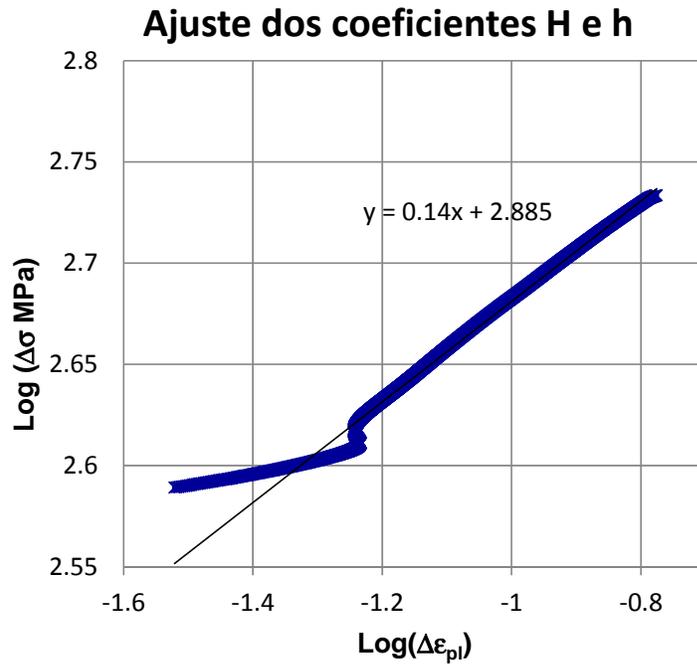
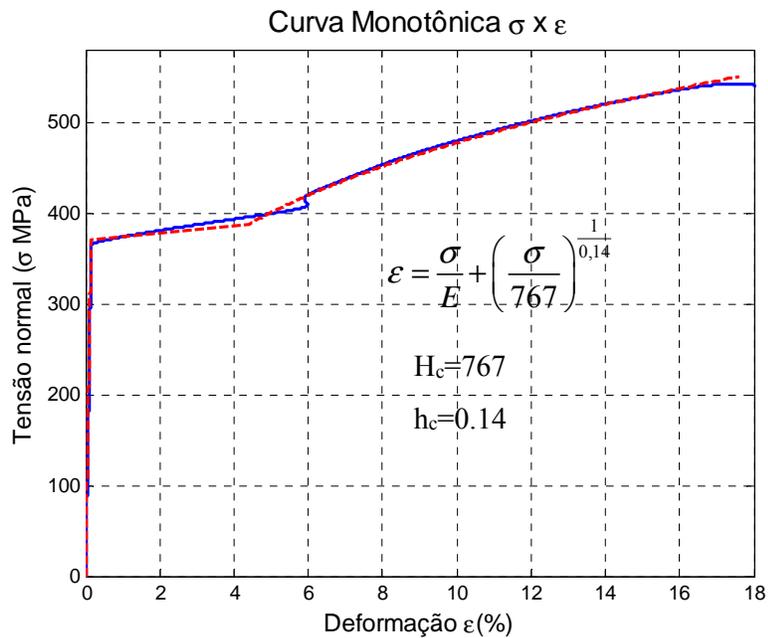


Figura 7.3 Curva monotônica do Al-6351T6

Na Figura 7.4 apresenta-se o ajuste dos parâmetros de encruamento H e h para os dados obtidos a partir da curva  $\sigma_x \times \varepsilon_x$  para o aço 1020.



(a)



(b)

Figura 7.4 Curva monotônica do Aço 1020

A partir do ajuste apresentado na Figura 7.4 a) determinou-se o coeficiente de encruamento  $H = 767$  MPa e, o expoente de encruamento  $h = 0,14$ .

### 7.2.2. Fluência cíclica (*Ratcheting*) uniaxial

Nesta seção apresenta-se o comportamento do aço 1020 e do alumínio 6351T6, submetido a um teste de carregamento cíclico com amplitude constante e média diferente de zero para observar "*ratcheting* uniaxial". Na literatura, muitos trabalhos têm mostrado que a maioria dos metais experimentam endurecimento ou amolecimento para um número de ciclos antes de estabilizar, e demonstraram que este comportamento tem uma forte influência na taxa de *ratcheting* sob carregamento cíclico, em controle de carga, com carregamento médio diferente de zero. Segundo Hassan e Kyriakides [46,47] recomendam submeter inicialmente o corpo de prova maciço a um ensaio  $\epsilon N$ , sob controle da deformação, a baixa frequência no mínimo por 12 ciclos, para garantir que estabilizou. Este procedimento é feito com a finalidade de minimizar efeitos do encruamento isotrópico no fenômeno de *ratcheting*. Os ensaios foram realizados em corpos de prova maciço com diâmetro de  $\phi = 10$  mm e comprimento de  $l = 125$  mm. Segundo esta metodologia, os corpos de prova foram inicialmente submetidos a um ensaio  $\epsilon N$  em controle de deformação ( $\epsilon_a = \Delta\epsilon / 2 = 2\%$ ) até obter laços de histerese elastoplásticos estabilizados (vide Figura 7.5).

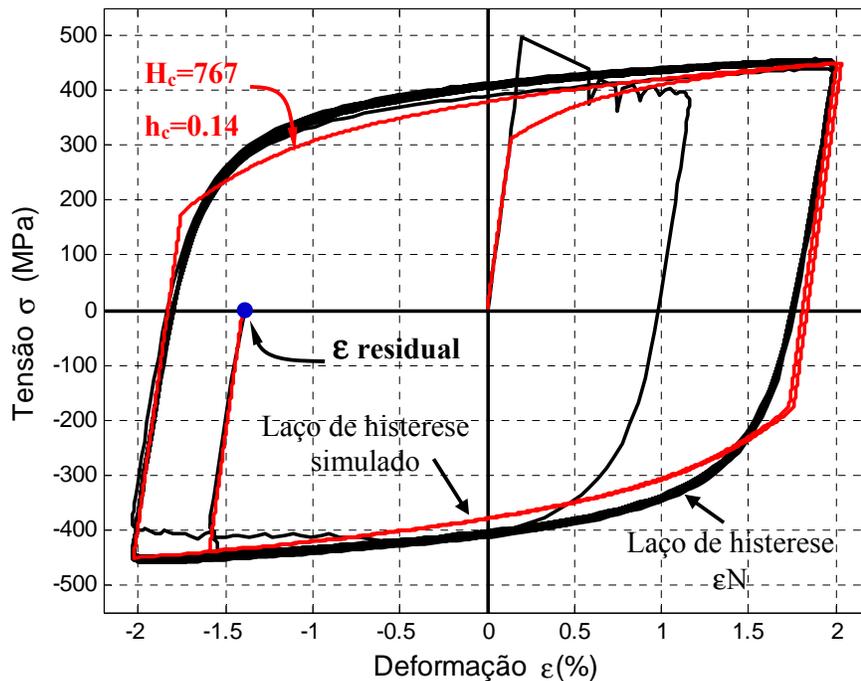


Figura 7.5 Laço estabilizado, sob o controle de deformação de  $\Delta\epsilon = \pm 2\%$

Na Figura 7.5 mostra-se o laço de histerese do aço 1020 estabilizado, após 20 ciclos, para uma amplitude de  $\Delta\varepsilon = \pm 2\%$ . A linha mais clara representa o laço de histerese simulado, e o ponto no eixo horizontal representa a deformação residual.

Posteriormente, o corpo de prova é submetido a um carregamento cíclico com amplitude  $\sigma_a = 275$  MPa e uma carga média  $\sigma_m = 75$  MPa, sob o controle de carga, que inicia com uma deformação negativa devido à deformação residual do ensaio anterior, como se apresenta na Figura 7.6.

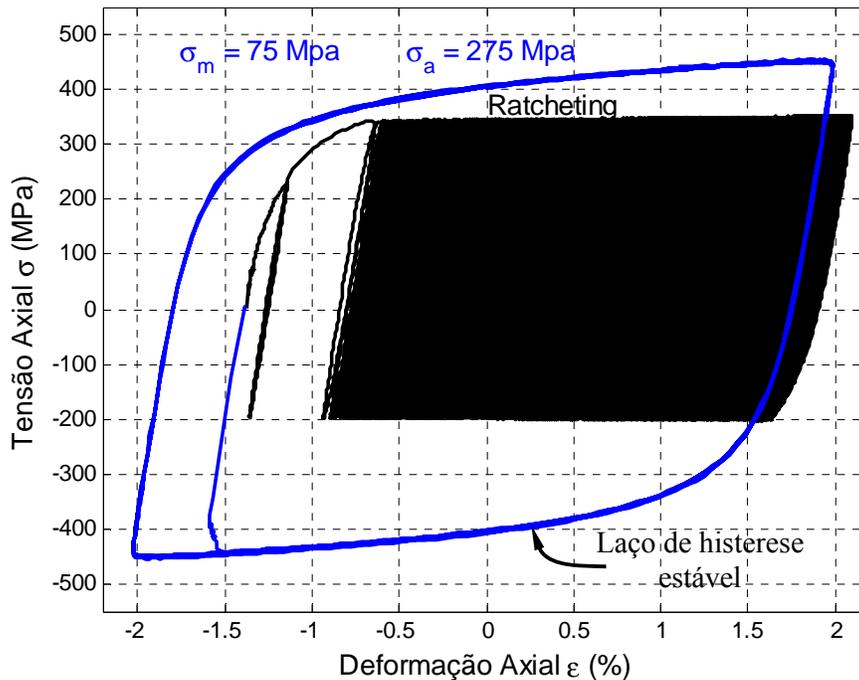


Figura 7.6 Condição inicial para o ensaio de ratcheting uniaxial

Na Figura 7.7 mostra-se o comportamento do fenômeno de fluência cíclica (ratcheting) do aço 1020 para 50 ciclos. O sistema de controle da INSTRON ajustou o valor do carregamento para manter constante a frequência do ensaio. A deformação de *ratcheting* aumenta a cada ciclo e, dependendo dos níveis de carga, pode-se incrementar exponencialmente, até levar à falha em um número relativamente baixo de ciclos.

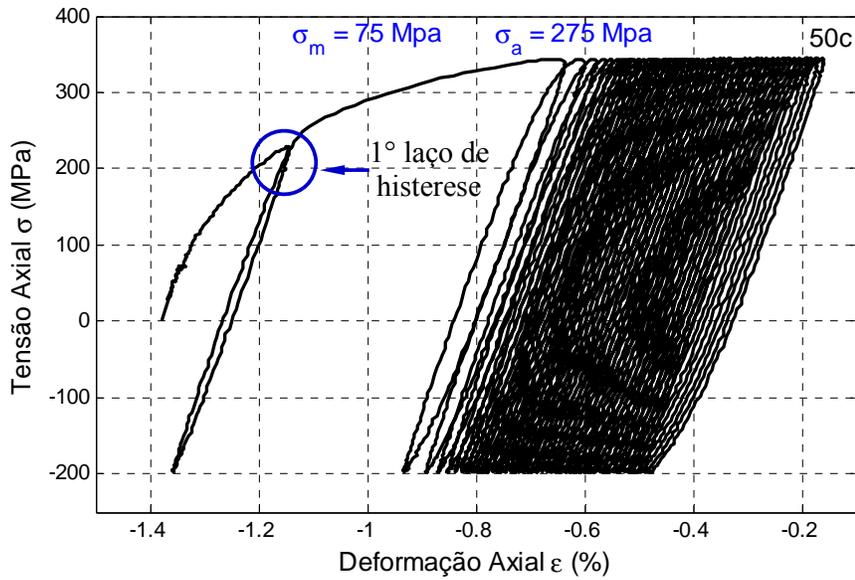


Figura 7.7 Comportamento de fluência cíclica (ratcheting) do aço 1020.

Na Figura 7.8 apresenta-se o comportamento do fenômeno de ratcheting do aço 1020 para 100 ciclos, onde a linha contínua representa a curva obtida pelo simulador, junto com os pontos obtidos experimentalmente. Mostra-se que o simulador modela razoavelmente bem o comportamento do ratcheting uniaxial para os 70 primeiros ciclos, adotando  $H_c=767$  Mpa,  $h_c=0,14$ , e  $b_c=10$  no modelo de Jiang.

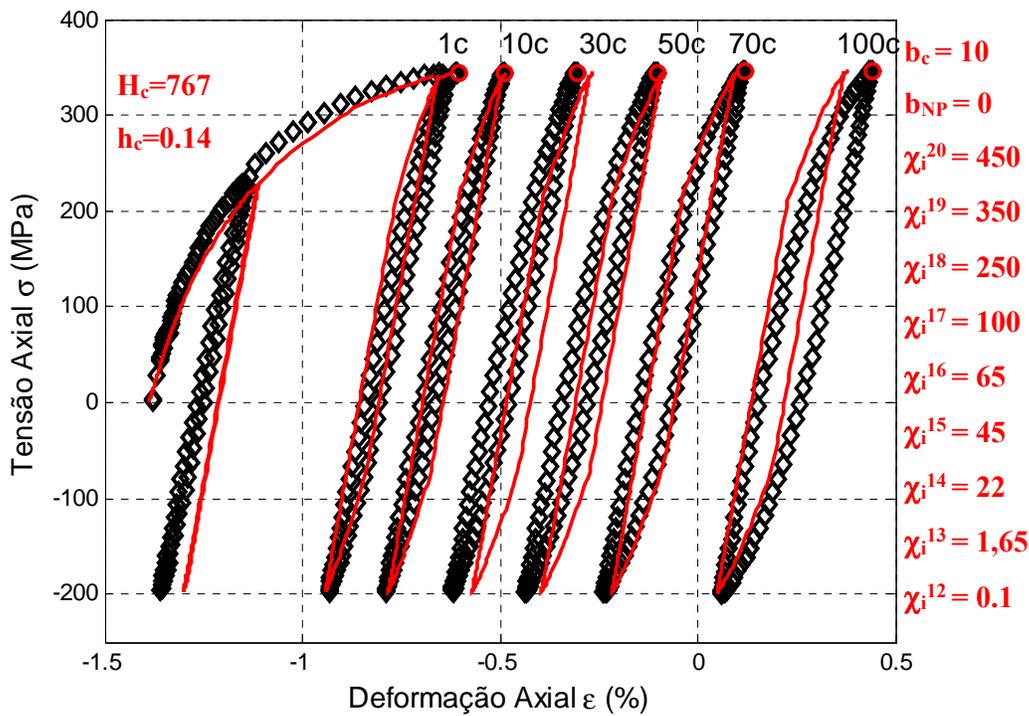


Figura 7.8 Laços de histerese gerados por ratcheting uniaxial em aço 1020.

Os coeficientes de ratcheting utilizados pelo simulador foram  $\chi^j = [450, 350, 250, 100, 65, 45, 22, 1.65, 0.1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$ , ajustados levando-se em consideração as recomendações citadas por Jiang [48, 49], e utilizando  $M=15$  superfícies de encruamento e escoamento.

Na Figura 7.9 mostra-se a taxa de deformação de ratcheting  $\mathcal{E}_r$  em função do número de ciclos. A deformação de *ratcheting*  $\mathcal{E}_r$  é definida como a média entre a deformação axial máxima e a deformação axial mínima [50] a cada ciclo. A linha contínua representa a taxa de deformação de ratcheting obtida pelo simulador, junto com os pontos obtidos experimentalmente.

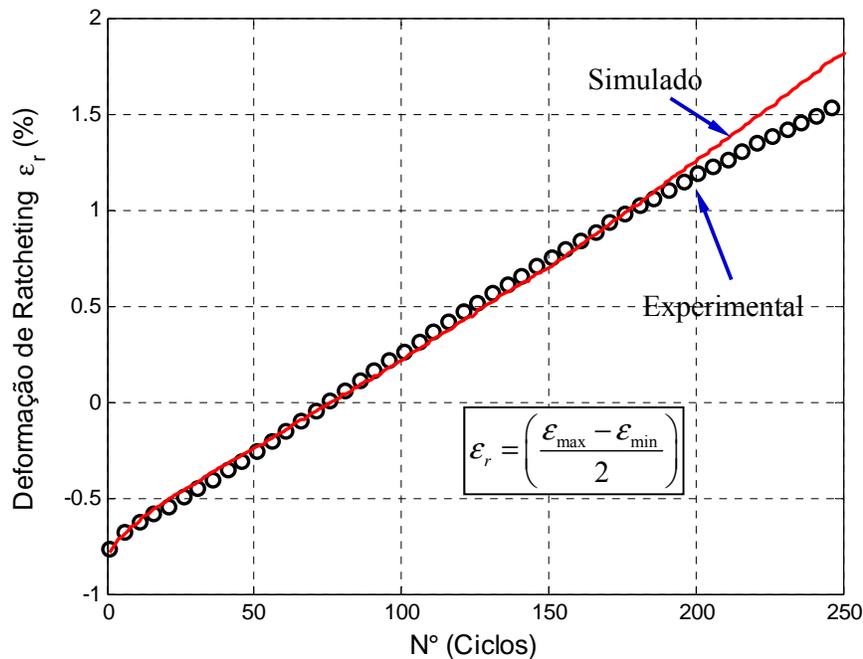


Figura 7.9 Deformação de ratcheting acumulada do aço 1020.

Na Figura 7.10 apresenta-se a taxa de variação da deformação de ratcheting  $\varepsilon'_r$  em função do número de ciclos, a qual após 250 ciclos convergiu para uma taxa de  $\mu(\varepsilon'_r) = 0,008 \%$ . A linha escura representa a taxa de deformação de ratcheting experimental e a linha de clara a taxa de ratcheting simulada. Mostra-se que, após 200 ciclos, a taxa de variação da deformação de ratcheting simulado é maior que a experimental.

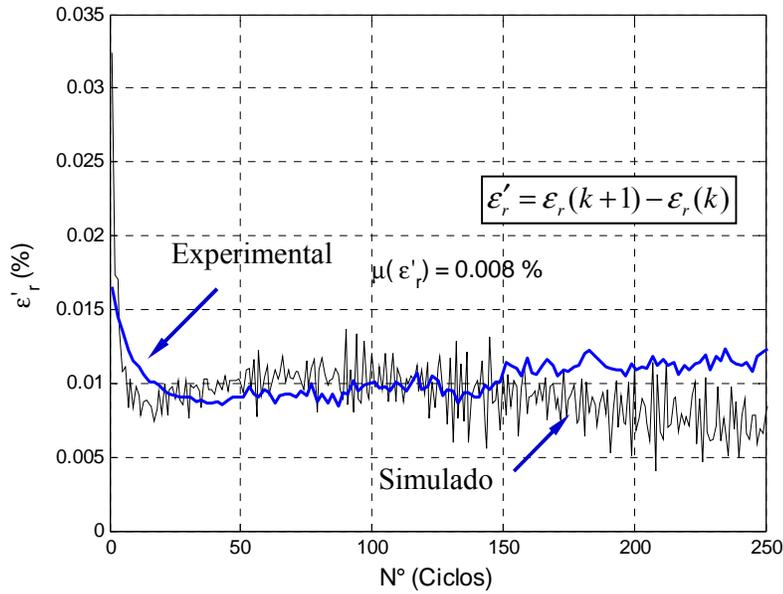


Figura 7.10 Taxa de deformação de ratcheting do aço 1020.

Um outro material utilizado para estudar o fenômeno de ratcheting uniaxial foi o alumínio 6351T6. O corpo de prova inicialmente também foi submetido a um ensaio  $\epsilon N$ , sob o controle da deformação ( $\epsilon_a = \Delta\epsilon / 2 = 1\%$ ), até obter-se o laço de histerese estabilizado (vide Figura 7.11)

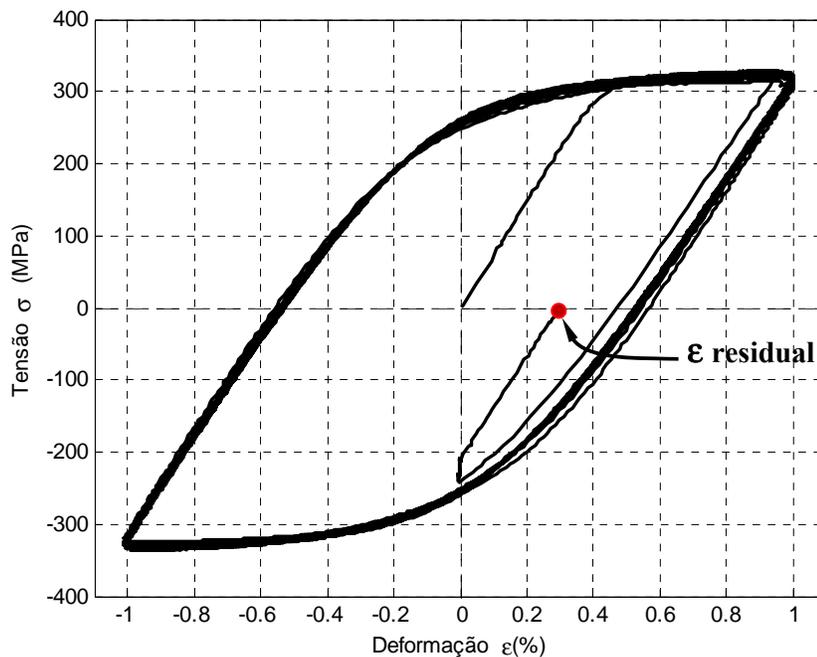


Figura 7.11 Laço de histerese estabilizado do Alumínio 6351T6

Na Figura 7.11, o ponto no eixo horizontal indica a tensão residual após obter o laço de histerese estabilizado no ensaio  $\epsilon N$ .

Em seguida, o corpo de prova de alumínio foi submetido a um carregamento cíclico, com amplitude de  $\sigma_a = 263$  MPa e carga média  $\sigma_m = 53$  MPa, sob controle de carga. Na Figura 7.12 apresenta-se a condição inicial para o ensaio ratcheting uniaxial do Alumínio 6351T6, onde os pontos representam o laço de histerese estabilizado e a linha contínua o laço de histerese gerado pelo carregamento aplicado durante o ensaio de ratcheting uniaxial. A deformação de ratcheting inicia a partir da deformação residual  $\epsilon_{residual} \cong 0.3\%$  (vide Figura 7.12)

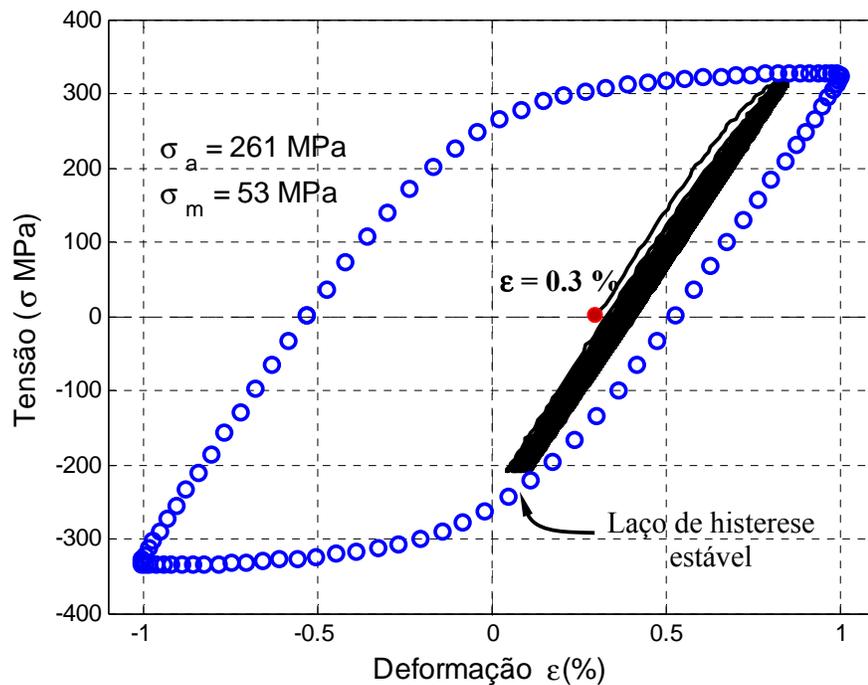


Figura 7.12 Condição inicial para o ensaio de ratcheting uniaxial do Al-6351T6

Na Figura 7.13, apresenta-se o comportamento da deformação de ratcheting nos primeiros 300 ciclos para o carregamento  $\sigma = 53 \pm 261$  MPa aplicado. A deformação de ratcheting inicia a partir da  $\epsilon = 0.3\%$  residual e aumenta a cada ciclo, até se estabelecer em uma deformação ratcheting  $\epsilon_r = 0.475\%$

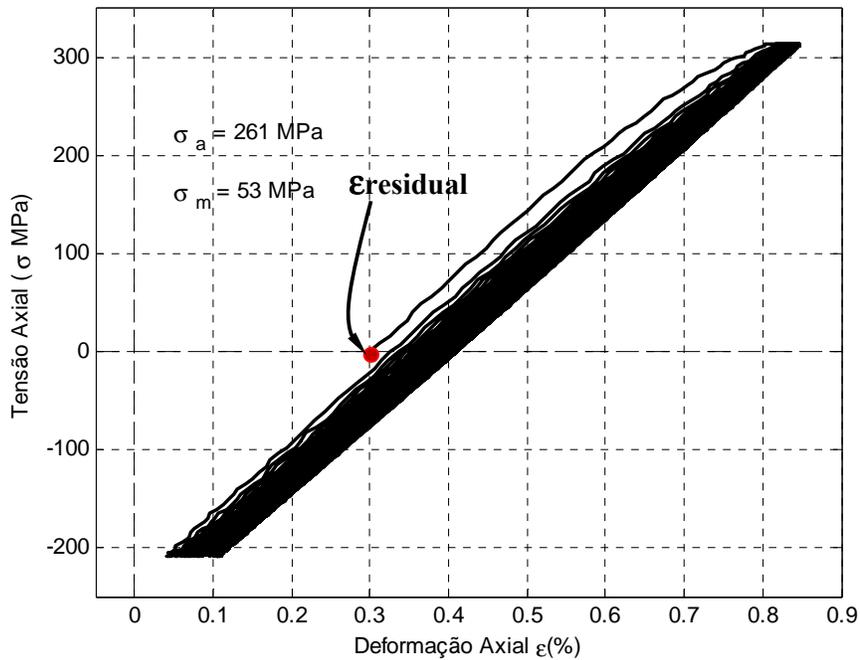


Figura 7.13 Ensaio de ratcheting uniaxial Al-6351T6 com  $\sigma_a = 261$  MPa.

Na figura 7.14 apresenta-se a cada ciclo o incremento de deformação devido a ratcheting para o carregamento aplicado. Após 100 ciclos houve estabilização, sem gerar mais incremento de deformação.

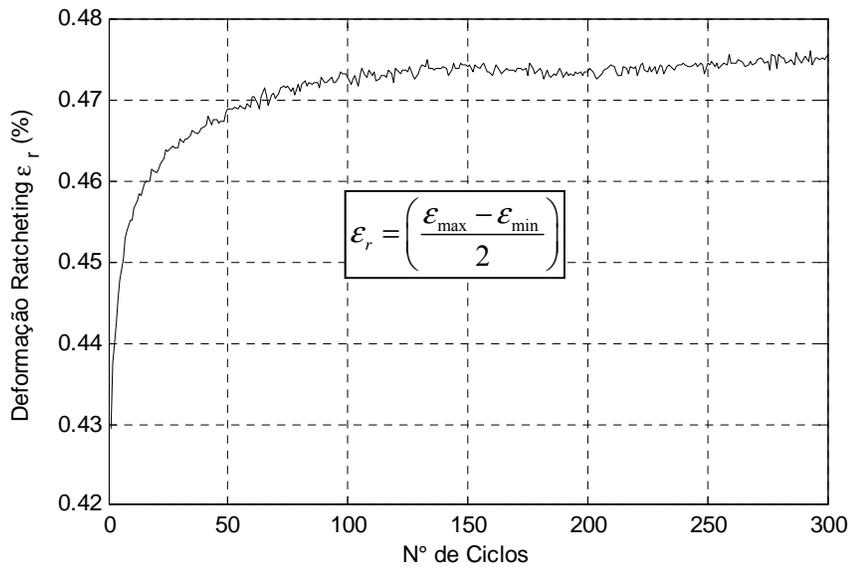


Figura 7.14 Deformação de ratcheting acumulada para o Al-6351T6

A Figura 7.15 apresenta-se a taxa de deformação de ratcheting para o carregamento aplicado, que após 100 ciclos convergiu para zero.

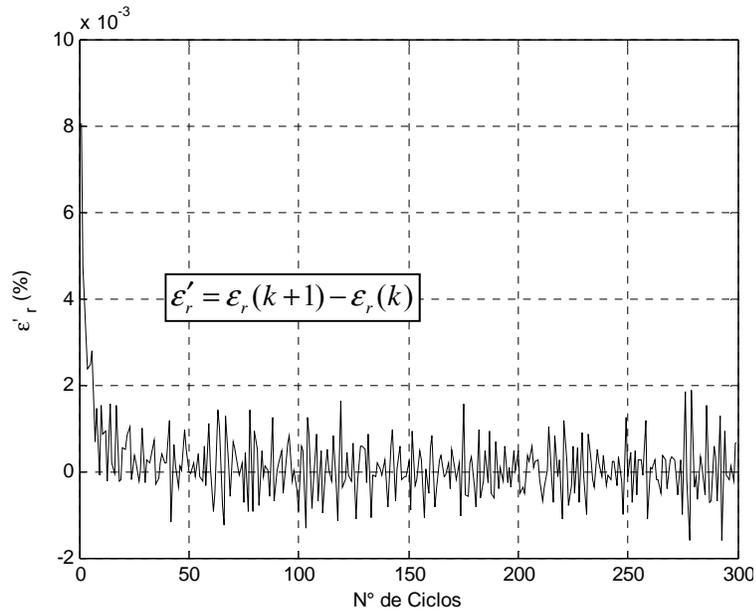


Figura 7.15 Taxa de deformação de ratcheting para  $\sigma_a = 261$  MPa

Aumentou-se a amplitude do carregamento para  $\sigma_a = 285$  MPa e o carregamento médio foi mantido constante. A Figura 7.16 mostra os laços de histerese durante o ensaio de ratcheting, onde pode-se observar que nos picos dos laços a deformação aumenta a cada ciclo.

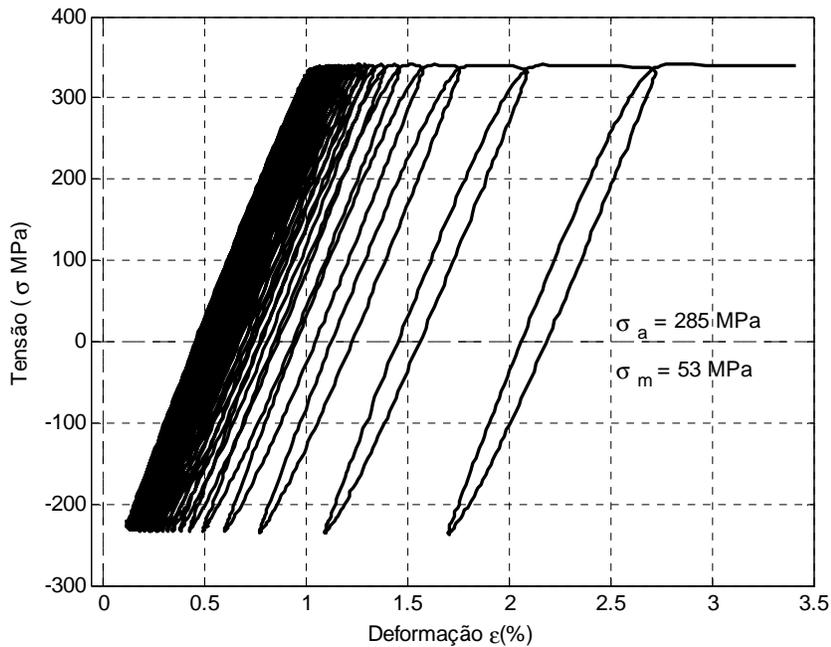


Figura 7.16 Ensaio de ratcheting uniaxial do Al-6351T6 com  $\sigma_a = 285$  MPa

Na Figura 7.17 mostra-se o incremento da deformação de ratcheting para o

novo carregamento. A cada ciclo, a deformação de ratcheting acelera até fraturar o corpo de prova.

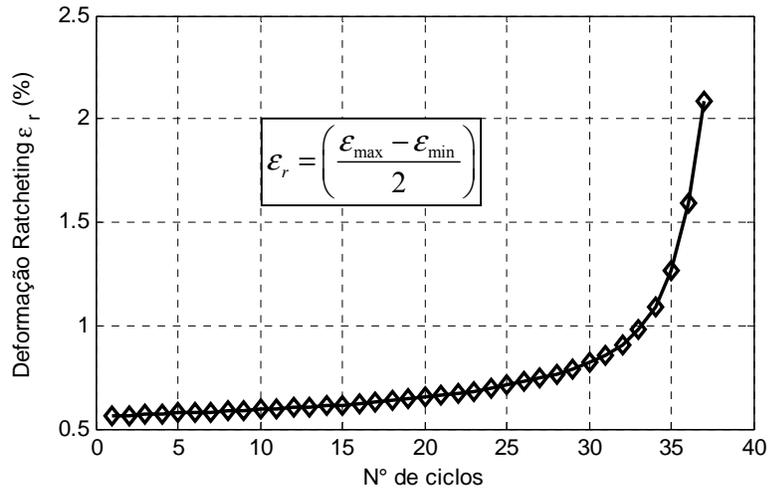


Figura 7.17 Deformação de ratcheting uniaxial acumulada

Na Figura 7.18, mostra-se a taxa de incremento da deformação de ratcheting  $\varepsilon'_r$  para o carregamento aplicado  $\sigma = 53 \pm 285$  MPa, onde a taxa de deformação  $\varepsilon'_r$  aumenta após cada ciclo, até fraturar o corpo de prova.

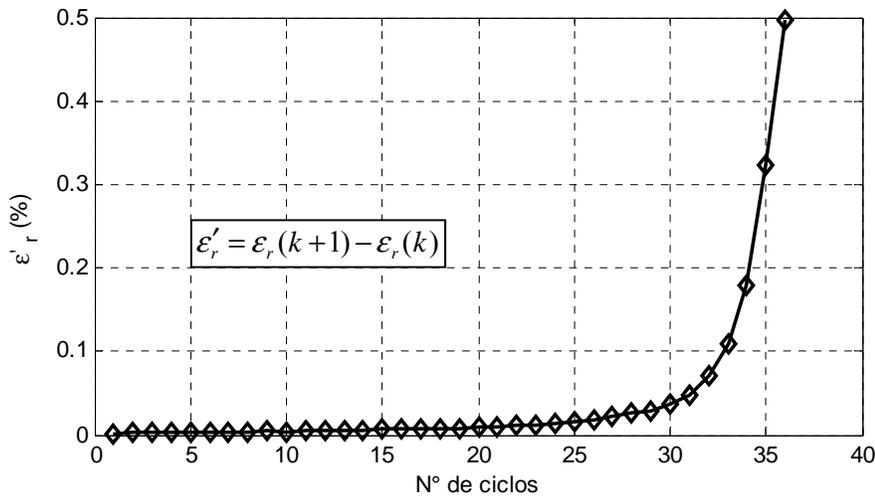


Figura 7.18 Taxa de incremento da deformação de ratcheting

### 7.2.3. Fluência cíclica (*Ratcheting*) multiaxial

Nesta seção apresenta-se o comportamento do alumínio 6351T6, submetido a um ensaio de ratcheting multiaxial, o qual consiste em submeter o corpo de prova a uma carga trativa constante (perto da resistência ao escoamento) e uma torção

cíclica com amplitude suficientemente grande para produzir deformação plástica a cada ciclo. Os ensaios foram realizados em corpos de prova tubulares com diâmetro externo  $\phi_e = 10$  mm, diâmetro interno de  $\phi_i = 8.4$  mm e comprimento  $l = 140$  mm (vide Figura 7.19).

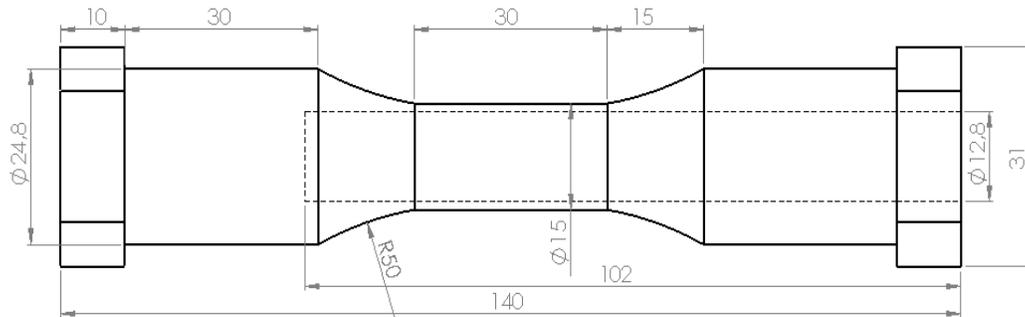


Figura 7.19 Corpo de prova Tubular ratcheting multi-axial

Inicialmente determinaram-se as propriedades do alumínio, a partir da curva  $\sigma_x \varepsilon$  conforme se apresenta na Figura 7.20. Os ensaios de ratcheting multi-axial foram feitos na MTT e as deformações ( $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  e  $\gamma_{xy}$ ) foram medidas pelo módulo de correlação de imagens VIC-3D da *Correlated Solutions*.

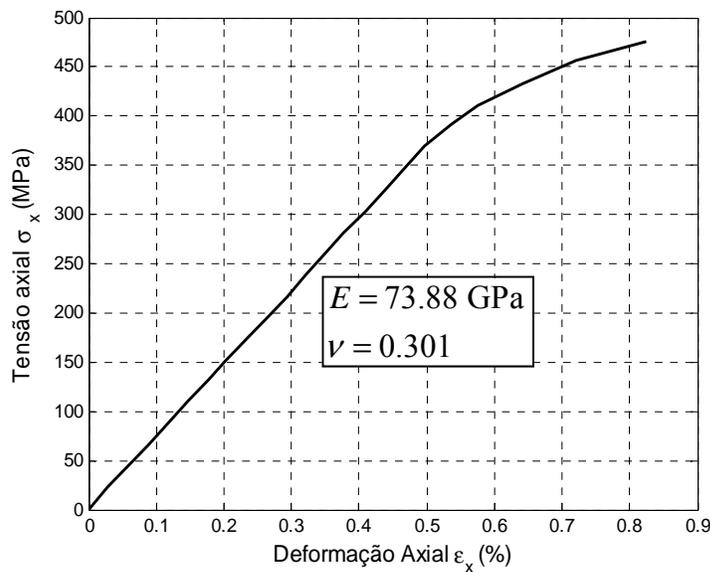


Figura 7.20 Determinação das propriedades do Alumínio 6351Tx

No primeiro ensaio, o corpo de prova foi submetido a uma tensão axial constante ( $\sigma_x = 430$  MPa) e a um torçor de  $\pm 10$  N.m que gerou uma deformação cisalhante de  $\gamma_{xy} = \pm 0,195\%$  (vide Figura 7.21).

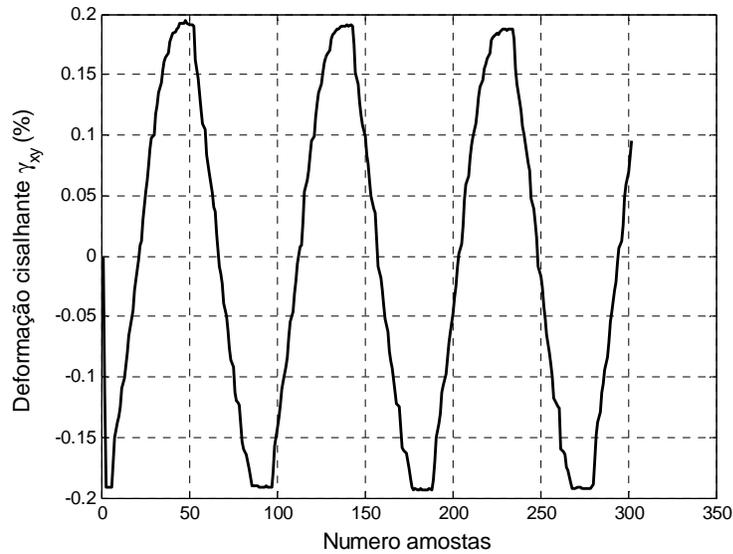


Figura 7.21 Deformação cisalhante gerada pelo Torçor cíclico

A carga axial ( $\sigma_x = 430$  MPa) aplicada gerou uma deformação axial de ( $\varepsilon_x = 0.61$  %) que foi mantida constante, ao longo do ensaio, sem sofrer incremento de deformação devido ao torçor cíclico, como apresenta-se na Figura 7.22.

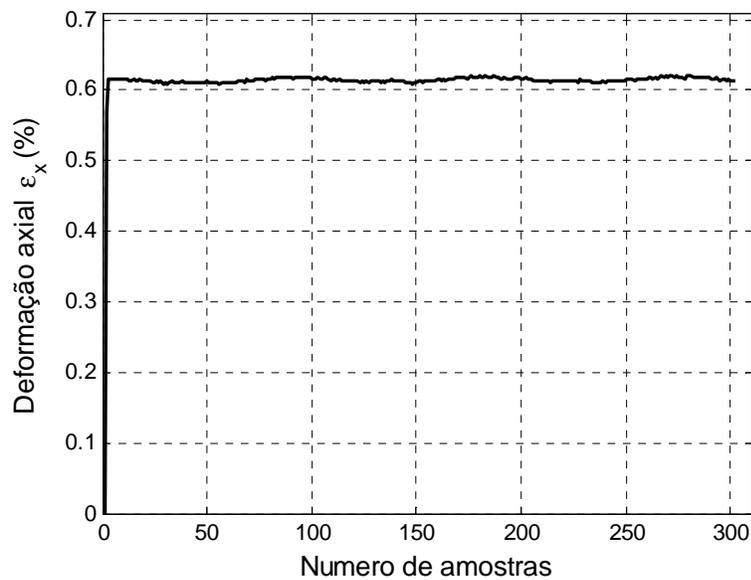


Figura 7.22 Comportamento da deformação axial - Ratcheting multiaxial

O momento torçor cíclico aplicado gerou uma deformação cisalhante de  $\gamma_{xy} = \pm 0,195\%$ , sem gerar aumento da deformação axial, devido ao ratcheting multiaxial, como se apresenta na Figura 7.23.

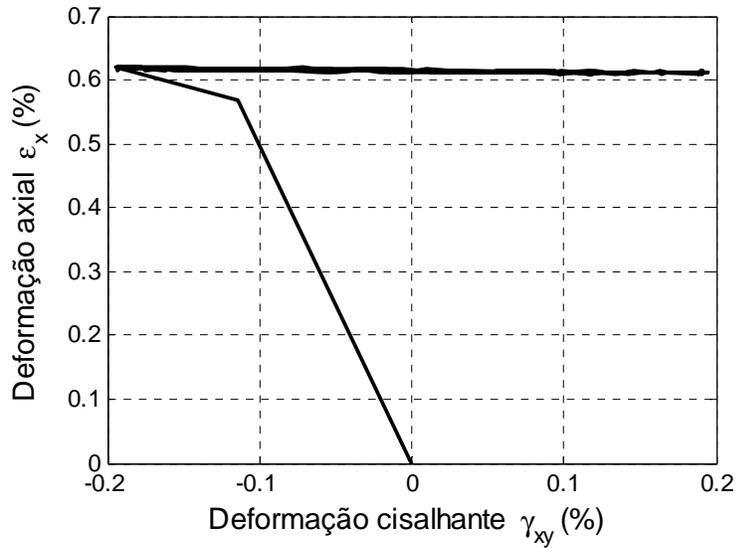


Figura 7.23 Incremento da deformação axial para  $\sigma_x = 430$  MPa e  $T = 10$  N.m

Após o primeiro ensaio e não se tendo nenhum aumento de deformação axial, foi incrementado o momento torçor para  $T = \pm 20$  N.m, gerando uma deformação cisalhante de  $\gamma_{xy} = \pm 0,4$  %, como apresenta-se na Figura 7.24.

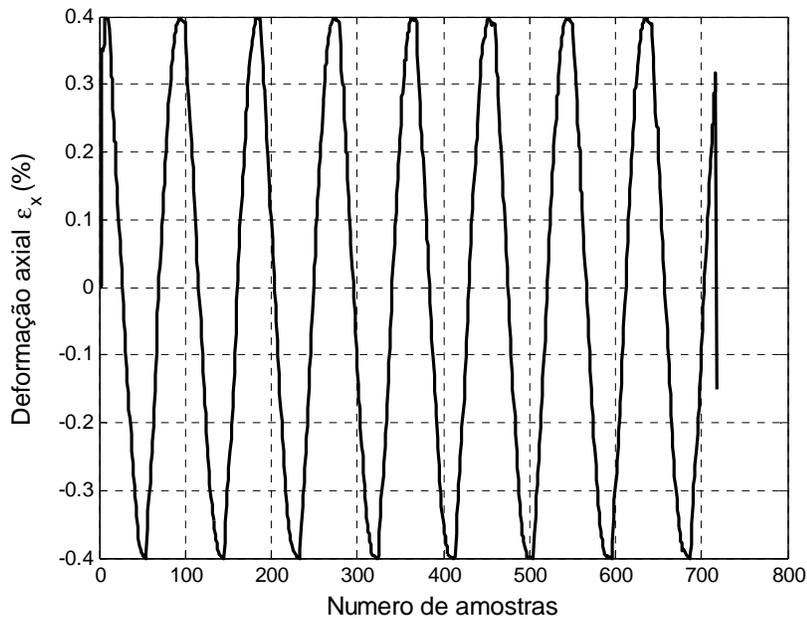


Figura 7.24 Deformação cisalhante gerado pelo  $T = \pm 20$  N.m

Como esperado para esta maior carga, a deformação axial teve um incremento a cada ciclo nos picos e vales da tensão cisalhante aplicada (vide Figura 7.25).

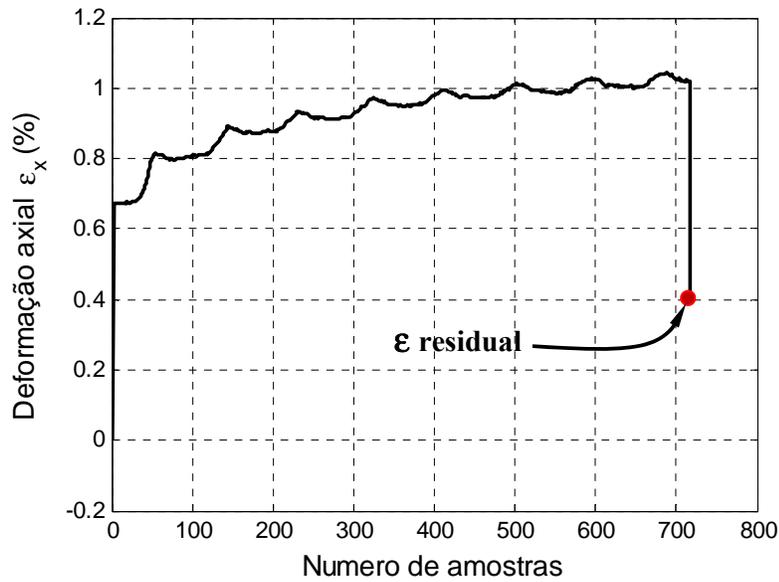


Figura 7.25 Incremento da deformação axial para  $T = 20 \text{ N.m}$

Após ter sido finalizado o ensaio, a deformação axial incrementou-se até  $\epsilon_x = 1.05 \%$ , e logo ao fazer-se o descarregamento da tensão axial, o corpo de prova manteve uma deformação axial residual de  $\epsilon_x = 0.4\%$  (vide Figura 7.25). Na Figura 7.26 apresenta-se o incremento da deformação axial a cada ciclo nos picos e vales da deformação cisalhante.

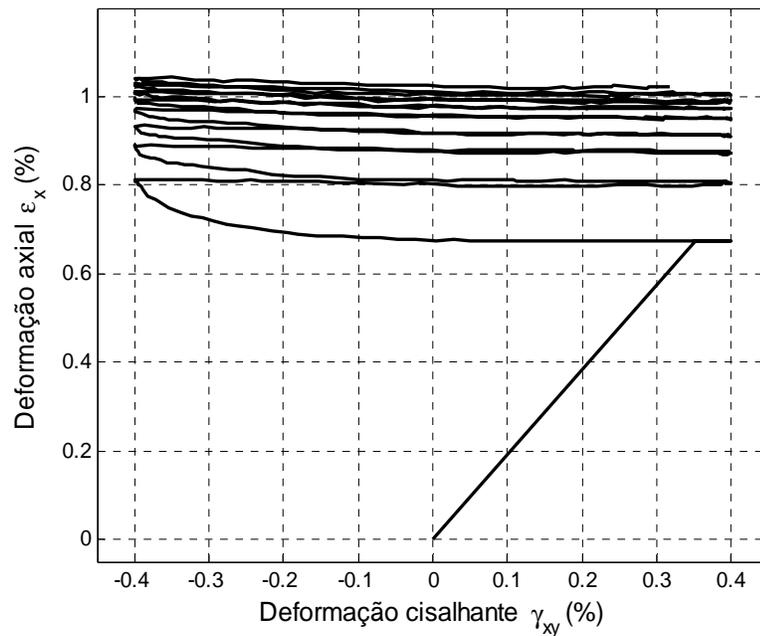


Figura 7.26 Incremento da deformação axial para  $\sigma_x = 430 \text{ MPa}$  e  $T = 20 \text{ N.m}$

### 7.3.

#### Resultados experimentais do modelo de encruamento não proporcional

Nesta seção, apresentam-se os resultados experimentais do modelo de encruamento cíclico não proporcional para o aço inox 316 e o alumínio 7075. Inicialmente foram realizados ensaios  $\epsilon N$  na máquina INSTRON-8501 para determinarem-se os parâmetros de encruamento cíclico do material. Posteriormente, foram realizados ensaios de encruamento não proporcional na MTT, que consistem em submeter-se o corpo de prova tubular com diâmetro externo  $\phi e = 14,9$  mm e diâmetro interno  $\phi i = 12,8$  mm a um carregamento cíclico de tração-torção  $90^\circ$  fora de fase.

#### 7.3.1.

##### Determinação das propriedades do material

Para se determinar a resistência ao escoamento  $S_y$  e a resistência à ruptura  $S_R$  foi realizado um teste de tração. Assim, a partir dos dados  $\sigma_x$  vs  $\epsilon_x$  determinam-se os coeficientes  $H, h$  da curva  $\sigma$  vs  $\epsilon$  monotônica do modelo de encruamento da equação de Ramberg-Osgood.

#### 7.3.2.

##### Levantamento de propriedades Al-7075 e aço inox 316

A curva  $\sigma\epsilon$  cíclica é obtida pela junção dos picos dos laços de histerese estabelecido para diversas gamas  $\Delta\epsilon$  testados sob controle de deformação. Deste modo, ela pode ser também modelada pela equação de Ramberg-Osgood como

$$\Delta\epsilon = \frac{\Delta\sigma}{E} + 2 \cdot \left( \frac{\Delta\sigma}{2H_c} \right)^{1/h_c} \quad (6.17)$$

Os parâmetros de encruamento cíclico  $H_c$  e  $h_c$  da equação de Ramberg-Osgood, foram obtidos de maneira similar da curva  $\sigma$  vs  $\epsilon$ , ajustando-se a uma reta os pontos  $\Delta\sigma/2$  x  $\Delta\epsilon/2$  nos picos dos laços de histerese em log-log.

Na Figura 7.27 apresenta-se o ajuste dos coeficientes de encruamento cíclico para o alumínio 7075, a partir dos laços de histerese para diversos  $\Delta\epsilon$ .

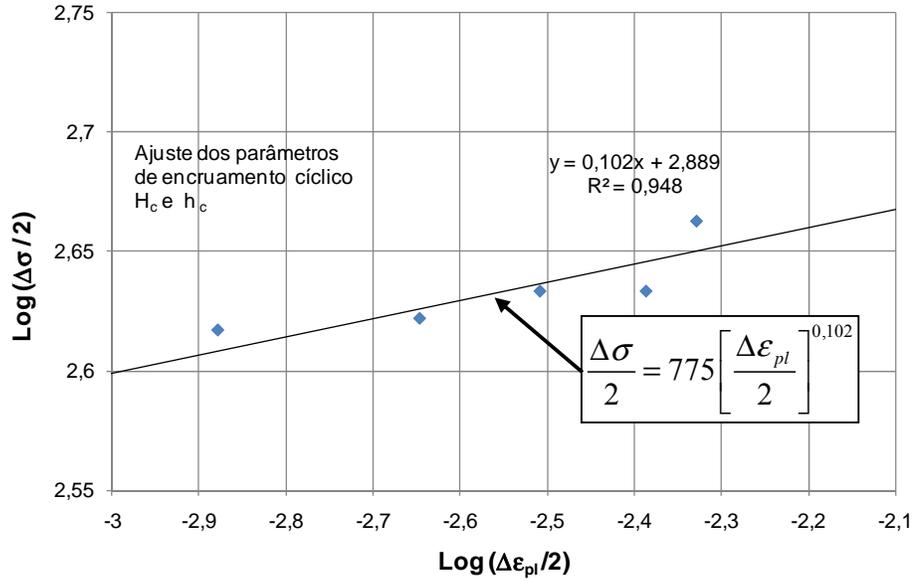


Figura 7.27 Ajuste dos parâmetros de encruamento cíclico do Al-7075

Na Figura 7.28, a linha mais clara representa a curva  $\sigma$  vs  $\epsilon$  cíclica do alumínio 7075, obtida com os valores de  $H_c$  e  $h_c$ , ajustados a partir de dados experimentais. As linhas mais escuras representa os laços de histerese estáveis para as diferentes gamas  $\Delta \epsilon$ .

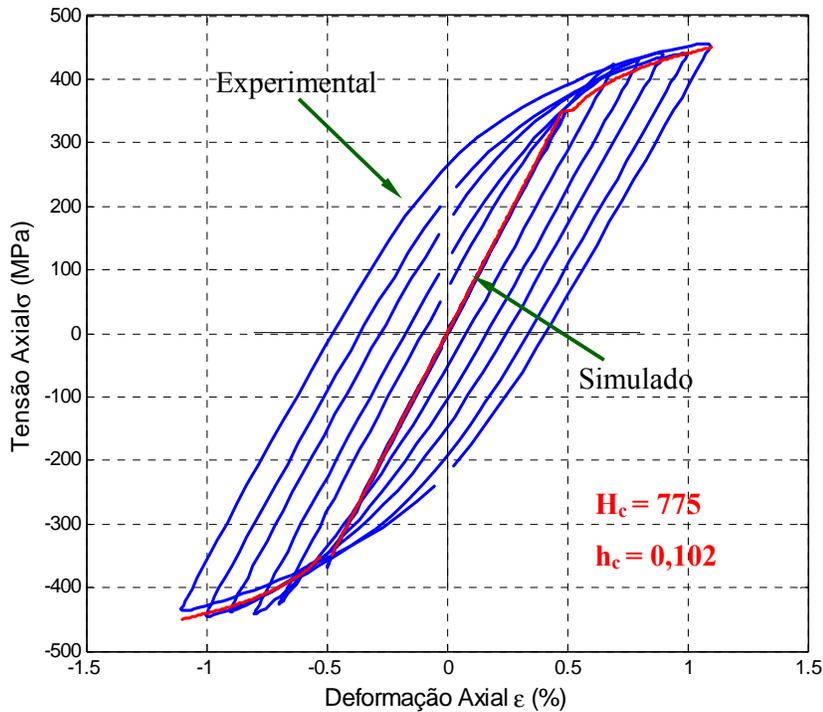


Figura 7.28 Curva  $\sigma \times \epsilon$  cíclica do Al-7075 ajustando os picos dos laços.

Na Figura 7.29, apresentam-se os laços  $\Delta\sigma_x\Delta\varepsilon$  do Alumínio-7075, obtidos pelo modelo de Ramberg-Osgood (às vezes chamado de laços de Masing [51]) para diferentes valores de gamas  $\Delta\varepsilon$  fixas e dado pelas linhas contínuas. Os pontos representam as curvas  $\sigma_x\varepsilon$  obtidas experimentalmente para as mesmas gamas  $\Delta\varepsilon$

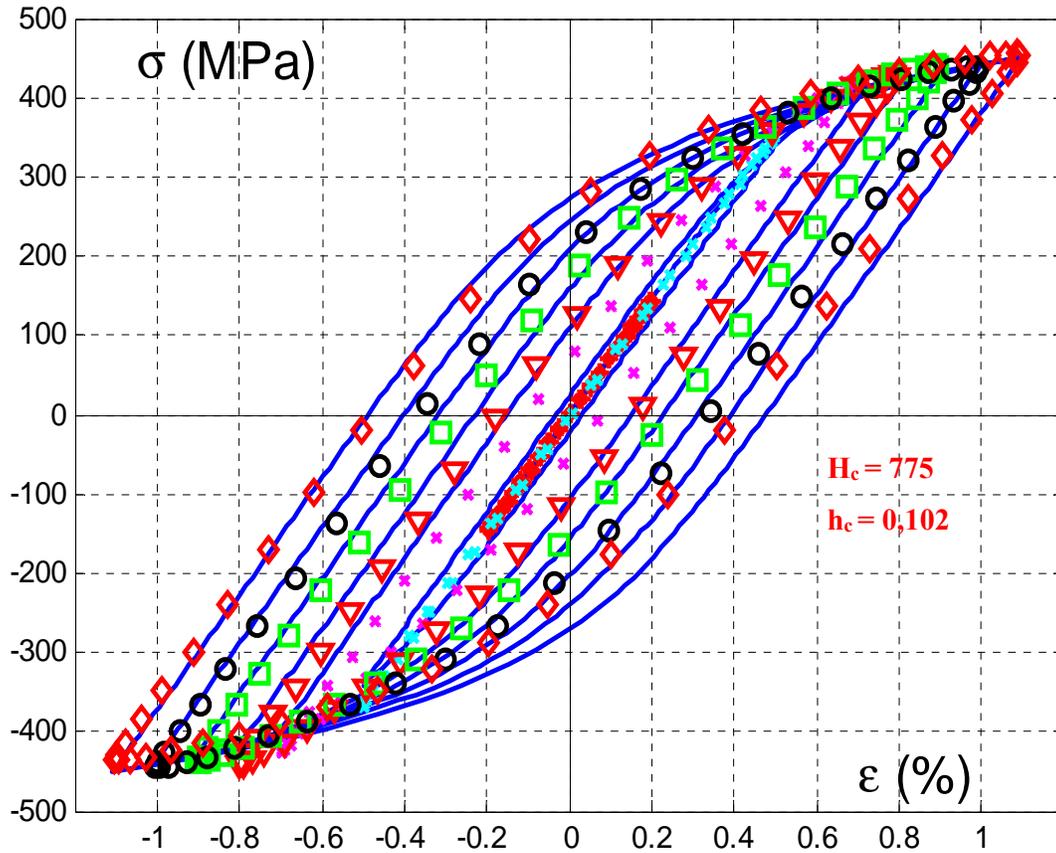


Figura 7.29 Laços estabilizados do Alumínio 7075.

O módulo de elasticidade  $E$  do Alumínio 7075 é obtido da inclinação da curva  $\sigma_x\varepsilon$  na zona elástica. Já o coeficiente de Poisson  $\nu$  é obtido pela relação  $\nu = -\varepsilon_y / \varepsilon_x$ . As deformações foram medidas através do equipamento de correlação de imagens VIC-3D da *Correlated Solutions*.

Na Figura 7.30 mostra-se a zona elástica da curva  $\sigma_x\varepsilon$ , a partir da qual determinam-se os valores de  $E$  e  $\nu$ .

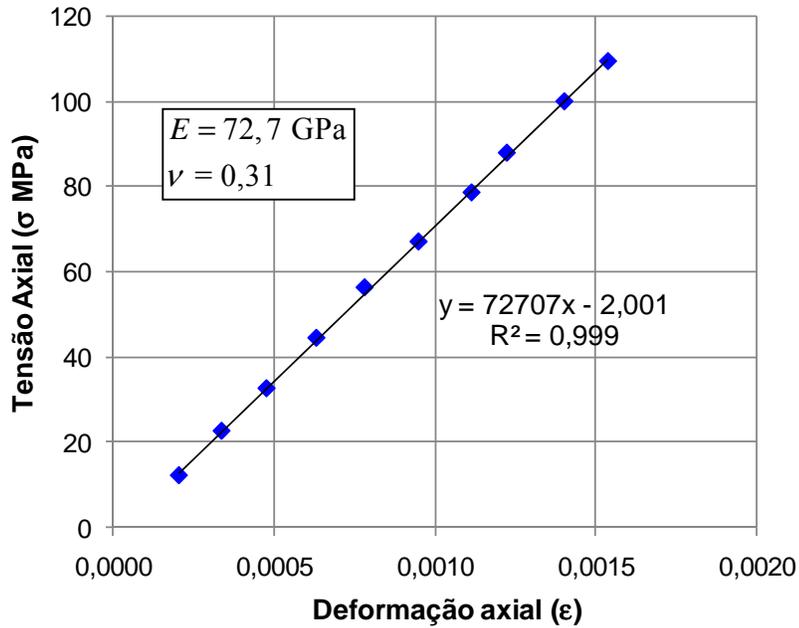


Figura 7.30 Determinação dos parâmetros  $E$  e  $\nu$  do alumínio 7075.

Um outro material de interesse para o estudo de encruamento não proporcional é o Aço Inox 316. Seus parâmetros de encruamento cíclico  $H_c$  e  $h_c$  da equação de Ramberg-Osgood foram obtidos de maneira semelhante ao do alumínio 7075, ajustando-se os bicos dos laços de histerese estabelecidos e plotados em log-log a uma reta  $\Delta\sigma/2 \times \Delta\epsilon/2$ , como se mostra na Figura 7.31.

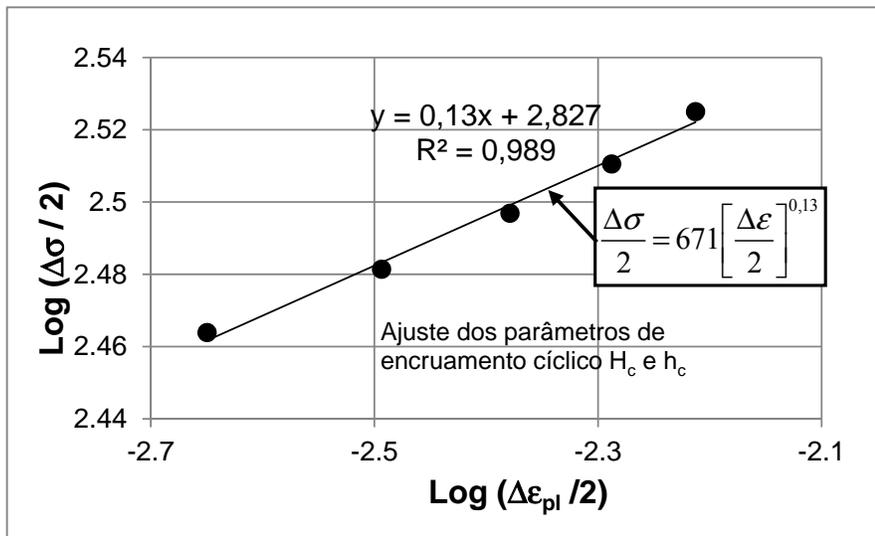


Figura 7.31 Ajuste dos parâmetros de encruamento cíclico do Aço Inox 316.

Na Figura 7.32 apresenta-se a curva  $\sigma \times \varepsilon$  cíclica do aço inox 316 dada pela linha mais clara, e os laços de histerese estáveis para as diferentes gamas  $\Delta\varepsilon$ .

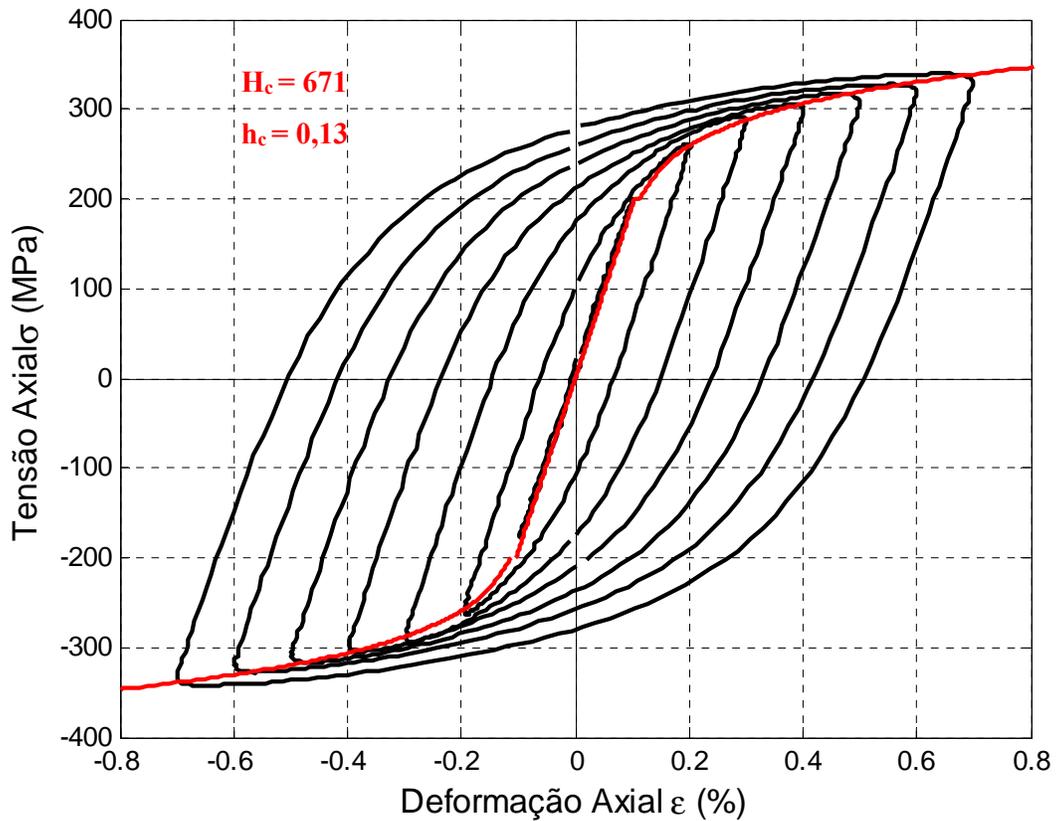


Figura 7.32 Curva  $\sigma \times \varepsilon$  cíclica do Aço inox-316 ajustando os bicos dos laços.

Na Figura 7.33, apresentam-se os laços  $\Delta\sigma \Delta\varepsilon$  do aço inox 316, obtidos com o modelo de Ramberg-Osgood para os diferentes valores de gama  $\Delta\varepsilon$  (laços de Masing), e dados pelas linhas contínuas. Os pontos representam os laços de histerese estáveis obtidos experimentalmente para as mesmas gamas  $\Delta\varepsilon$ .

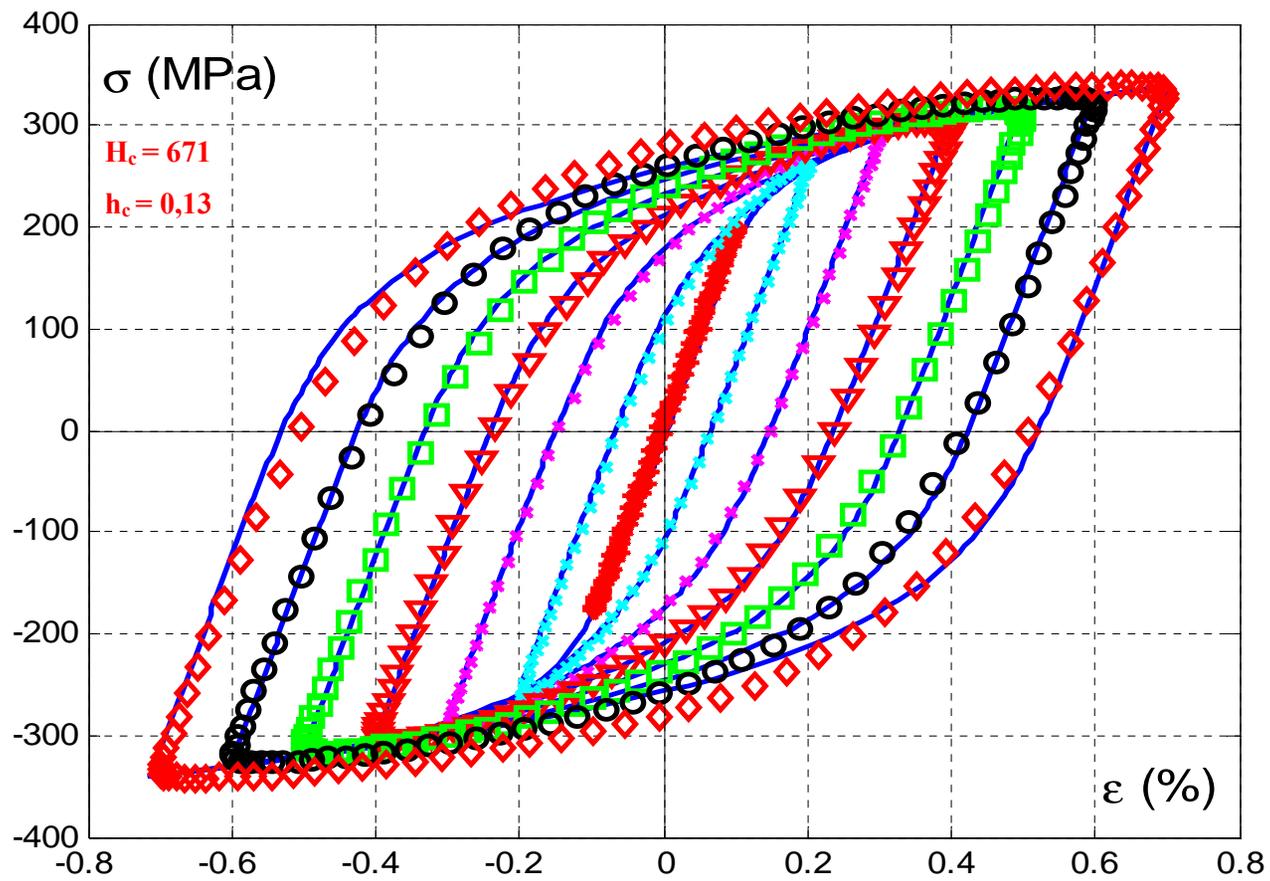


Figura 7.33 Laços estabilizados do Aço inox 316.

Finalmente, o módulo de elasticidade  $E$  é obtido a partir dos dados da zona elástica da curva  $\sigma \times \varepsilon$  e com o coeficiente de Poisson  $\nu$  obtido pela relação  $\nu = -\varepsilon_y / \varepsilon_x$ , onde as deformações foram medidas pelo módulo de correlação de imagens VIC-3D da *Correlated Solutions*. Na Figura 7.34 mostra-se a zona elástica da curva  $\sigma \times \varepsilon$  para o aço inox-316.

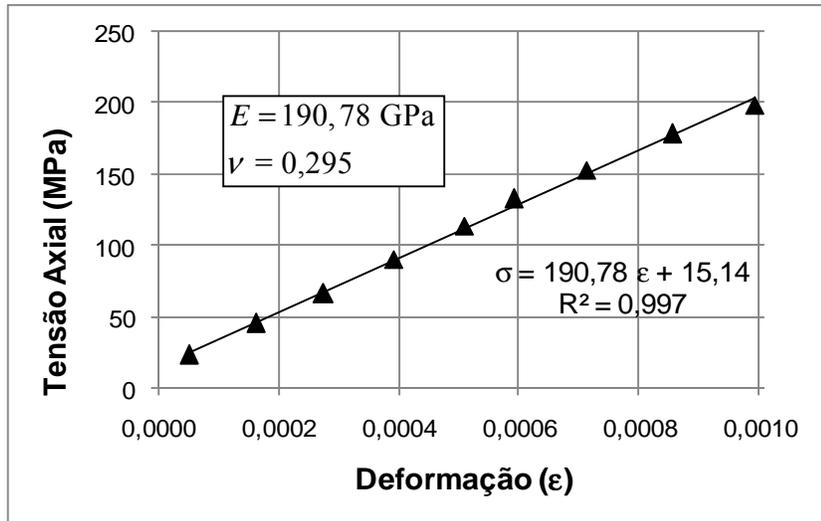


Figura 7.34 Determinação dos parâmetros  $E$  e  $\nu$  do aço Inox-316.

Para se determinar  $S_y$  e  $S_R$ , foi realizado um teste de tração. A partir dos dados  $\sigma_x \times \varepsilon_x$  determinam-se os coeficientes  $H, h$  da curva  $\sigma_x \times \varepsilon_x$  monotônica do modelo de encruamento da equação de Ramberg-Osgood.

### 7.3.3. Encruamento não proporcional do Al-7075

Nesta seção, apresentam-se os resultados experimentais do ensaio de encruamento não-proporcional para o Alumínio 7075, que consiste em submeter o corpo de prova a uma carga trativa senoidal  $\sigma(t) = \sigma_a \cdot \sin(\omega t)$  e a uma torção defasadas de  $90^\circ$ ,  $\tau(t) = \tau_a \cdot \cos(\omega t)$ , onde  $\tau_a = \sigma_a / \sqrt{3}$ . Os ensaios de encruamento não-proporcional foram feitos sob controle da carga e torque aplicados ao corpo de prova. Suas deformações  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$  foram medidos utilizando-se o módulo de correlação de imagens VIC-3D da *Correlated Solutions*. Estes ensaios foram

desenvolvidos na MTT no Laboratório de Fadiga da PUC-Rio.

O ensaio de encruamento não proporcional foi feito num corpo de prova tubular com diâmetro interno  $\phi_i = 12,8$  mm, diâmetro externo  $\phi_e = 14,9$  mm e comprimento de  $L_c = 140$  mm, como mostra a Figura 7.35.

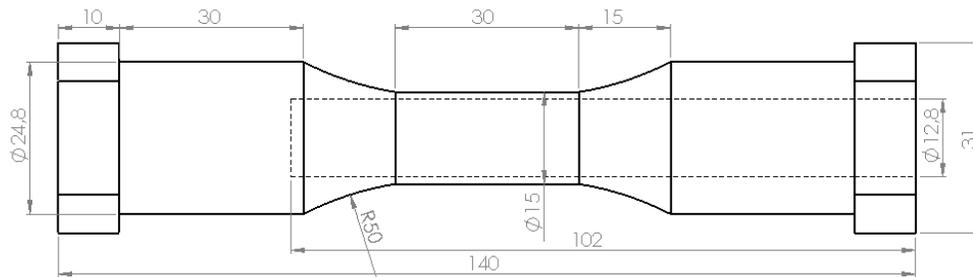
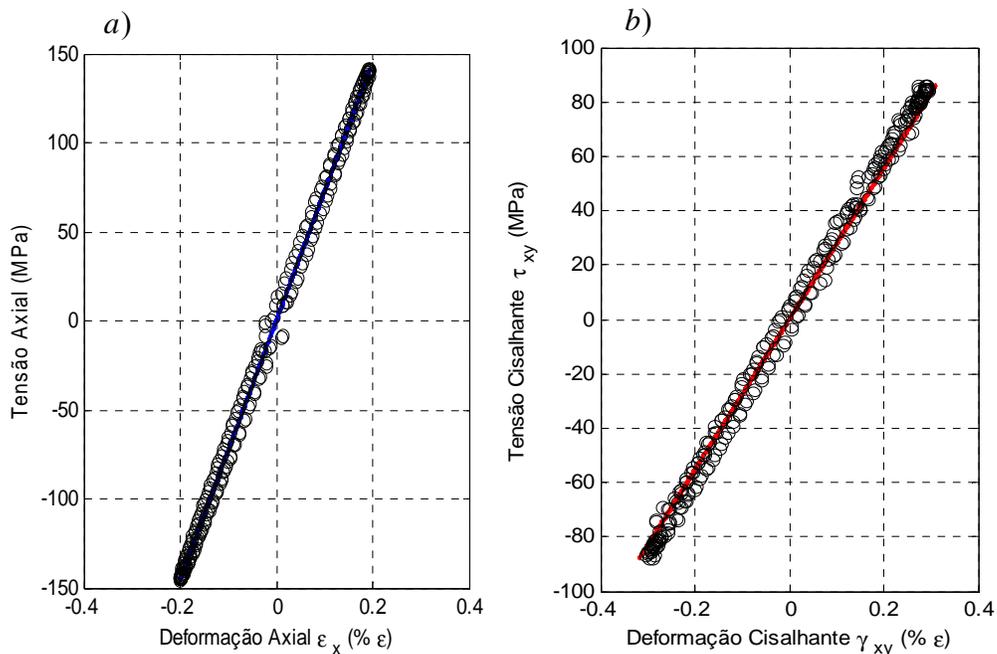


Figura 7.35 Forma e dimensões do corpo de prova - ensaio não proporcional.

No primeiro ensaio, o corpo de prova de alumínio 7075 é submetido a uma carga de tração  $\sigma_x(t) = 146,5 \cdot \sin(\omega t)$  MPa capaz de gerar uma deformação axial  $\varepsilon_x = 0.2\%$  e uma tensão cisalhante  $\tau_{xy}(t) = 84,5 \cdot \cos(\omega t)$  defasada  $90^\circ$  com fator de não-proporcionalidade  $F_{NP} = 1$ , que sempre gera encruamento não-proporcional.



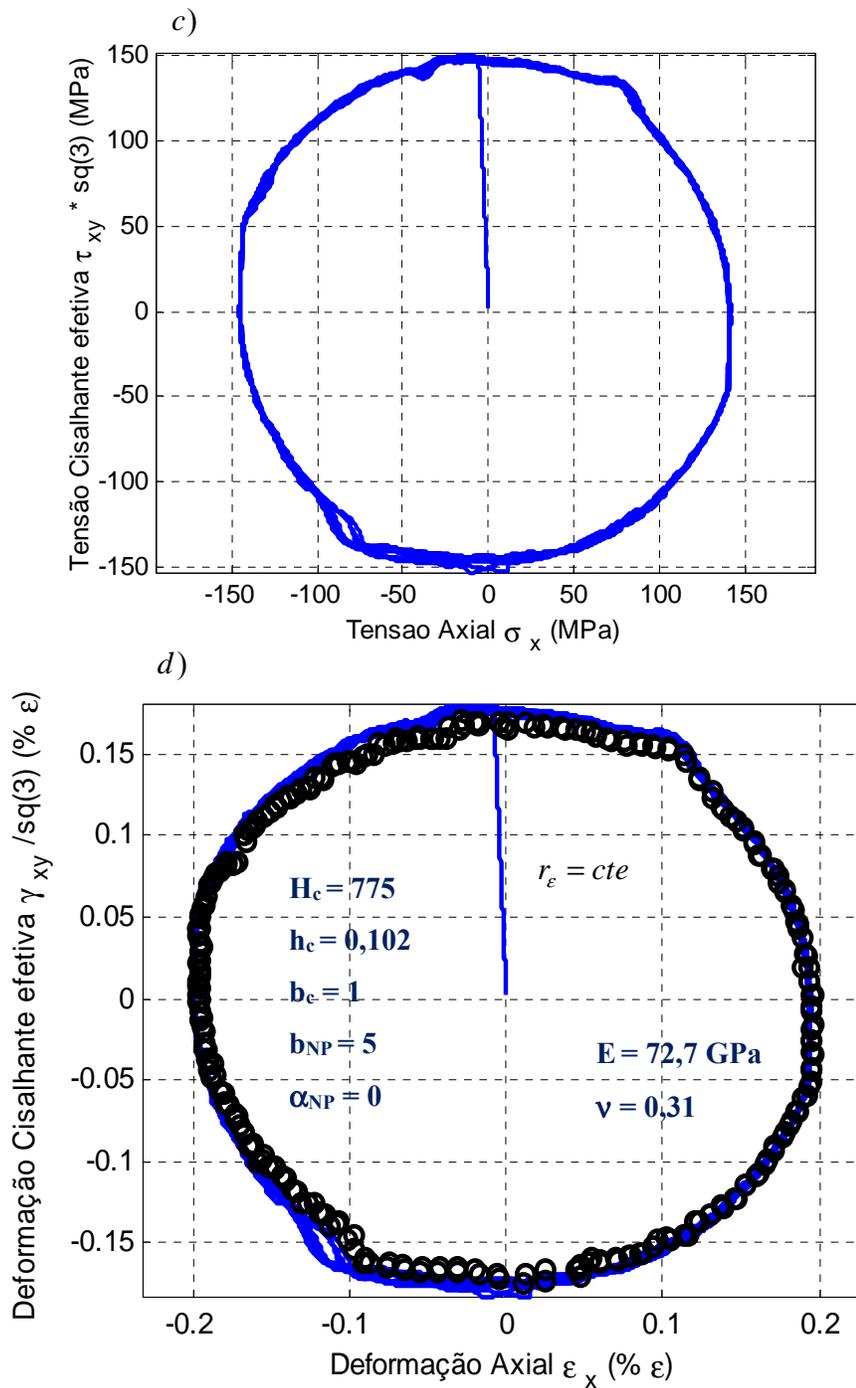
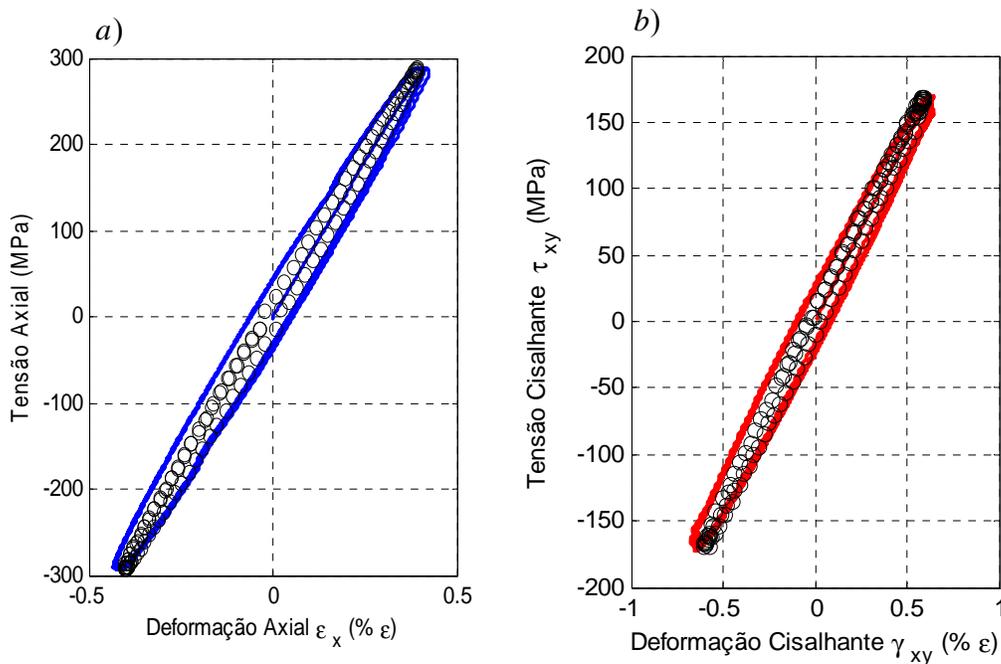


Figura 7.36 Ensaio EN do Al-7075 com  $\epsilon_x = 0.2\%$  a) laço histerese  $\sigma_x$  vs  $\epsilon_x$ , b) laço histerese  $\tau_{xy}$  vs  $\gamma_{xy}$ , c) trajetória das tensões  $\sigma_x$  vs  $\tau_{xy} \sqrt{3}$ , d) trajetória de deformação  $\epsilon_x$  vs  $\gamma_{xy} / \sqrt{3}$ .

Na Figura 7.36 a) apresenta-se a curva  $\sigma_x$  x  $\epsilon_x$  gerada pela carga axial. A linha sólida representa a curva obtida pelo simulador, e círculos representam a curva

tensão-deformação obtidos experimentalmente na MTT; na Figura 7.36 b) apresenta-se a curva  $\tau_{xy}$  vs  $\gamma_{xy}$  gerada pelo momento torçor, onde a linha sólida representa a curva obtida pelo simulador e os círculos a curva obtida experimentalmente. Na Figura 7.36 c) apresenta-se a trajetória gerada pelas tensões aplicadas ao corpo de prova, com pequenas oscilações na curva obtida, devido às não-linearidades da MTT. Esta história de carregamentos será utilizada, posteriormente, no simulador com o objetivo de gerar as curva de deformação. Finalmente, na Figura 7.36 d) apresenta-se a trajetória de deformação  $\epsilon_x$  vs  $\gamma_{xy} / \sqrt{3}$  onde a linha sólida representa a trajetória de deformação gerada pelo simulador e os círculos representam a trajetória obtida experimentalmente no ensaio. Pode-se observar que o ensaio de encruamento não-proporcional do alumínio 7075 para uma deformação de  $\epsilon = 0.2\%$  não apresenta encruamento não-proporcional e mantém-se uma trajetória de deformação constante ao longo do ensaio.

Na figura 7.37 apresentam-se os resultados do ensaio de encruamento não-proporcional do alumínio 7075 para outro par de carregamento que gera uma deformação axial máxima de 0.4 %.



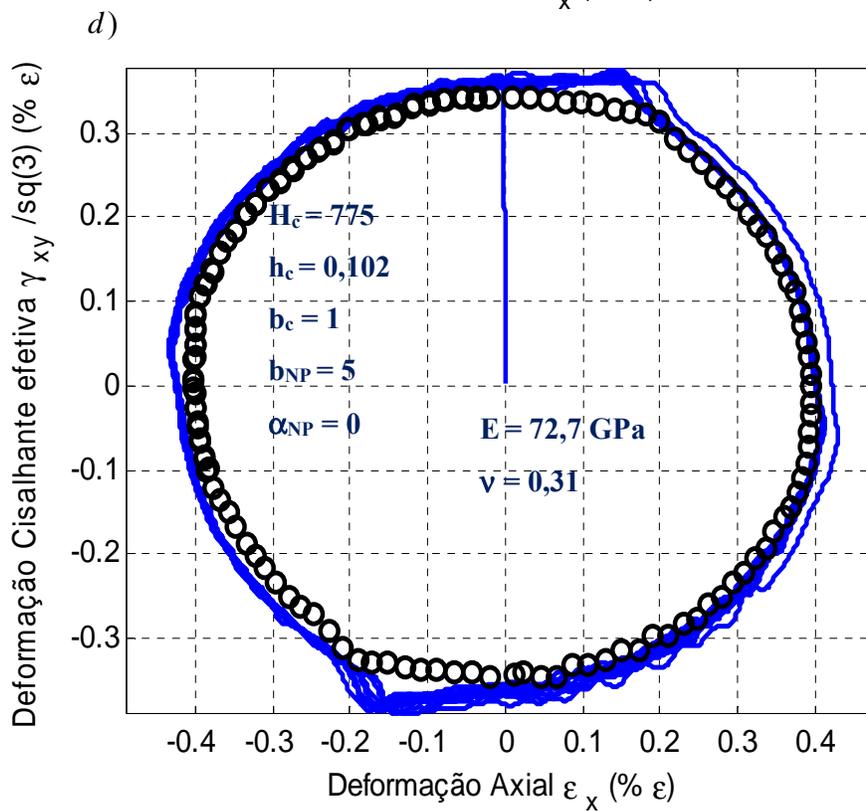
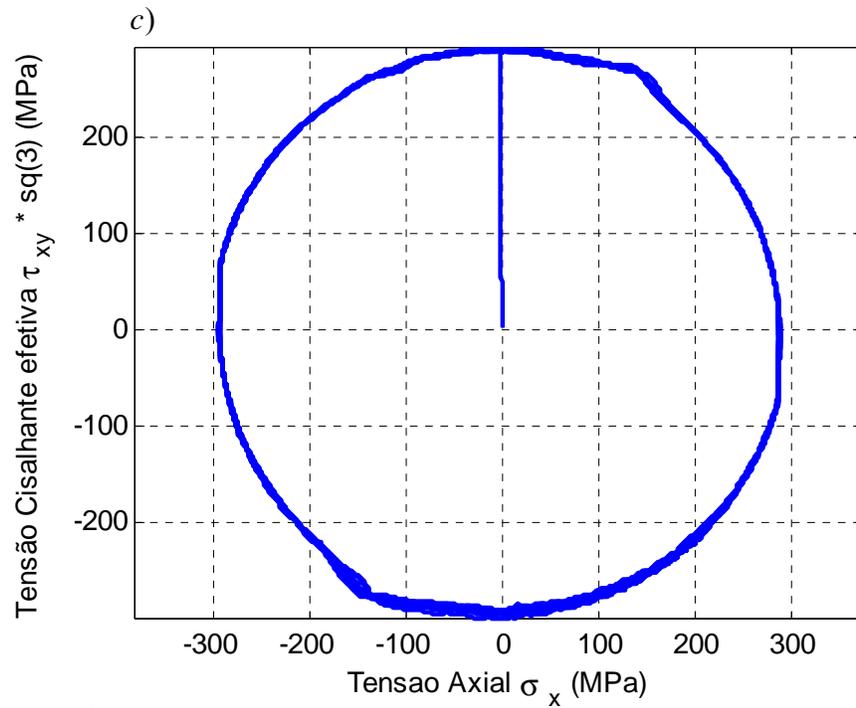


Figura 7.37 Ensaio EN do Al-7075 com  $\epsilon_x = 0.4\%$ , a) laço histerese  $\sigma_x$  vs  $\epsilon_x$ , b) laço histerese  $\tau_{xy}$  vs  $\gamma_{xy}$ , c) trajetória das tensões  $\sigma_x$  vs  $\tau_{xy} \sqrt{3}$ , d) trajetória de deformação

$$\epsilon_x \text{ vs } \gamma_{xy} / \sqrt{3}.$$

Na Figura 7.38 apresenta-se a trajetória de deformação dos dois ensaios de encruamento NP apresentados anteriormente. Pode-se observar que nos dois ensaios a trajetória de deformação mantém-se constante e não apresenta encruamento NP. Isto se dá devido que as ligas de alumínio apresentam alta energia de empilhamento de falhas e discordâncias pouco espaçadas, nas quais as bandas de deslizamento cruzadas ocorrem de maneira natural mesmo sobre história de carregamento proporcional. Portanto, não apresenta diferença no encruamento NP.

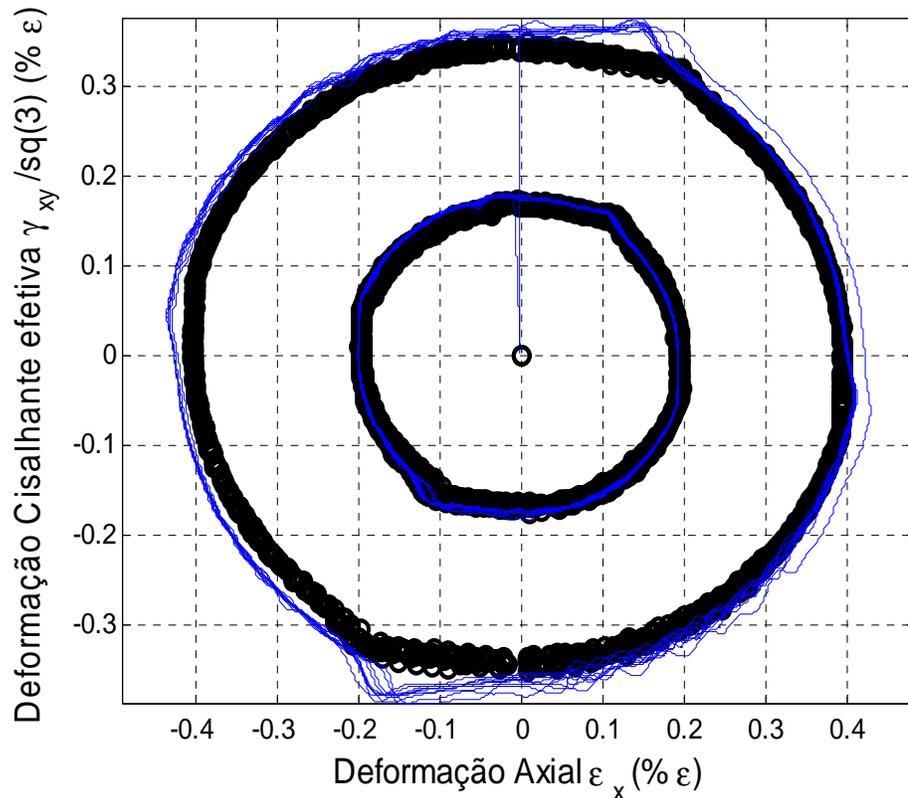


Figura 7.38 Trajetória de deformação  $\epsilon_x$  vs  $\gamma_{xy} / \sqrt{3}$  no ensaio NP do alumínio 7075 para uma deformação de  $\epsilon_x = 0.2\%$  e  $\epsilon_x = 0.4\%$

#### 7.3.4. Encruamento não-proporcional Aço Inox-316

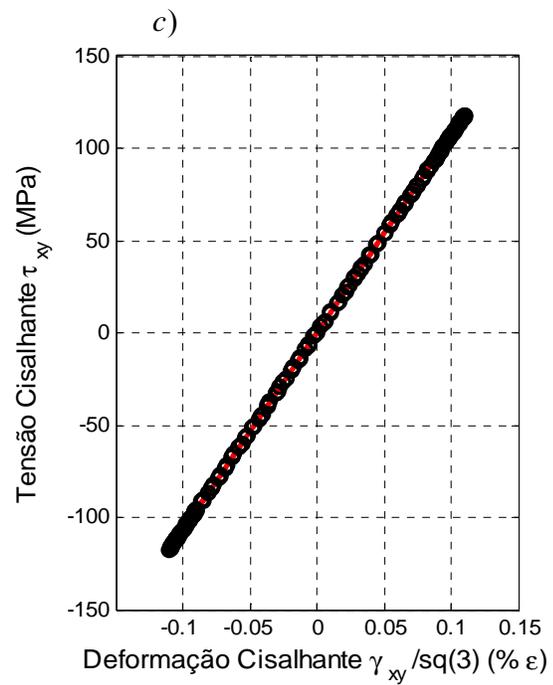
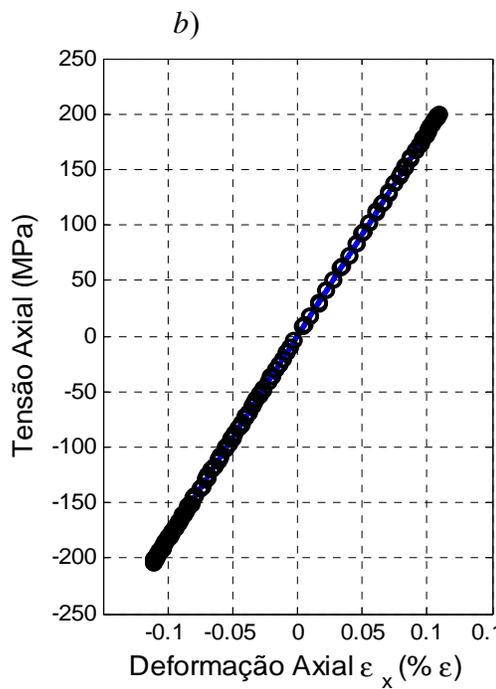
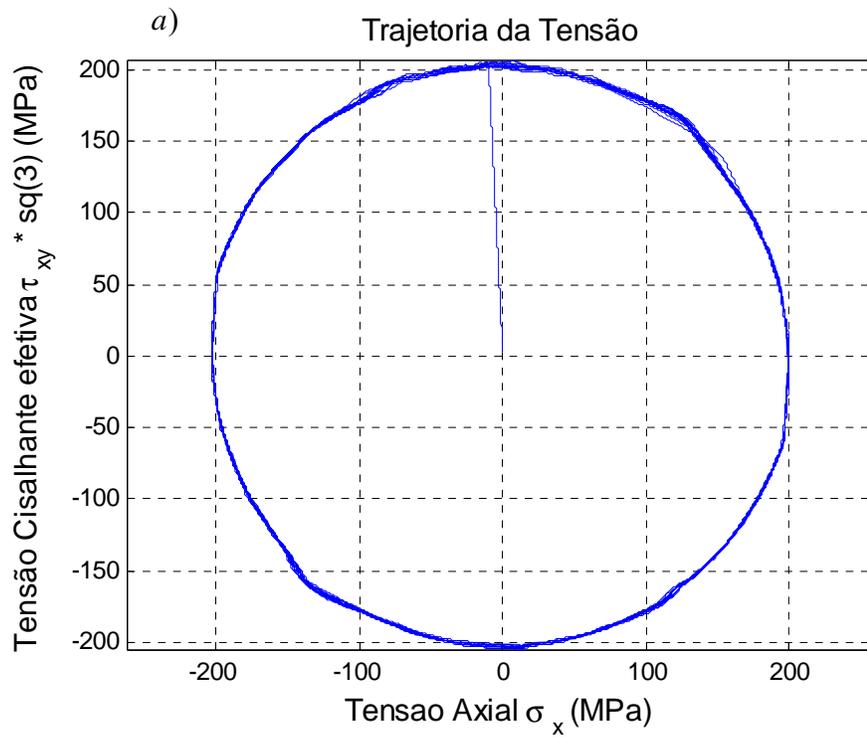
O outro material utilizado nos ensaios de encruamento não-proporcional foi o aço inox-316, que seguiu o mesmo procedimento do ensaio anterior, o corpo de prova tubular sendo submetido a uma história de carregamentos não proporcionais, sob controle de tensão. O corpo de prova tubular utilizado no ensaio tem diâmetro

interno de  $\phi_i = 12,8$  mm, diâmetro externo de  $\phi_e = 14,9$  mm e comprimento  $L_{cp} = 140$  mm (vide Figura 7.35). Suas deformações  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$  geradas durante o ensaio foram medidas utilizando o módulo de correlação de imagens VIC-3D da *Correlated Solutions*.

As tensões axiais utilizadas no ensaio foram determinadas considerando-se a curva dos laços de histerese estabelecido do aço inox-316 e apresentados na Figura 7.33, tomando-se como referência uma deformação axial desejada. A tensão cisalhante determina-se a partir da tensão axial, definida como a tensão que produz a mesma tensão de Mises, que a tensão axial sob tração pura. Assim, para o primeiro ensaio escolheu-se uma tensão axial  $\sigma_x(t) = 200 \cdot \sin(\omega t)$  MPa capaz de gerar uma deformação axial  $\varepsilon_x = 0.1\%$  e uma tensão cisalhante  $\tau_{xy}(t) = 115 \cdot \cos(\omega t)$  MPa, defasadas  $90^\circ$ , gerando-se uma história de carregamentos não proporcionais sobre o corpo de prova, conforme se apresenta na Figura 7.39 a).

Na Figura 7.39 b), apresenta-se a curva  $\sigma_x$  x  $\varepsilon_x$  obtida no ensaio, onde a linha contínua representa a curva obtida no simulador e, os círculos representam a curva obtida experimentalmente, ao longo do ensaio. A deformação máxima obtida foi  $\Delta\varepsilon_{\max} / 2 = 0.11\%$ , com um comportamento linear elástico e sem encruamento. A Figura 7.39 c) apresenta a curva  $\tau_{xy}$  x  $\gamma_{xy} / \sqrt{3}$ , a linha contínua representa a curva obtida no simulador e os círculos a curva obtida experimentalmente ao longo do ensaio. A deformação cisalhante máxima obtida foi de  $\Delta\gamma_{xy} / 2 \cong 0.19\%$  e o comportamento foi linear elástico sem encruamento.

A Figura 7.39 d) apresenta a trajetória de deformação  $\varepsilon_x$  x  $\gamma_{xy} / \sqrt{3}$  obtida ao longo do ensaio, onde a linha contínua representa a trajetória de deformação obtida no simulador para a história de carregamentos não-proporcionais e, os círculos representam a trajetória de deformação obtida experimentalmente no ensaio. Observa-se que a história de carregamentos não-proporcionais escolhidos no primeiro ensaio não gera encruamento no material.



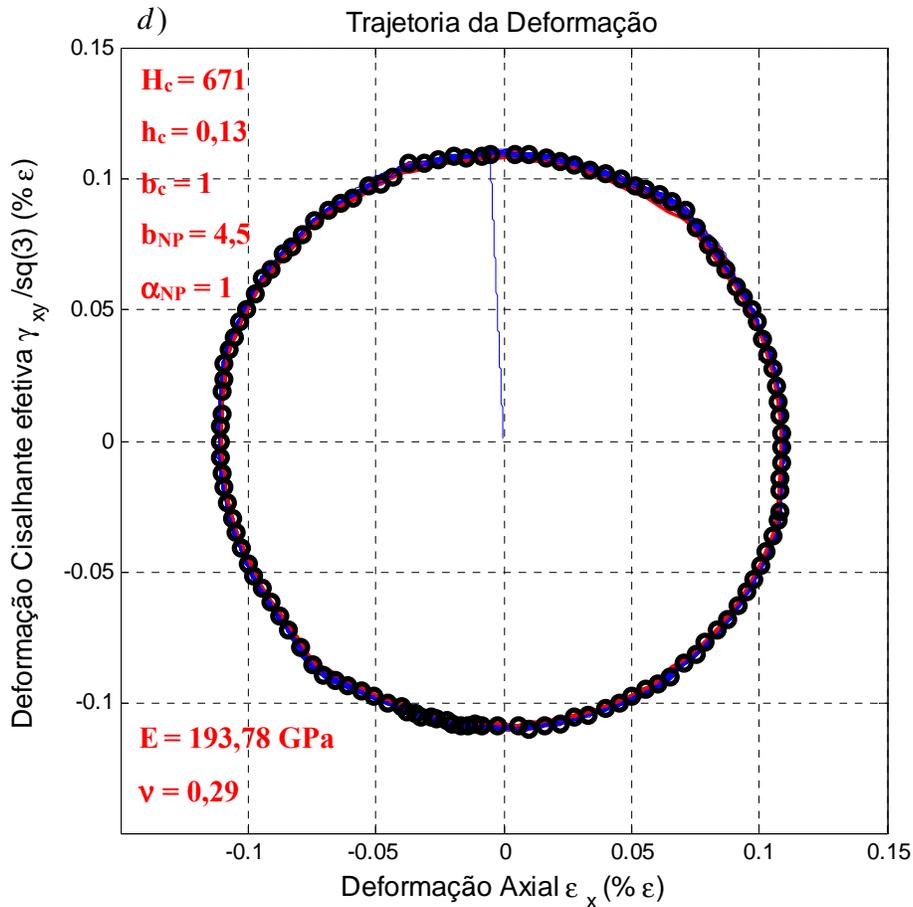


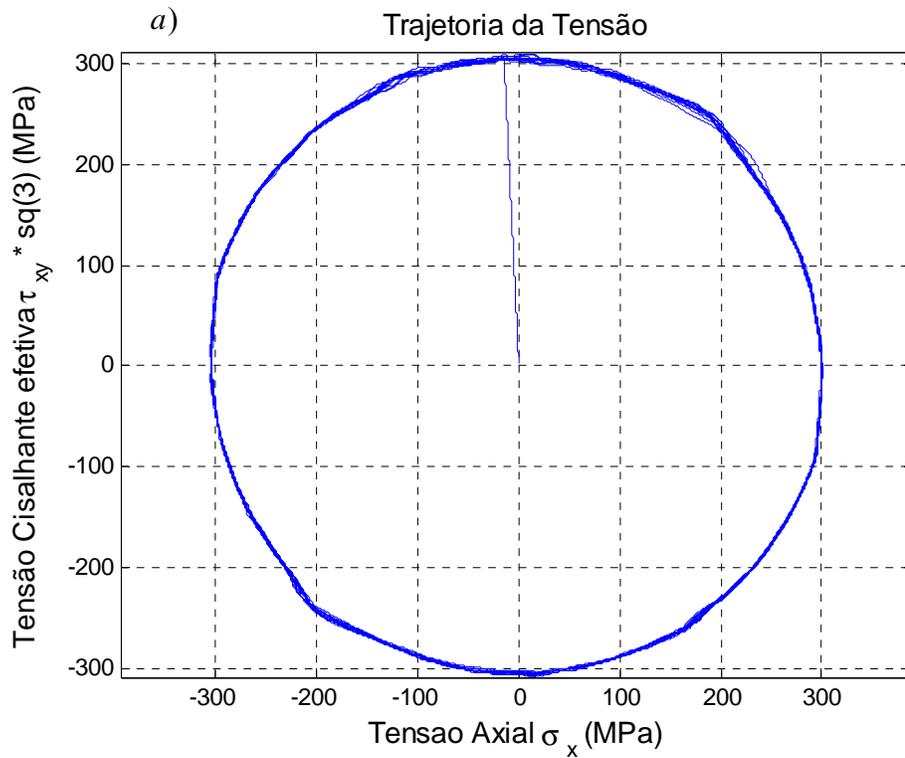
Figura 7.39 Ensaio EN do Inox-316 com  $\varepsilon_x = 0.1\%$ , a) trajetória das tensões  $\sigma_x$  vs  $\tau_{xy}\sqrt{3}$ , b) laço histerese  $\sigma_x$  vs  $\varepsilon_x$ , c) laço histerese  $\tau_{xy}$  vs  $\gamma_{xy}$ , d) trajetória de deformação  $\varepsilon_x$  vs  $\gamma_{xy}/\sqrt{3}$ .

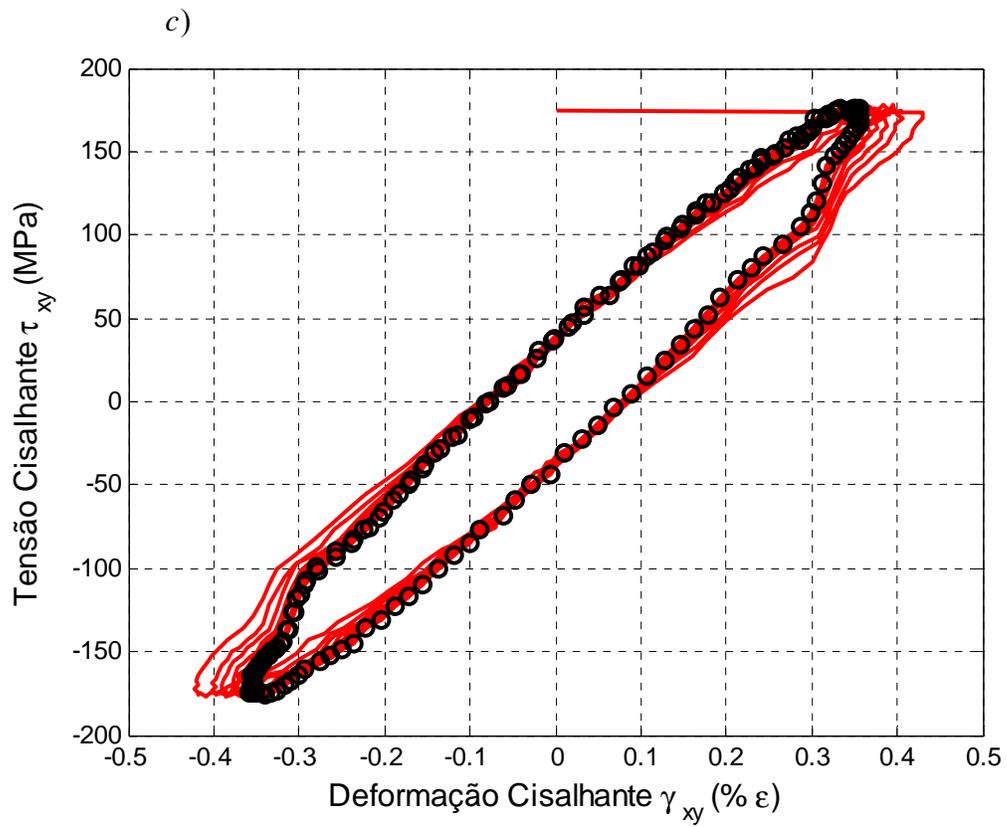
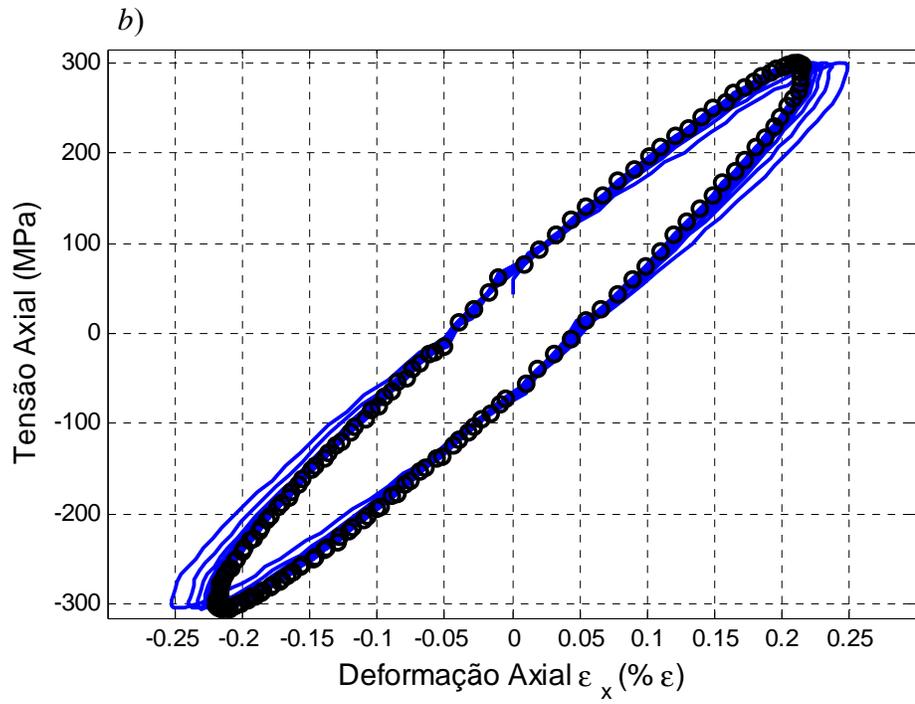
Para o segundo ensaio, escolheu-se outro par de carregamentos não-proporcionais para uma deformação axial  $\varepsilon_x = 0.25\%$ , considerando-se como referência os laços de histerese estabelecidos do aço inox-316 (vide Figura 7.33). Portanto, no segundo ensaio escolheu-se uma tensão axial de  $\sigma_x(t) = 300.\sin(\omega t)$  MPa, capaz de gerar uma deformação axial  $\varepsilon_x = 0.25\%$  e sua correspondente tensão cisalhante  $\tau_{xy}(t) = 173.\cos(\omega t)$  MPa, defasadas  $90^\circ$ , gerando-se uma história de carregamentos não-proporcionais, como mostra a Figura 7.40 (a). Na Figura 7.40 (b) apresenta-se a curva  $\sigma_x \times \varepsilon_x$  obtida no ensaio para os novos carregamentos. Mostra-se que no primeiro ciclo foi gerada uma deformação axial

máxima de  $\Delta\varepsilon_{\max}/2 = 0.25\%$  e, após 12 ciclos, estabeleceu-se para uma deformação axial de  $\Delta\varepsilon/2 \cong 0.215\%$ .

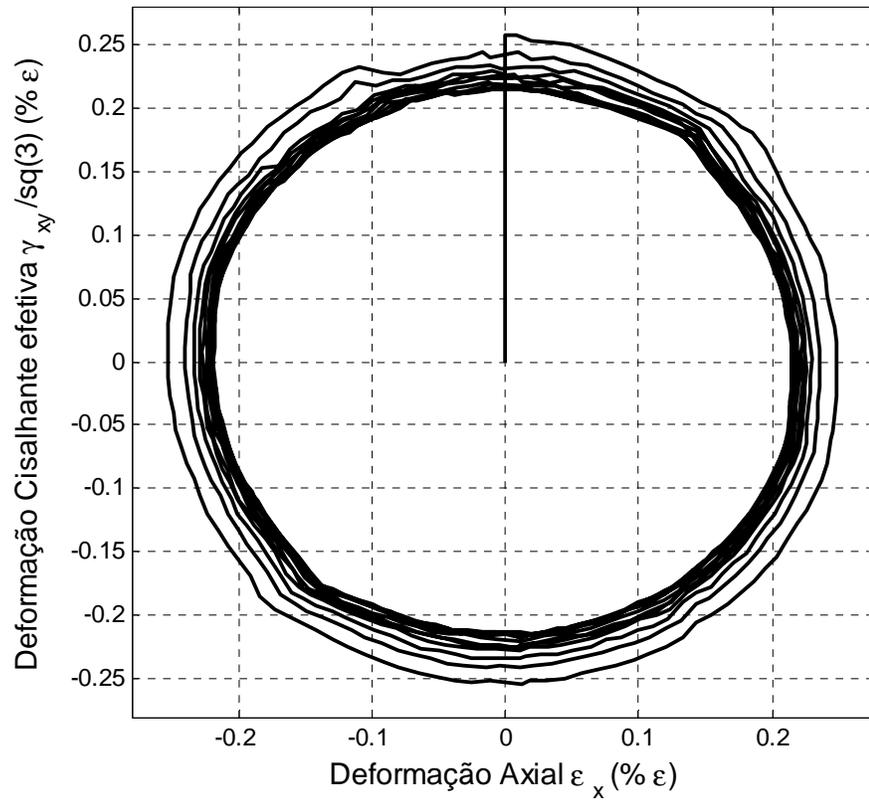
Já na Figura 7.40 (c) apresenta-se a curva  $\tau_{xy} \times \gamma_{xy}/\sqrt{3}$ . No primeiro ciclo, obteve-se uma deformação cisalhante máxima de  $\Delta\gamma_{xy}/2 \cong 0.434\%$  e em seguida houve encruamento a cada ciclo. Após 12 ciclos estabilizou-se em uma deformação cisalhante de  $\Delta\gamma_{xy}/2 \cong 0.364\%$ .

Na Figura 7.40 d) apresenta-se a trajetória de deformação  $\varepsilon_x - \gamma_{xy}/\sqrt{3}$  obtida experimentalmente na MTT. Na Figura 7.40 e) apresenta-se a trajetória da deformação obtida através do simulador para a história de carregamentos NP real obtida experimentalmente. Na Figura 7.40 f), a linha contínua representa a trajetória de deformação estabilizada obtida pelo simulador, e os círculos os obtidos experimentalmente no ensaio.

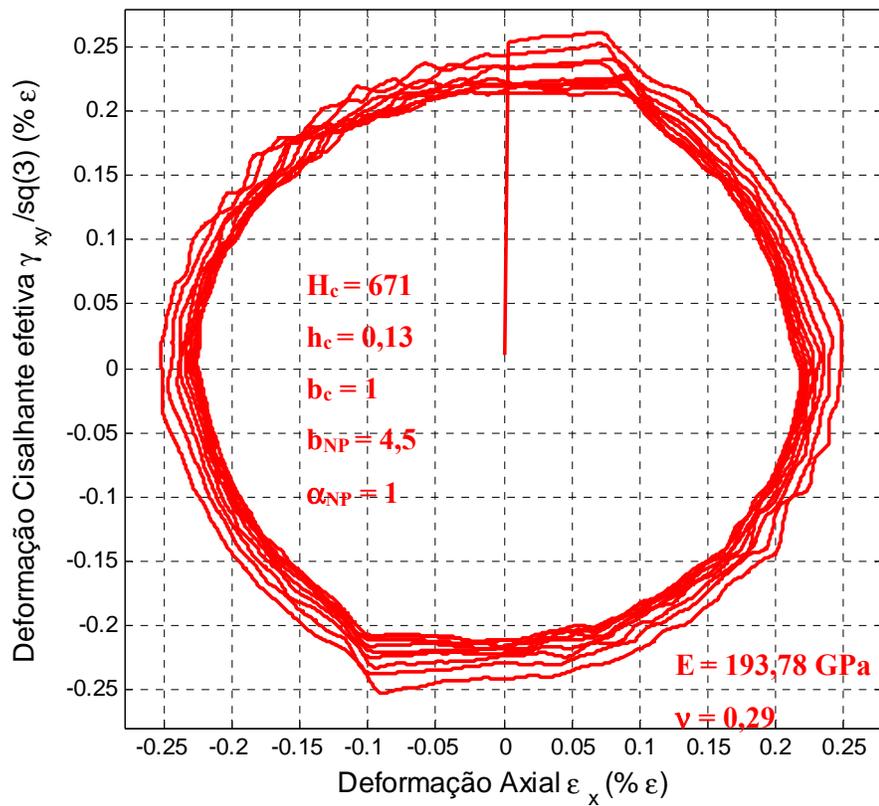




d) Trajetória da Deformação experimental



e) Trajetória da Deformação Simulado



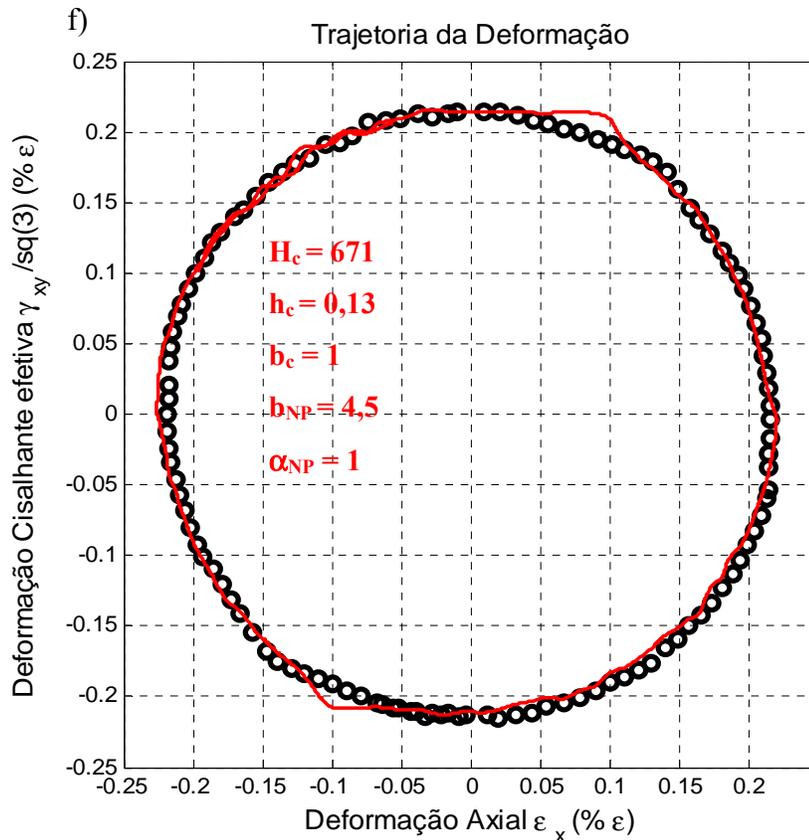


Figura 7.40 Ensaio EN do Inox-316 com  $\epsilon_x = 0.25\%$ , a) trajetória das tensões  $\sigma_x - \tau_{xy} \sqrt{3}$ , b) laço histerese  $\sigma_x - \epsilon_x$ , c) laço histerese  $\tau_{xy} - \gamma_{xy}$ , d) trajetória de deformação experimental  $\epsilon_x - \gamma_{xy} / \sqrt{3}$ , e) trajetória de deformação simulada  $\epsilon_x - \gamma_{xy} / \sqrt{3}$ , f) trajetória de deformação estabilizada, experimental e simulada.

A partir das trajetórias estabilizadas, pode-se afirmar que o simulador modela razoavelmente o fenômeno de encruamento NP, já que ambas as curvas estabilizam-se numa deformação de  $(\Delta\epsilon / 2 \cong 0.215\%)$ .

Na Figura 7.41 (a) apresenta-se o comportamento da deformação axial máxima  $\Delta\epsilon_x / 2$  dos laços de histerese ao longo do ensaio. Por outro lado, na Figura 7.41 (b) apresenta-se o comportamento da deformação cisalhante máxima  $\Delta\gamma_{xy} / 2$  ao longo do ensaio. Além disso, pode-se observar que o aço inox-316, submetido a uma história de carregamentos não-proporcionais que geram deformação plástica, apresenta o fenômeno de encruamento não-proporcional, e após 12 ciclos estabiliza

em uma deformação menor.

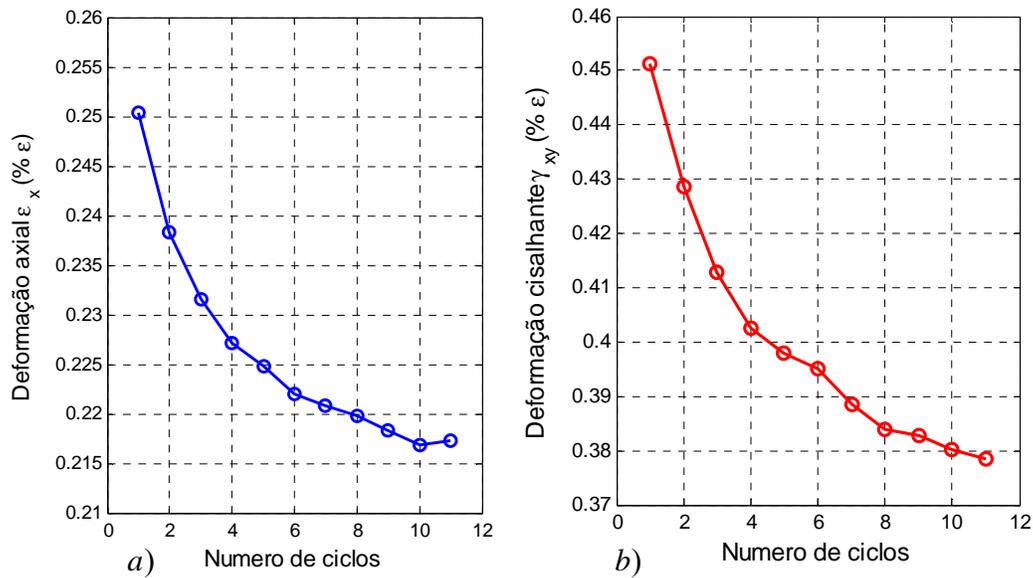


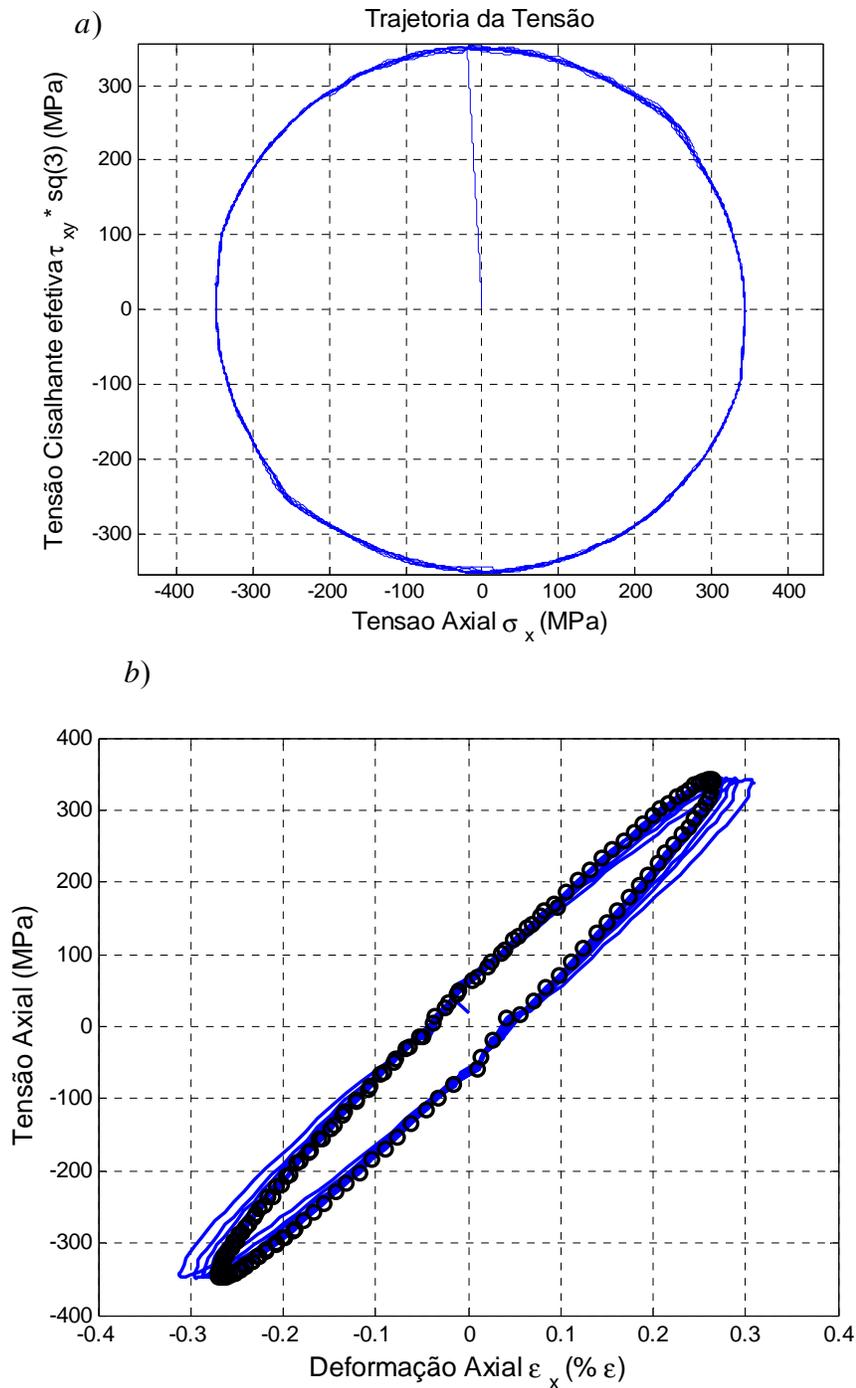
Figura 7.41 a) Encruamento NP da deformação axial  $\epsilon_x$  e b) encruamento NP da deformação cisalhante  $\gamma_{xy} / \sqrt{3}$ .

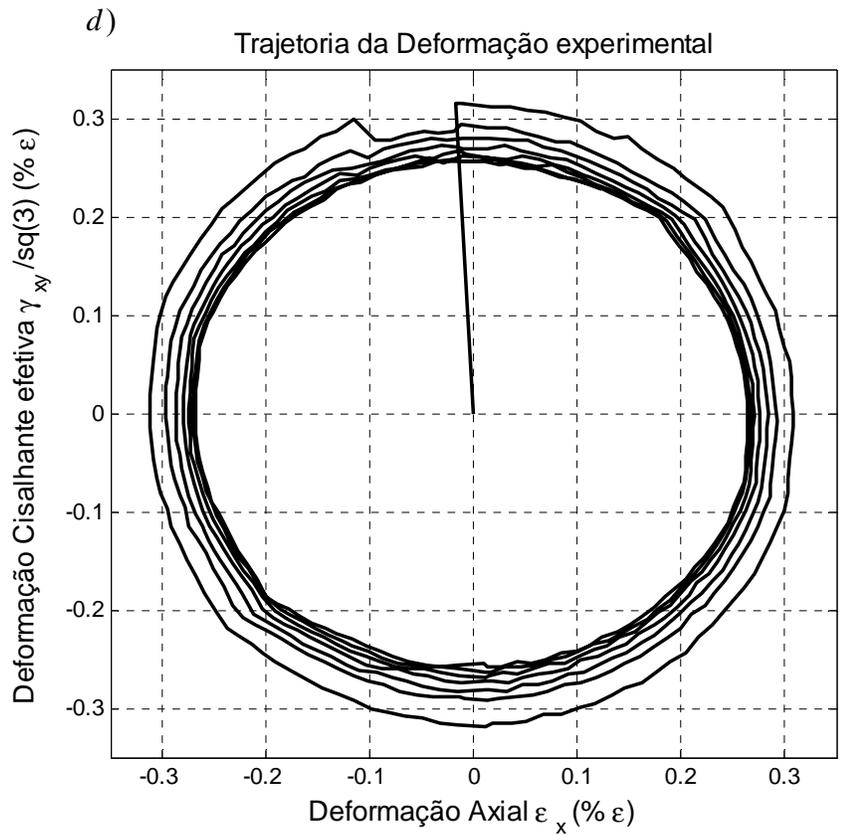
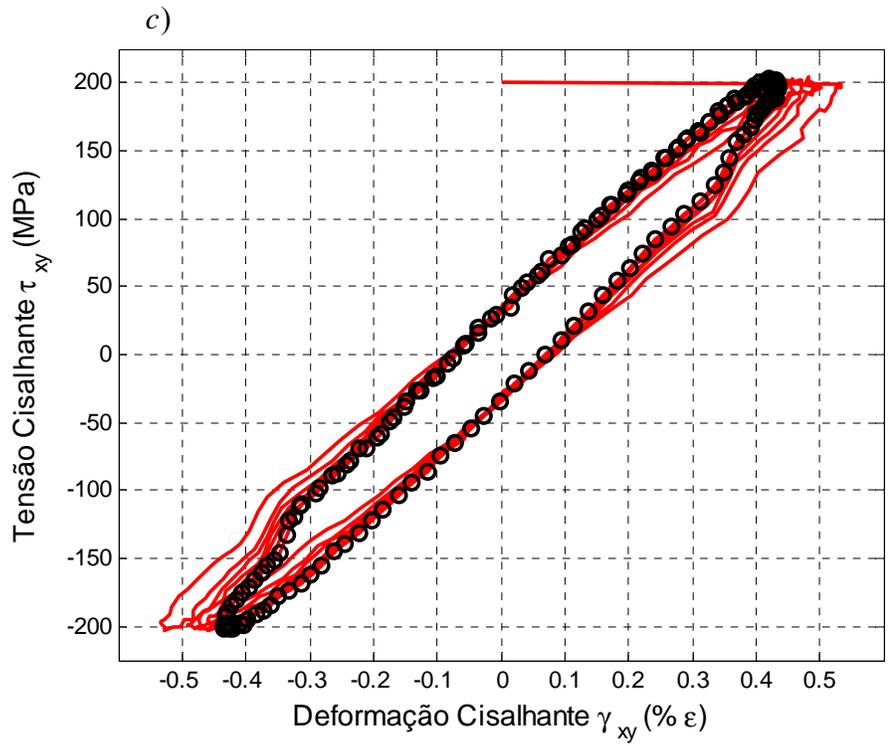
Para o terceiro ensaio, escolheu-se outro par de carregamentos NP, capaz de gerar uma deformação axial  $\Delta\epsilon_x / 2 \approx 0.31\%$ . Assim, na Figura 7.42 a) apresenta-se a trajetória de tensão gerada pela tensão axial  $\sigma_x(t) = 342.\sin(\omega t)$  MPa e a tensão cisalhante  $\tau_{xy}(t) = 200.\cos(\omega t)$  MPa escolhida. Na Figura 7.42 (b) apresenta-se o laço de histerese  $\sigma_x$  x  $\epsilon_x$  sobre o controle de tensão obtida no ensaio. Mostra-se que no primeiro ciclo o corpo de prova experimentou uma deformação axial  $\Delta\epsilon_x / 2 = 0.31\%$ , e foi encruando a cada ciclo até se estabilizar em  $\Delta\epsilon_x / 2 = 0.27\%$ .

A Figura 7.42 (c) apresenta a curva  $\tau_{xy}$  x  $\gamma_{xy} / \sqrt{3}$ . No primeiro ciclo obtém-se uma deformação cisalhante máxima de  $\Delta\gamma_{xy} / 2 \cong 0.54\%$  que experimenta encruamento a cada ciclo, prosseguindo até 12 ciclos, onde se estabiliza em uma deformação cisalhante  $\Delta\gamma_{xy} / 2 \cong 0.435\%$ .

Na Figura 7.42 d) apresenta-se a trajetória de deformação  $\epsilon_x$  x  $\gamma_{xy} / \sqrt{3}$  obtida experimentalmente na MTT e a Figura 7.42 e) apresenta a trajetória de deformação  $\epsilon_x$  x  $\gamma_{xy} / \sqrt{3}$  obtida pelo simulador para a história NP medida no ensaio. Na Figura

7.42 f) apresenta-se a trajetória de deformação  $\varepsilon_x \times \gamma_{xy} / \sqrt{3}$  estabilizada, onde a linha contínua representa a trajetória obtida pelo simulador e a obtida experimentalmente na MTT. Assim, as trajetórias de deformação, ao longo do ensaio, apresentaram o fenômeno de encruamento NP e convergem para uma deformação de  $\Delta\varepsilon / 2 = 0.26\%$ .





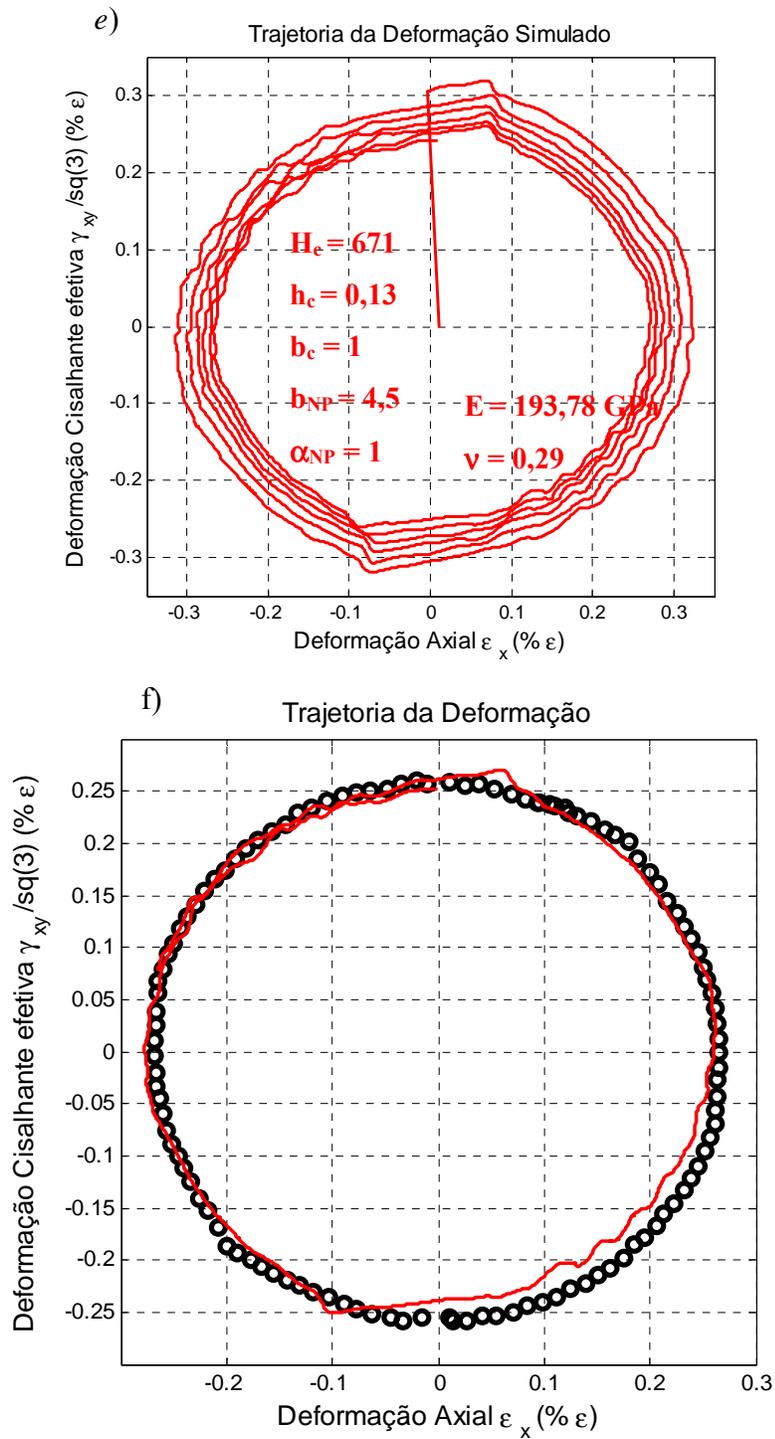


Figura 7.42 Ensaio EN do Inox-316 com  $\epsilon_x = 0.31\%$ , a) trajetória das tensões  $\sigma_x - \tau_{xy}\sqrt{3}$ , b) laço histerese  $\sigma_x - \epsilon_x$ , c) laço histerese  $\tau_{xy} - \gamma_{xy}$ , d) trajetória de deformação experimental  $\epsilon_x - \gamma_{xy}/\sqrt{3}$ , e) trajetória de deformação simulada

$\varepsilon_x - \gamma_{xy} / \sqrt{3}$ , f) trajetória de deformação estabilizada experimental e simulado.

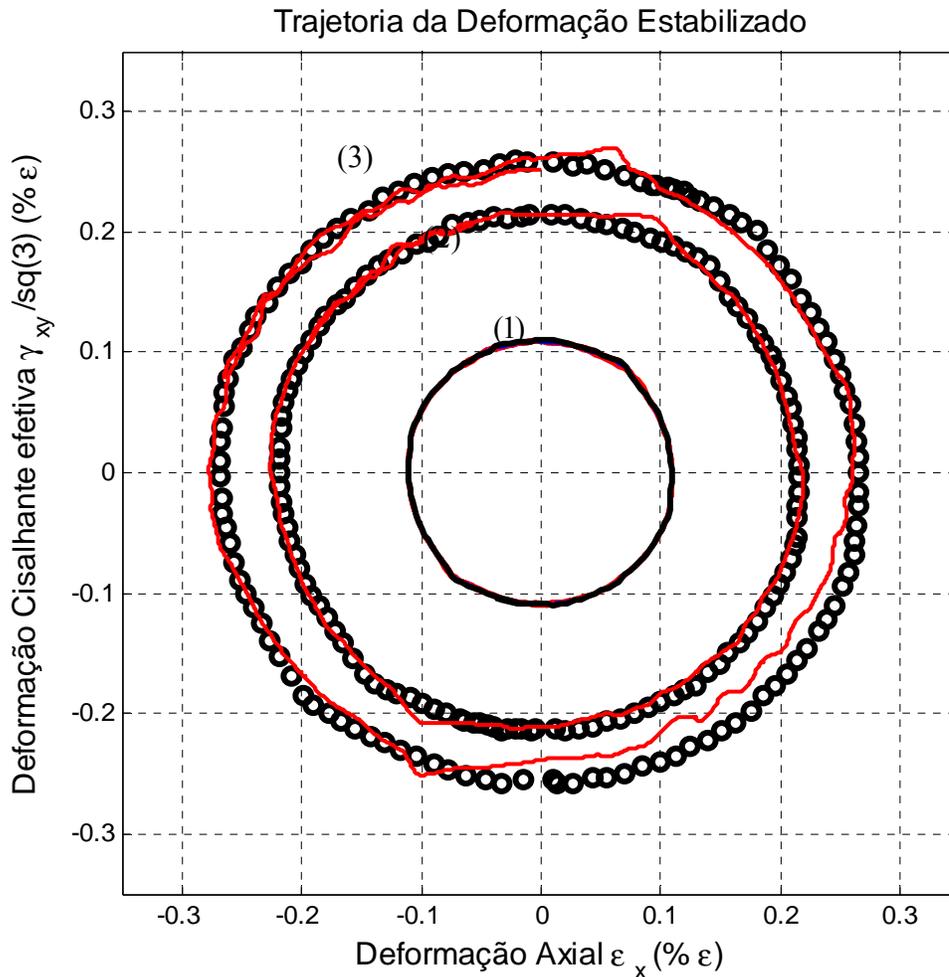


Figura 7.43 Trajetória de deformação  $\varepsilon_x$  vs  $\gamma_{xy} / \sqrt{3}$  no ensaio de encruamento NP do Aço inox-316 com  $\varepsilon_x = 0.1\%$ ,  $\varepsilon_x = 0.25\%$  e  $\varepsilon_x = 0.31\%$ .

Na figura 7.43 mostram-se as trajetórias da deformação, estabilizadas para as histórias de encruamento NP, no ensaio de encruamento NP.

Na figura 7.44 mostra-se que no primeiro ensaio (1) o material não apresenta encruamento, entretanto, no segundo (2) e terceiro (3) ensaio o material apresenta encruamento NP. Isto acontece devido ao aço inox-316 apresentar encruamento NP, por sua baixa energia de empilhamento de falhas e discordâncias bem espaçadas,

onde as bandas de deslizamento geradas pelas histórias proporcionais são sempre planas. Nestes materiais, os carregamentos NP geram bandas de deslizamento cruzadas em diversas direções, gerando-se encruamento no material. Este fenômeno não ocorre para  $\epsilon_x = 0.1\%$  porque o comportamento ainda era linear elástico.

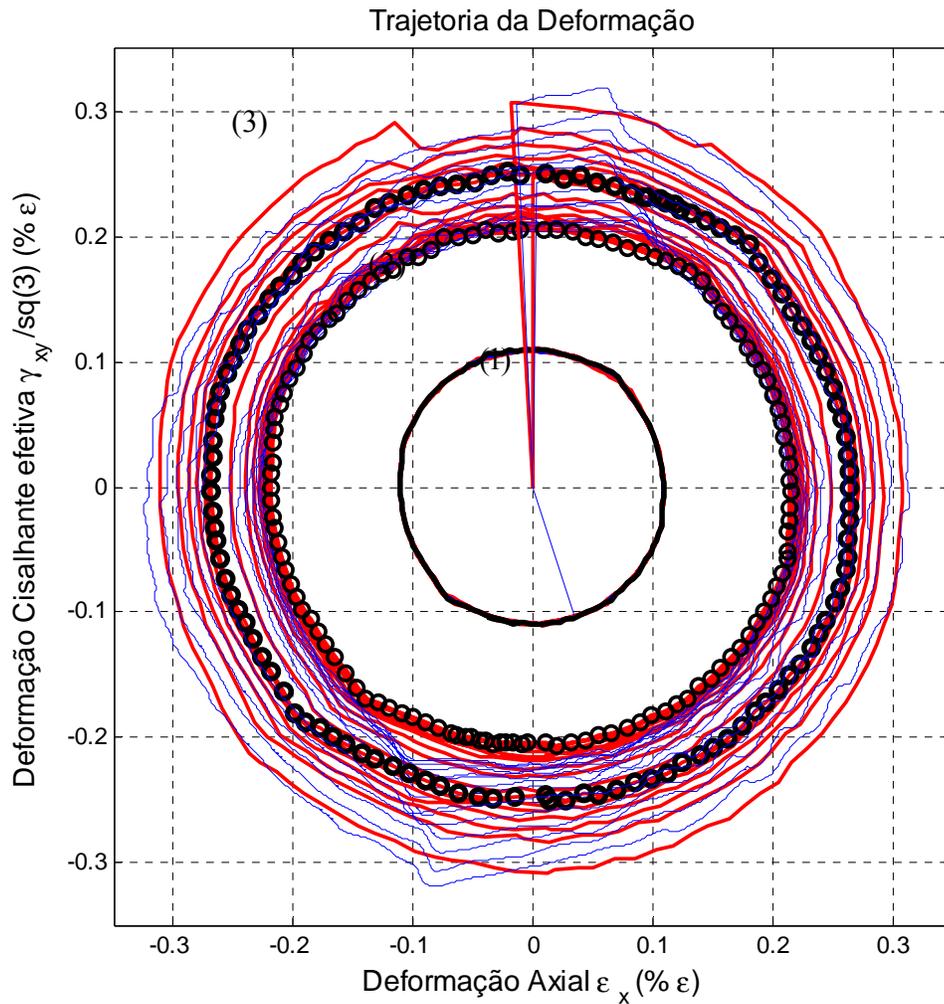


Figura 7.44 Trajetória de deformação  $\epsilon_x$  vs  $\gamma_{xy}/\sqrt{3}$  no ensaio de encruamento NP do Aço inox-316 com  $\epsilon_x = 0.1\%$ ,  $\epsilon_x = 0.25\%$  e  $\epsilon_x = 0.31\%$

## 8. Conclusões e Trabalhos Futuros

### 8.1. Conclusões

No presente trabalho foi desenvolvida uma máquina tração-torção, com atuadores eletromecânicos que geram cargas axiais na faixa de  $\pm 200$  kN e torque na faixa de  $\pm 1300$  N.m. Esta máquina permitiu avaliar experimentalmente modelos de plasticidade incremental que modelam fenômenos tais como ratcheting multiaxial e encruamento NP.

Desenvolveu-se, também, uma célula de carga e torque de baixo custo para ensaios de fadiga multiaxial tração/torção, com carregamentos na faixa de  $\pm 200$  kN e torque na faixa  $\pm 1300$  N.m. O transdutor foi usinado em um torno CNC pela complexidade do perfil de seus entalhes, os quais foram otimizados, visando minimizar-se o fator de concentração de tensões e aumentar, assim, sua vida à fadiga até 240 milhões de ciclos. O material escolhido para a estrutura do LTC foi uma liga de aço 4340, devido a sua fácil usinagem, pouca distorção e boa resposta ao tratamento térmico. As configurações dos extensômetros para formar as conexões da ponte *Wheatstone* de tração e torção levaram em consideração a compensação das cargas excêntricas, os efeitos de temperatura e a influência da torção nas medições de tração e vice-versa.

Implementou-se uma técnica *PID Sliding Control* para o controle de trajetória da força e/ou torque, aplicados ao corpo de prova. Esta técnica de controle não-linear conseguiu superar as não linearidades do sistema, tais como atrito, backlash e zona morta, como foi apresentado nos resultados experimentais.

A independência dos laços de controle de força e torque, e sua robustez a perturbações, permitiu controlar a trajetória da história de carregamentos complexos requerida pelos ensaios.

O controle de torque apresentou maior incerteza devido à excessiva rigidez da MTT, gerando grandes variações do torque causadas por pequenas variações na rotação do motor. Para atingir estas pequenas variações no torque é necessário micro rotações, com uma caixa de redução com maior razão de redução, ou flexibilização do sistema eletromecânico.

Os motoredutores do atuador de torção apresentaram problemas de aquecimento para os ensaios com grandes gamas de torque (acima de  $\pm 200$  N.m) e após 6 horas de ensaio. Este problema se dá devido à elevada corrente requerida pelo motor para alcançar o torque desejado, e pelos pequenos deslocamentos angulares do eixo do motor para se atingir o torque desejado. Ficando, assim, praticamente travado durante quase todo o ensaio.

As medições das deformações nos ensaios foram feitas utilizando-se um módulo de correlação de imagens VIC-3D da *Correlated Solutions*, o qual é sensível a vibração, motivo pelo qual devemos tomar cuidado com a vibração da MTT gerada pelos motores nos pontos de inversão (pico e vale da história do carregamento).

O alinhamento da MTT é um aspecto importante a levar em consideração para se evitar problemas de flexão indesejados no corpo de prova e/ou flambagem, invalidando o ensaio. Além disso, verificar e ajustar a calibração dos transdutores no início do ensaio é fundamental para a obtenção de medições confiáveis.

A representação 5D da tensão e deformação é altamente recomendada, já que reduz a dimensionalidade das relações tensão-deformação a partir de 6D para 5D. Em corpos de prova sem entalhes, submetido às histórias NP tração-torção ou uniaxial, pode-se utilizar um subespaço 2D ou 1D respectivamente da representação 5D.

Finalmente, o simulador desenvolvido para modelar o comportamento dos modelos de plasticidade incremental, modela satisfatoriamente os fenômenos de

encruamento NP e ratcheting uniaxial e multiaxial para cargas reais, desde que ajustados corretamente aos parâmetros do simulador para o material testado.

## **8.2. Trabalhos Futuros**

Como sugestões para trabalhos futuros na continuação desta tese, pode-se apontar:

Ampliar a modelagem da dinâmica da máquina tração-torção, a qual deverá considerar a modelagem do corpo de prova, transdutores, e as não linearidades do sistema eletromecânico tais como: folgas, zona mortas, atrito, etc. O ajuste do modelo ao comportamento real da MTT permitirá o projeto e avaliação de novas técnicas de controle.

Implementação de novas técnicas de controle para o controle de torque capaz de lidar com as não linearidades e a excessiva rigidez da MTT. A implementação de técnicas de controle mais robustos permitirá realizar ensaios multiaxiais com história de carregamentos NP complexos.

Analisar o projeto da MTT e incorporar componentes que permitam aumentar sua flexibilidade principalmente na torção. Este aumento da flexibilidade ajudaria melhorar o controle de torque e evitaria os problemas relacionados com o aquecimento dos motorreduzidos.

Avaliação experimental de novos modelos plasticidade incremental tais como, encruamento cinemático, encruamento NP, ratcheting multiaxial, tensão média de relaxamento. Além disso, ensaios de iniciação de trinca sobre história de carregamento NP, a avaliação experimental do fator de intensidade de tensão e a avaliação da vida à fadiga multiaxial.

## Bibliografia

- [1] Meggiolaro, M. A., Jaime T.P. Castro. "Evaluation of multiaxial Stress-Strain Models and fatigue Life Prediction Methods Under Proportional Loading". Department of Mechanical Engineering, Puc-Rio , Brasil.
  
- [2] Yongming Liu, Sankaran Mahadevan. "Multiaxial High-Cycle Fatigue Criterion and Life Prediction for Metals". Department of Civil and Environmental Engineering, 2005, USA.
  
- [3] Nishihara, T., Kawamoto, M., The strength of metals under combined alternating bending and torsion with phase difference, Memoirs of the College of Engineering, Kyoto Imperial University, vol. 11, pp. 85-112, 1945.
  
- [4] Gough, H. J., Pollard, H. V., Cleushaw, W. J. Some experiments on the resistance of metals to fatigue under combined stress. Memo 2522, Aeronautical research Council, HMSO, London, 1951.
  
- [5] Gonçalves, C. A, Fadiga multiaxial policíclica - modelagem e simulação, Dissertação de mestrado, Publicação ENM.DM-99A/06, Departamento de engenharia mecânica, Universidade de Brasília, Brasil, 2006.
  
- [6] Socie, D.F.; Marquis, G.B. "Multiaxial fatigue". SAE International, 1999.
  
- [7] Mroz, Z. "On the description of anisotropic work hardening", Journal of mechanics and Physics of Solids, v. 15, n. 163, p. 175, 1967.
  
- [8] Zeng, D., Xia, C. Z. "A modified Mroz model for Springback prediction", Journal of materials engineering and performance, vol. 16, pp. 293-300, 2007.

- [9] Garud, Y. S. "A new approach to the evaluation of fatigue under multiaxial loadings", *Journal of engineering materials and technology*, vol. 103, pp. 118-125, 1981,
- [10] Jiang, Y., Sehitoglu, H., "Modeling of Cyclic Ratchetting Plasticity, Part I: Development of Constitutive Relations," *ASME Journal of Applied Mechanics*, v.63, n.3, p.720-725, 1996.
- [11] Jiang, Y., Sehitoglu, H., "Modeling of Cyclic Ratchetting Plasticity, Part II: Comparison of Model Simulations with Experiments," *ASME Journal of Applied Mechanics*, v.63, n.3, p.726-733, 1996.
- [12] Sakane, M.; Itoh, T.; Kida, S.; Ohnami, M.; Socie, D., "Dislocation structure and non-proportional hardening of type 304 stainless steel", *European structural integrity society*, vol. 25, pp. 130-144, 1999.
- [13] Itoh, T.; Nakata, T.; Nasakane, M., "non-proportional low cycle fatigue of 6061 aluminum alloy under 14 strain paths, *European structural integrity society*, vol. 25, pp. 41-54, 1999.
- [14] Wu, M.; Itoh, T.; Shimizu, Y.; Nakamura, H.; Takanashi, M., "Low cycle fatigue life of Ti-6Al-4V alloy under non-proportional loading", *International journal of fatigue*, vol. 44, pp. 14-20, 2012.
- [15] Alva, J. G. C. Controle por aprendizado neuro-fuzzy aplicado a uma máquina de fadiga atuada por um musculo pneumático, Tese doutorado em engenharia mecânica, Puc-Rio, Rio de Janeiro, 2013.
- [16] Weibull, W. Fatigue testing and analysis of results, Advisory group for aeronautical research and development, Pergamon press, Oxford, 1961.
- [17] Instron Brasil, Al. Tocantins 280 - Unidade 7 Alphaville Industrial 06455-020 - Barueri, SP, Brasil. <http://www.instron.com.br/wa/product/MultiAxial-Test-Systems.aspx>

- [18] MTS System Corporation, "MTS 810 & 858 material test system". MTS. USA, 2013.
- [19] Zeng, D., Xia, C. Z. "A modified Mroz model for Springback prediction", Journal of materials engineering and performance, vol. 16, pp. 293-300, 2007.
- [20] Ralph Döring, J. Hoffmeyer, T. Seeger, M. Vormwald. "A Plasticity Model for Calculating Stress- Straining Sequences Under Multiaxial Nonproportional Cyclic Loading". Computational Material Science, Elsevier, 2003, pp 587 – 592, Germany.
- [21] B. Li, L. Reis, M. de Freitas "Simulations of cyclic Stress-Strain evolutions for Multiaxial Fatigue Life Prediction". Computational Material Science, Elsevier, 2006, pp 451 – 458, Portugal.
- [22] Chams Eddine Feraga, Ali Yousfi. "Robust Positional Control System for a Induction Actuator". European Journal of Scientific research, 2008, pp 687-692.
- [23] Castro Linares, Alvarez Gallegos, Alvarez Sanchez. "Angular Velocity and Position Control of a Permanent Magnet Stepper Motor". Department of Electrical Engineering, CINVESTAV-IPN, D. F. Mexico.
- [24] Jinpeng Yu, Bing Chen, Haisheng Yu. "Position Tracking Control of Induction Motor Via Adaptive Fuzzy Backstepping". Institute of Complexity Science, 2010, Quingdao, China.
- [25] Ilyuchin, A. A., Plasticité, Éditions Eyrolles, Paris, 1956.
- [26] Mandel, J., Cours de Mécanique des Milieux Continus, tomes I and II, Gauthier-Villars, Paris, 1966.
- [27] Bishop, J.E., Characterizing the non-proportional and out-of-phase extend of tensor paths, Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures, v.23, pp.1019-1032, 2000.

- [28] Hannah, R.L.; Reed, S.E. "Strain Gage User's Handbook", London, Elseiver 1992, 294 pp.
- [29] Micro-Measurements. "Transducer Class Strain Gage" Vishay Precision Group. USA 2011.
- [30] Albuquerque, D. "On the improved and the optimum notch shape", Pontificia Universidade Catolica de Rio de Janeiro, 2012. 56 pp.
- [31] Hannah, R.L.; Reed, S.E. "Strain Gage User's Handbook", London, Elseiver 1992, 327 pp.
- [32] Meggiolaro. M. A., Castro. J. T. P. "Técnicas e Práticas de Dimensionamento Estrutural Sobre Cargas reais de Serviço - Volume I", Rio de Janeiro, CreateSpace, 2009, 156 pp.
- [33] Shigley, J.E.; Mischke, C.R.; Budynas, RG. Mechanical Engineering design, 7<sup>th</sup> ed., McGraw-Hill 2004.
- [34] Juvinall. R. C. "Stress, Strain & Strength", McGraw-Hill 1967.
- [35] Mihai, S. D. "Handbook of Force Tranducers - Principles and Components", Springer, 2011.
- [36] Micro-Measurements. " Shun Calibration of Strain Gage Instrumentation" Vishay Precision Group. USA 2010.
- [37] F. Rodriguez, M. Lopez. "Controle adaptativo e robusto". Espanha, Universidade de sevilla, 1996, pp 17 - 20.
- [38] Mazzone, V. Controladores PID, Departamento de Automação e controle industrial, Universidade nacional de Quilmes, 2002.
- [39] VISIOLI, A. **Practical PID Control**. Springer. London, 2006. 322 p.

- [40] Liu, J.; Wang, X. "Advanced sliding mode control for mechanical systems - Design, Analysis and MATLAB simulation", Springer, New York, 2012.
- [41] Agostinho, A. C. " Controle por modos Deslizantes aplicados a sistemas de posicionamento dinâmico", Escola politécnica da universidade de São Paulo, 2009.
- [42] Slotine, J. J.; Li, W. Applied nonlinear control, Prentice Hall, New jersey, 1991.
- [43] Perruquetti, W.; Barbot, J.P. Sliding mode control in engineering, CRC Press, 2002
- [44] Fallahi, M.; Azadi, S. Robust control of DC motor using fuzzy sliding control with PID compensator, Poceedings of the international multiconference of engineers and computer scientists, Vol II, Hong Kong, 2009.
- [45] Pastorino, R.; Naya, M.A.; Perez, J.A.; Cuadrado, J. "Geared PM coreless motor modelling for driver's force feedback in steer-by-wire systems", Mechatronics, Elseiver, 2011.
- [46] Hassan, T; Kyriakides, S. Ratcheting in cyclic plasticity, Part I: Uniaxial behavior, International journal of plasticity. Vol. 8, pp. 91-116, USA,1992.
- [47] Colak, O.U; Krempl, E. Modeling of uniaxial and biaxial ratcheting behavior of 1026 carbon steel using the simplified viscoplasticity theory based on overstress
- [48] Jiang, Y., Sehitoglu, H., "Modeling of Cyclic Ratchetting Plasticity, Part I: Development of Constitutive Relations," ASME Journal of Applied Mechanics, v.63, n.3, p.720-725, 1996.
- [49] Jiang, Y., Sehitoglu, H., "Modeling of Cyclic Ratchetting Plasticity, Part II: Comparison of Model Simulations with Experiments," ASME Journal of Applied Mechanics, v.63, n.3, p.726-733, 1996.

- [50] Basaruddin, K.S; Wooi, L.C. Uniaxial ratcheting of Mild Steel Under Cyclic Tension, International Conference on Applications and Design in Mechanical Engineer, Malaysia, 2009.
- [51] Lemaitre, J; Chaboche, J.L. Mechanics of Solid Materials, Bordas, Paris, 1994.
- [52] Masing, G. "Eigenspannungen and verfestigung beim messing" Proceeding of the 2nd International Congresso of Applied Mechanics, Zurich, Switzerland, 1926.
- [53] Tanaka, E. A non-proportional parameter and a cyclic viscoplastic constitutive model taking into account amplitude dependences and memory effects of isotropic hardening, European Journal of Mechanics- A/Solids, v.13, p.155-173, 1994.
- [54] Ilyuchin, A. A., Plasticité, Éditions Eyrolles, Paris, 1956.
- [55] Mandel, J., Cours de Mécanique des Milieux Continus, tomes I and II, Gauthier-Villars, Paris, 1966.
- [56] Papadopoulos IV, Davoli P, Gorla C, Filippini M, Bernasconi A. A comparative study of multiaxial high-cycle fatigue criteria for metals. Int J Fatigue 1997;19:219–35. (Reduced Euclidean space, good review of Mohr-type criteria
- [57] Bishop, J.E., Characterizing the non-proportional and out-of-phase extend of tensor paths, Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures, v.23, pp.1019-1032, 2000.
- [58] Ilyushin, A. A., On the foundations of the general mathematical theory of plasticity. In: Voprosy Teorii Plastichnosti, pp. 3-29. Moskva: Izd. AN SSSR, 1961. (In Russian.)

- [59] Gough, H. J., Pollard, H. V., Cleushaw, W. J. Some experiments on the resistance of metals to fatigue under combined stress. Memo 2522, Aeronautical research Council, HMSO, London, 1951.
- [60] Nishihara, T., Kawamoto, M., The strength of metals under combined alternating bending and torsion with phase difference, Memoirs of the College of Engineering, Kyoto Imperial University, vol. 11, pp. 85-112, 1945.
- [61] Gonçalves, C. A, Fadiga multiaxial policíclica - modelagem e simulação, Dissertação de mestrado, Publicação ENM.DM-99A/06, Departamento de engenharia mecânica, Universidade de Brasília, Brasil, 2006.
- [62] Alva, J. G. C. Controle por aprendizado neuro-fuzzy aplicado a uma máquina de fadiga atuada por um musculo pneumático, Tese doutorado em engenharia mecânica, Puc-Rio, Rio de janeiro, 2013.
- [63] Weibull, W. Fatigue testing and analysis of results, Advisory group for aeronautical research and development, Pergamon press, Oxford, 1961.
- [64] MTS System Corporation, "MTS Bionix Tabletop test system". MTS. USA, 2013
- [65] MTS System Corporation, "MTS 810 & 858 material test system". MTS. USA, 2013.
- [66] Zeng, D., Xia, C. Z. "A modified Mroz model for Springback prediction", Journal of materials engineering and performance, vol. 16, pp. 293-300, 2007.
- [67] Garud, Y. S. "A new approach to the evaluation of fatigue under multiaxial loadings", Journal of engineering materials and technology, vol. 103, pp. 118-125, 1981,
- [68] Sakane, M.; Itoh, T.; Kida, S.; Ohnami, M.; Socie, D., "Dislocation structure and non-proportional hardening of type 304 stainless steel", European structural integrity society, vol. 25, pp. 130-144, 1999.

- [69] Itoh, T.; Nakata, T.; Nasakane, M., "non-proportional low cycle fatigue of 6061 aluminum alloy under 14 strain paths, European structural integrity society, vol. 25, pp. 41-54, 1999.
- [70] Wu, M.; Itoh, T.; Shimizu, Y.; Nakamura, H.; Takanashi, M., "Low cycle fatigue life of Ti-6Al-4V alloy under non-proportional loading", International journal of fatigue, vol. 44, pp. 14-20, 2012.

## Apêndice A

### A.1 Determinação da força e momento da MTT

A MTT foi projetada para trabalhar com uma capacidade máxima de 25 kN na tração. Entretanto, o torçor máximo requerido pelo sistema é determinado baseado no critério de máxima tensão cisalhante, que é capaz de produzir o mesmo efeito num corpo de prova na tração pura quanto na torção pura.

Para determinar o momento torçor  $T$ , escolhe-se um corpo de prova tubular de parede delgada, dado que as tensões, devido à torção, variam linearmente com a distância ao centro, conforme expresso na Equação (A.1). Assim, o perfil de tensões no corpo de prova tubular pode-se considerar quase constante como se representa na Figura A.1.

$$\tau = G \cdot \gamma = G \cdot \rho \cdot \theta \quad (\text{A.1})$$

onde,  $G$  é o módulo de elasticidade de cisalhamento,  $\gamma$  é a deformação de cisalhamento (rad.),  $\rho$  é o raio medido do centro e  $\theta$  é a razão de torção.

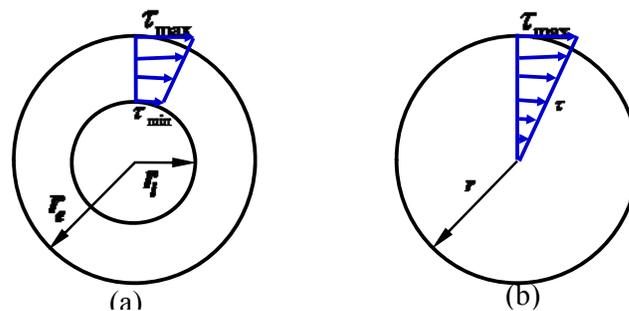


Figura A.1 Tensão de cisalhamento a) tubo circular e b) eixo circular em torção

A carga máxima trativa sobre o corpo de prova (CP) tubular gera uma tensão de escoamento  $S_E$  e uma tensão de cisalhamento  $\tau_E$ . Logo, segundo o critério de máxima tensão cisalhante, o sistema deveria gerar o mesmo efeito tanto na tração

quanto na torção, portanto é a mesma tensão cisalhante representada pela equação (A.2)

$$\tau_E = \frac{S_E}{2} \quad (A.2)$$

Na torção pura, a tensão de cisalhamento  $\tau$  induzida sobre o corpo de prova é dada por

$$\tau = \frac{T \cdot \rho}{J} \quad (A.3)$$

onde  $T$  é o momento torçor em torção pura,  $J$  é o momento polar de inércia e  $\rho$  é o raio médio do CP.

Utilizando a equação (A.2) e (A.3) pode-se determinar o valor do momento torçor máximo  $T$  requerido pelo sistema, dado por

$$T = \frac{S_E \cdot J}{2 \cdot \rho} \quad (A.4)$$

Assuma um corpo de prova tubular de aço com  $D_e = 25$  mm, com uma tensão ao escoamento  $S_E = 1400$  MPa, como mostra-se na Figura A.2.

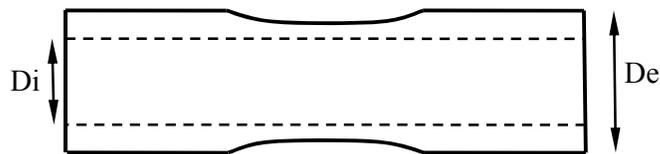


Figura A.2 Corpo de prova de tubular

O valor de  $D_i$  calcula-se a partir da carga máxima e do ponto de escoamento, pela equação (A.5).

$$D_i = \sqrt{D_e^2 - \frac{4 \cdot P}{\pi \cdot S_E}} \quad (A.5)$$

Substituindo-se os valores de  $P$ ,  $S_E$  e  $D_e$  nas equações (A.4) e (A.5) tem-se

$$D_i = 20 \text{ mm} \text{ e } T = \frac{\pi \cdot S_E \cdot (D_e^4 - D_i^4)}{32 \cdot D_e} = 1278 \text{ N.m}$$

Portanto, a máquina tração-torção gera uma carga trativa máxima de  $P = 250$  kN e um momento torçor máximo de  $T \cong 1300$  N.m

## **A.2**

### **Análise da rigidez axial e torsional da MTT (biaxial)**

Nesta seção apresenta-se a análise da rigidez axial gerada pela carga axial e pela rigidez torsional devido ao momento torçor. A rigidez é a resistência de um corpo sólido ou componente estrutural para suportar tensões sem gerar deformação ou deslocamentos muito grandes.

A MTT é projetada para trabalhar na zona elástica. Portanto, pode-se utilizar o método de superposição para estudar os efeitos da carga trativa e o momento torçor, como apresentado a continuação.

#### **A.2.1**

##### **Calculo da rigidez axial**

A rigidez axial de uma viga ou componente estrutural é a medida de sua capacidade de resistir às tentativas de alongamento ou encurtamento através da aplicação de cargas ao longo de seu eixo e dado por:

$$K_a = \frac{P}{\delta} = \frac{E \cdot A}{L} \quad (\text{A.6})$$

onde  $A$  representa área de sua seção transversal,  $E$  o módulo de elasticidade,  $\delta$  o deslocamento na direção axial e  $L$  seu comprimento.

##### **A.2.1.1**

###### **Calculo analítico**

Para o cálculo analítico da rigidez utiliza-se o modelo simplificado da MTT, o qual se constitui como um pórtico com duas vigas AB e CD e duas colunas AC e BD, como se apresenta na Figura A.3.

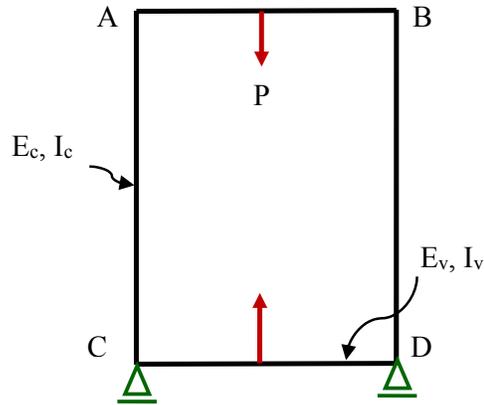


Figura A.3 Modelo simplificado da MTT

A Figura A.3 apresenta um caso de viga Hiperestática, e para o cálculo das deformações ou deslocamento pode-se aplicar o estudo de pórticos e quadros. Portanto, neste caso, tem-se um pórtico simetricamente carregado no meio das vigas AB e CD. Logo, a forma deformada do pórtico devido à carga trativa aplicada apresenta-se na Figura A.4 pela linha tracejada.

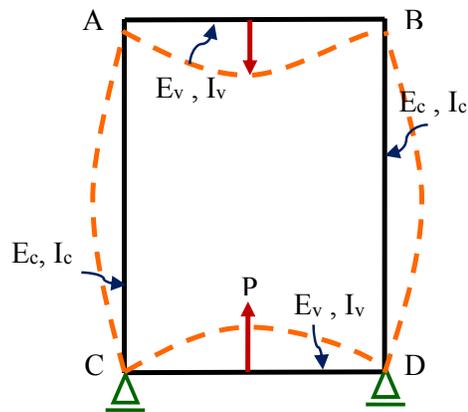


Figura A.4 Modelo deformado da MTT pela força trativa

Nos extremos das vigas AB e CD aparecem os momentos  $M_1$  e  $M$  respectivamente, como mostrado na Figura A.4, os quais se opõem ao giro dos extremos em ditas vigas e representam a ação das colunas sobre as vigas horizontais. Neste caso, consideram-se os momentos  $M_1$  e  $M$  como as únicas ligaduras hiper-estáticas existentes no modelo. Portanto, podem-se determinar sem dificuldade as deflexões do modelo simplificado da MTT.

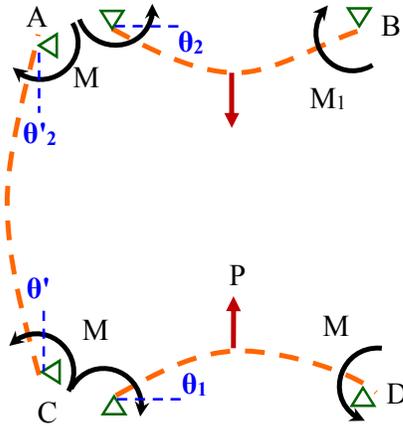


Figura A.5 Separação das vigas e colunas da MTT submetidas à tração

Na Figura A.5 pode-se observar que nos extremos A, B, C e D temos uniões rígidas entre as vigas e as colunas. Assim, o giro no extremo esquerda da viga horizontal CD deve ser igual ao giro do extremo inferior da coluna AC, representado pela equação (A.7).

$$\theta_1 = \theta_1' \quad (\text{A.7})$$

De modo Similar, o giro do extremo esquerda da viga AB deve ser igual ao giro do extremo superior da coluna AC, como se dá na equação (A.8).

$$\theta_2 = \theta_2' \quad (\text{A.8})$$

O valor de  $\theta_1$ , determina-se como a rotação gerado pela força  $P$  e a rotação no sentido contrário, dado o momento  $M$  na viga CD, o que é determinado pela equação (A.9).

$$\theta_1 = \frac{M.L}{2.E_v.I_v} - \frac{P.L^2}{16.E_v.I_v} \quad (\text{A.9})$$

onde,  $E_v$  é o módulo de elasticidade da viga,  $I_v$  é o momento de inércia e  $L$  seu comprimento.

De semelhante modo, o ângulo de rotação  $\theta_2$  é gerado pela força  $P$  e pelo momento  $M_1$  sobre a viga AB, conforme apresentado na equação (A.10).

$$\theta_2 = \frac{P.L^2}{16.E_v.I_v} - \frac{M_1.L}{2.E_v.I_v} \quad (A.10)$$

Por outro lado, o ângulo de rotação  $\theta'_1$  e  $\theta'_2$  é gerado pelos momentos  $M$  e  $M_1$  aplicados sobre a coluna AC é expresso pelas equações (A.11) e A(12).

$$\theta'_1 = -\left( \frac{M.H}{3.E_c.I_c} + \frac{M_1.H}{6.E_c.I_c} \right) \quad (A.11)$$

$$\theta'_2 = \frac{M.H}{6.E_c.I_c} + \frac{M_1.H}{3.E_c.I_c} \quad (A.12)$$

onde  $E_c$ ,  $I_c$  são o módulo de elasticidade, o momento de inércia e o comprimento da coluna, respectivamente.

Determina-se  $M$  e  $M_1$ , substituindo-se as equações de (A.9), até (A.12) na equação (A.7) e (A.8).

$$\left( \frac{L}{2.E_v.I_v} + \frac{H}{3.E_c.I_c} \right).M + \left( \frac{H}{6.E_c.I_c} \right).M_1 = \frac{P.L^2}{16.E_v.I_v} \quad (A.13)$$

$$\left( \frac{H}{6.E_c.I_c} \right).M + \left( \frac{L}{2.E_v.I_v} + \frac{H}{3.E_c.I_c} \right).M_1 = \frac{P.L^2}{16.E_v.I_v} \quad (A.14)$$

Resolvendo o sistema de equações se obtém:

$$M = \frac{P.L}{8} \cdot \frac{1}{\left( 1 + \frac{H.E_v.I_v}{L.E_c.I_c} \right)} \quad (A.15)$$

$$M_1 = \frac{P.L}{8} \cdot \frac{1}{\left( 1 + \frac{H.E_v.I_v}{L.E_c.I_c} \right)} \quad (A.16)$$

Assim, pode-se concluir que, dado à simetria da MTT, o valor de  $M$  e  $M_1$  são iguais. Ao se Conhecer os momentos, pode-se construir o diagrama de momentos fletores como se mostrado na Figura A.6, onde as reações verticais e horizontais nos extremos A, B, C e D são obtidas pelas equações de equilíbrio estático.

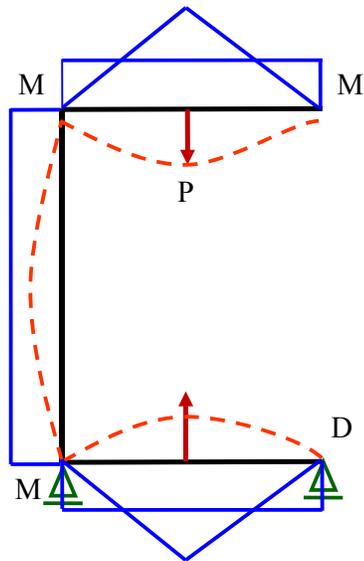


Figura A.6 Diagrama de momentos fletores da MTT

A partir da Figura A.6 pode-se determinar a deflexão ou o deslocamento que se experimenta tanto nas vigas, como nas colunas. Na viga AB apresenta-se o maior momento fletor no seu ponto meio. Portanto, está é a zona onde que apresenta a maior deflexão e se dá pela equação (A.17).

$$\delta_{Y\_AB} = \frac{P.L^3 - 6.M_1.L^2}{48.E_v.I_v} \quad (A.17)$$

De modo semelhante, na viga CD a maior deflexão é no seu ponto meio, e se dá pela equação (A.18).

$$\delta_{Y\_CD} = \frac{6.M.L^2 - P.L^3}{48.E_v.I_v} \quad (A.18)$$

onde  $P$  é a força máxima aplicada,  $M$  o momento gerado nos extremos da viga,  $E, I, L$  são o módulo de elasticidade, o momento de inércia e o comprimento da viga, respectivamente.

Por outro lado, as colunas  $AC$  e  $BD$  apresentam deflexão na direção " $x$ " causada pelo momento fletor  $M$ , e na direção " $y$ " causada pela força de travessa  $P$ . Então, as deflexões nas colunas são determinadas por

$$\delta_{X\_AC} = \frac{M.H.(H-1)}{2.E_c.I_c} \quad (A.19)$$

$$\delta_{Y\_AC} = \frac{P.H}{A_c.E_c} \quad (A.20)$$

onde  $M$  é o momento gerado nos extremos da coluna,  $E_c, I_c, A_c, H$  são o módulo de elasticidade, momento de inércia, a área e o comprimento da coluna, respectivamente.

A deflexão total da máquina MTT é dada pela soma das deflexões das vigas e das colunas. Portanto, as deflexões totais são dadas por:

$$\delta_Y = \delta_{Y\_AC} + \delta_{Y\_AB} - \delta_{Y\_CD}$$

$$\delta_Y = \frac{P.H}{A_c.E_c} + \frac{P.L^3 + 6.M.L^2}{24.E_v.I_v} \quad (A.21)$$

$$\delta_X = \delta_{X\_AC} + \delta_{X\_BD}$$

$$\delta_X = \frac{M.H.(H-1)}{E_c.I_c} \quad (A.22)$$

A máquina MTT é constituída de duas vigas de comprimento  $L = 710$  mm e de uma seção transversal quadrada, de altura  $h = 250$  mm e de largura  $b = 260$  mm com duas colunas de diâmetro  $D = 75$  mm e comprimento  $H$ , cujo valor determina-se pelo comprimento mais longo do corpo de prova  $l_c$  a ser usado, o comprimento das garras  $l_g$  (tomando como referência as garras da Instron 8501) e a altura da viga  $h$ .

$$H = l_c + 2.l_g + h \quad (A.23)$$

Assim, para  $l_c = 150$  mm,  $l_g = 250$  mm, tem-se o valor de  $H = 900$  mm, as vigas e colunas são de aço com  $E_v = E_c = 200$  GPa módulo de elasticidade. O valor da rigidez axial da máquina MTT é dado pela equação (A.6).

Deflexão superior:

$$\delta_{sup} = \delta_{Y\_AC} + \delta_{Y\_AB} \quad \delta_{sup} = 1,548.10^{-4} \quad m$$

Deflexão inferior:

$$\delta_{inf} = \delta_{Y\_CD} \quad \delta_{inf} = -2,746.10^{-5} \quad m$$

Deflexão total:

$$\delta_{\text{Total}} = |\delta_{\text{sup}} - \delta_{\text{inf}}| \quad \delta_{\text{Total}} = 1,822.10^{-4} \quad \text{m}$$

Rigidez axial da máquina MTT

$$K_a = \frac{P}{\delta_{\text{Total}}} = \frac{250000}{1,822.10^{-4}} \quad K_a = 1372 \quad \text{MN/m}$$

### A.2.1.2 Calculo utilizando Ftool.

Os cálculos das deflexões do modelo simplificado da MTT foram avaliadas utilizando-se o software Ftool, com o propósito de verificar os cálculos analíticos.

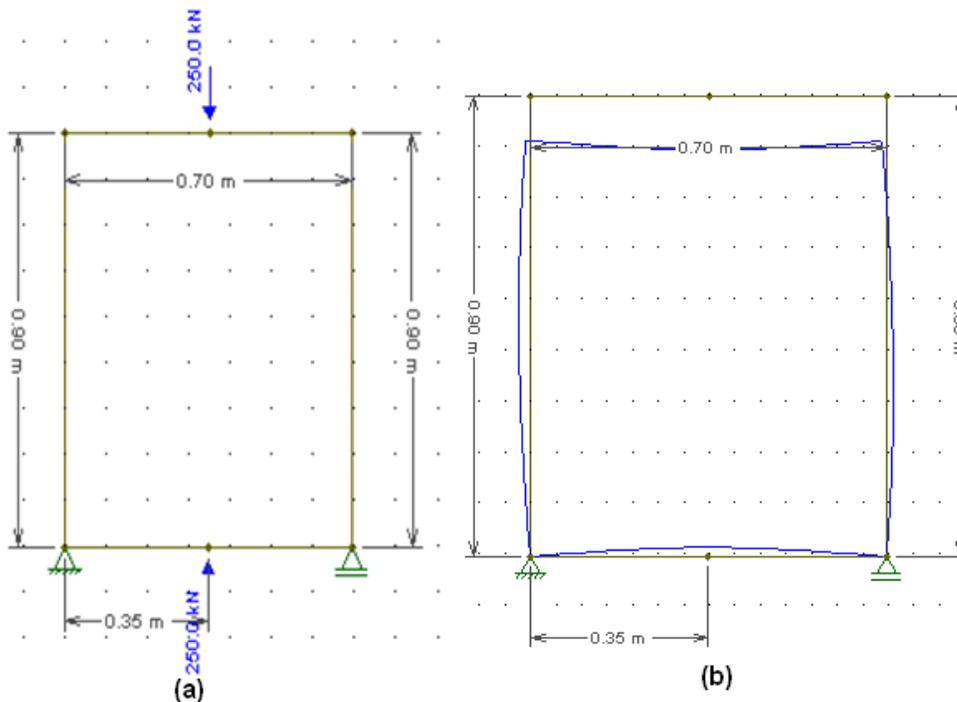


Figura A.7 (a) Modelo simplificado da MTT no Ftools e (b) deflexão da MTT, devido à carga trativa

Na figura A.7 (b) apresenta-se o modelo deformado da máquina MTT devido à carga trativa no software Ftool. Os cálculos foram realizados para as mesmas dimensões e cargas utilizadas no cálculo analítico e os resultados são os seguintes:

Deflexão Superior:

Displ. at local pos.: x = 0.00 m L = 0.34 m - Dx: -1.152e-002 mm Dy: -1.537e-001 mm

$$\delta_{\text{sup}} = \delta_{Y\_AC} + \delta_{Y\_AB} \quad \delta_{\text{sup}} = -1,537.10^{-4} \quad \text{m}$$

Deflexão inferior:

Displ. at local pos.: x = 0,00 m L = 0,35 m - Dx: 1,021e-006 mm Dy: 2,598e-002 mm

$$\delta_{\text{inf}} = \delta_{Y\_CD} \quad \delta_{\text{inf}} = 2,598.10^{-5} \quad \text{m}$$

Deflexão total:

$$\delta_{\text{Total}} = |\delta_{\text{sup}} - \delta_{\text{inf}}| \quad \delta_{\text{Total}} = 1,797.10^{-4} \quad \text{m}$$

Rigidez axial da máquina MTT:

$$K_a = \frac{P}{\delta_{\text{Total}}} = \frac{250000}{1,797.10^{-4}} \quad K_a = 1391 \quad \text{MN/m}$$

### A.2.1.3 Calculo utilizando ansys.

Os cálculos das deflexões do modelo simplificado da MTT também foram avaliados utilizando o software Ansys, com o propósito de verificar os cálculos analíticos e do Ftool. Na Figura A.8 apresenta-se o modelo deformado da MTT no software Ansys.

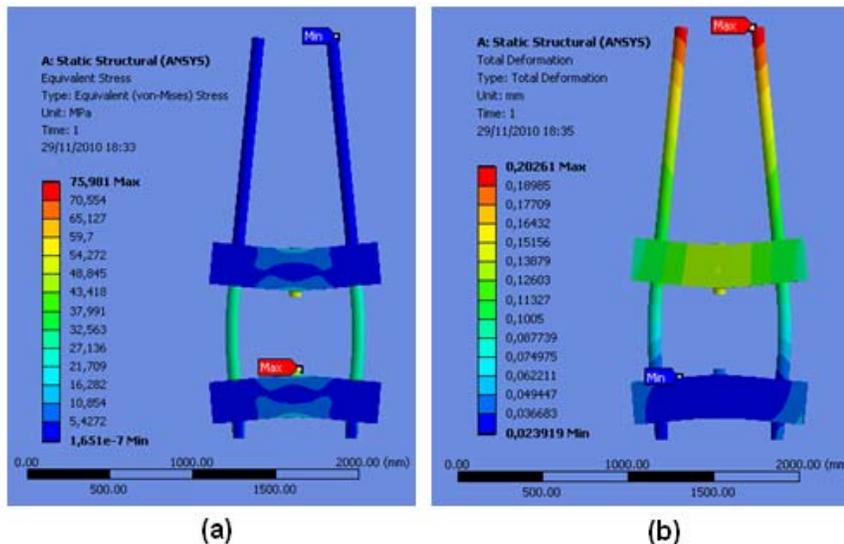


Figura A.8 Simulações do modelo simplificado da MTT (a) Tensão e (b) deflexão da MTT, devido à carga trativa

Na Figura A.9 apresenta-se o modelo deformado da máquina MTT na direção

" y " devido à carga trativa.

Os cálculos foram realizados para as mesmas dimensões e cargas utilizadas no cálculo analítico e no Ftool e os resultados foram os seguintes:

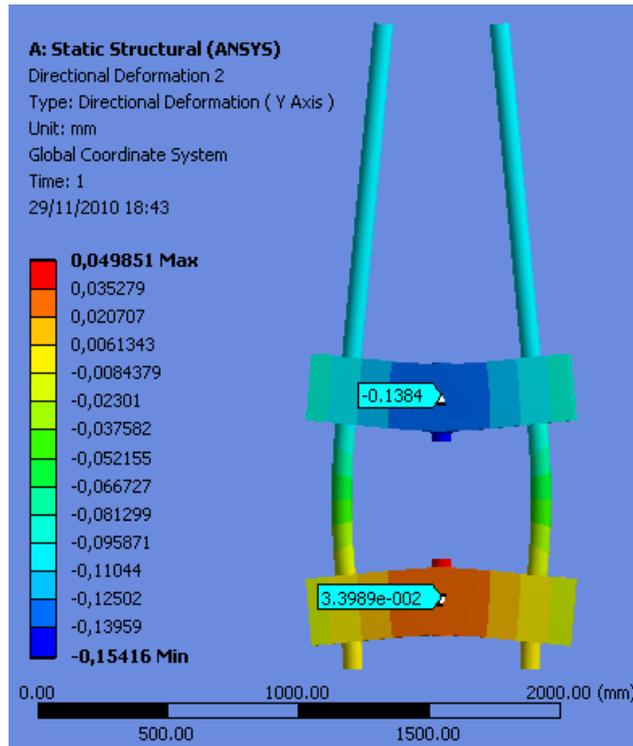


Figura A.9 Deformação na direção " y " do modelo simplificado da MTT no Ansys

Deflexão Superior:

$$\delta_{\text{sup}} = \delta_{Y\_AC} + \delta_{Y\_AB} \quad \delta_{\text{sup}} = -1,384 \cdot 10^{-4} \quad \text{m}$$

Deflexão inferior:

$$\delta_{\text{inf}} = \delta_{Y\_CD} \quad \delta_{\text{inf}} = 3,3989 \cdot 10^{-5} \quad \text{m}$$

Deflexão total:

$$\delta_{\text{Total}} = |\delta_{\text{sup}} - \delta_{\text{inf}}| \quad \delta_{\text{Total}} = 1,724 \cdot 10^{-4} \quad \text{m}$$

Rigidez axial da máquina MTT:

$$K_a = \frac{P}{\delta_{\text{Total}}} = \frac{250000}{1,724 \cdot 10^{-4}} \quad K_a = 1449 \quad \text{MN/m}$$

## A.2.2

## Cálculo da rigidez torsional

A rigidez torsional de uma viga, ou componente estrutural, é a relação entre o momento torçor aplicado no extremo e o ângulo girado mantendo fixo o outro extremo.

$$K_t = \frac{T}{\theta} = \frac{GJ}{L} \quad (\text{A.24})$$

onde  $T$  é o momento torçor,  $\theta$  o ângulo de rotação e  $G, J, L$  são o módulo de elasticidade ao cisalhamento, o momento polar de inércia e o comprimento, respectivamente.

### A.2.2.1 Cálculo analítico.

Para o cálculo analítico da rigidez torsional, sobre o modelo simplificado da MTT, aplica-se o momento torçor máximo  $T = 1300 \text{ N.m}$ , conforme se apresenta na Figura A.10.

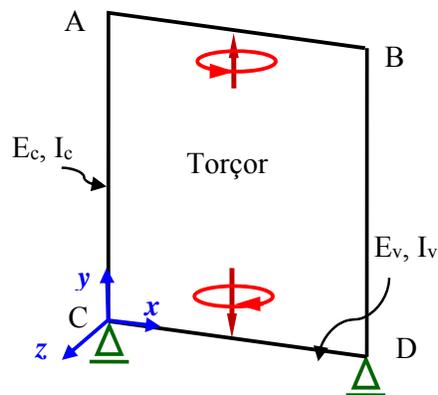


Figura A.10 Modelo simplificado da MTT sobre Torção

A Figura A.10 apresenta um caso de viga estática sobre a qual se aplica um torçor e para sua análise, utiliza-se o estudo dos pórticos e quadros.

A forma do pórtico, depois da deformação pela ação do momento torçor  $T$ , é representada pela linha laranja, como se apresenta na Figura A.11.

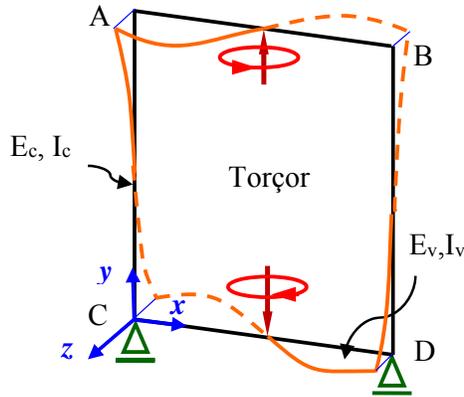


Figura A.11 Modelo deformado da MTT pela Torção.

O momento torçor  $T$  gera forças nos extremos das vigas  $AB$  e  $CD$ , que se opõem ao giro dos extremos das vigas e representam, a ação das colunas sobre as vigas horizontais. Na Figura A.12 mostra-se somente a metade do modelo pela simetria.

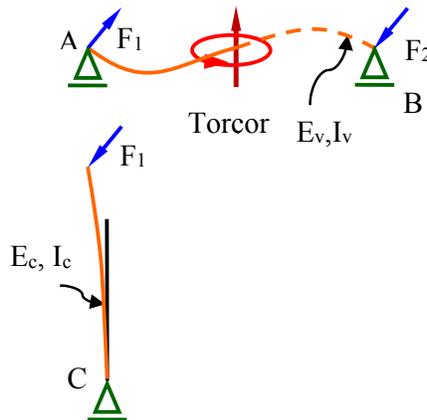


Figura A.12 Separação das vigas e das colunas da MTT submetido à torção.

Portanto, conhecendo-se as forças  $F_1$  e  $F_2$  pode-se determinar, sem dificuldade, as deflexões e as rotações geradas pelo torçor  $T$  sobre o modelo simplificado do MTT, através da simetria,  $F = F_1 = F_2$ , dado por:

$$F = \frac{T}{L} \quad (\text{A.25})$$

onde  $L$  é o comprimento da viga.

Na Figura A.13, apresenta-se o deslocamento do extremo  $B$  e  $D$  da coluna

$BD$ , deslocando-se o extremo B para dentro do plano e C para fora do plano, na direção de  $z$ , e o deslocamento  $\delta_z$  das colunas é dado por:

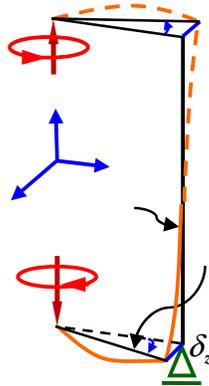


Figura A.13 Deslocamento dos extremos da MTT submetido a torção.

$$\delta Z_{\max} = -\frac{F}{3.E_c.I_c} \cdot \left(\frac{H}{2}\right)^3 = -\frac{F.H^3}{24.E_c.I_c} \quad (A.26)$$

onde  $H$  é o comprimento da coluna,  $E_c, I_c$  são o módulo de cisalhamento e o momento de inércia da coluna.

O deslocamento  $\delta_z$  na direção  $z$  devido ao momento torçor  $T$ , induz nos extremos da coluna uma rotação da viga  $AB$  e  $CD$  apresentado na Figura A.14.

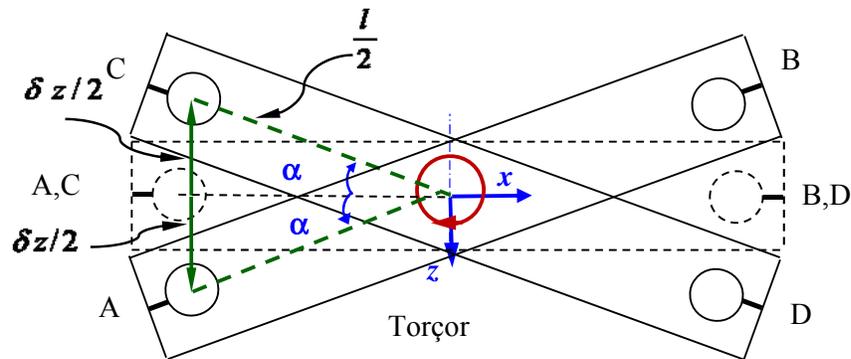


Figura A.14 Rotação da viga  $AB$  e  $CD$  da MTT submetido à torção.

Os ângulos de rotação  $\theta$  calculam-se pela equação (A.27).

$$\theta = 2.\alpha \quad (A.27)$$

onde  $\alpha = \arcsin\left(\frac{\delta z}{l}\right)$

Então, a rigidez torsional da máquina MTT (para as mesmas dimensões utilizadas para o cálculo da rigidez axial) é calculada utilizando as equações (A.24) até (A.27) como segue.

Pela simetria, o deslocamento no extremo A é igual ao deslocamento no extremo C, calculada pela equação (A.26), como  $\frac{\delta z}{2} = \frac{F}{3.E_c.I_c} \cdot \left(\frac{H}{2}\right)^3 = 1.917 \text{ mm}$ .

Assim, tem-se,  $\delta z = 3,8 \text{ mm}$ . A partir do valor de  $\delta z$  obtém-se o valor do ângulo de rotação como  $\theta = 0,619^\circ$  e, finalmente, a rigidez torsional da MTT como  $K_T = 117,44 \text{ kN.m/rad}$ .

### A.2.2.2 Calculo utilizando Ansys.

Os cálculos da rigidez torsional no modelo simplificado da MTT, também foram avaliados utilizando-se o software Ansys, com o propósito de verificar os cálculos analíticos. Na Figura A.15 (a) apresenta-se o modelo deformado da MTT no software Ansys devido ao momento torçor.

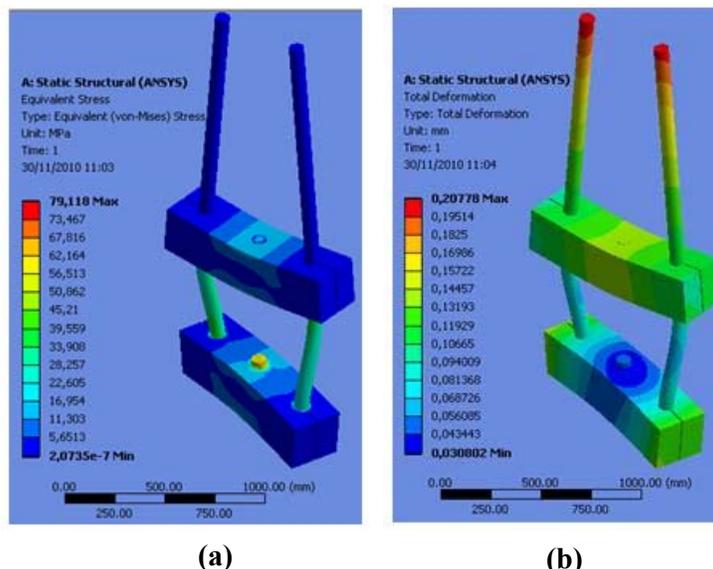


Figura A.15 Modelo simplificado da MTT (a) Tensão e (b) deflexão da MTT devido ao torçor

Na figura 4.17 apresenta-se o modelo deformado da máquina MTT na direção

"z" devido ao momento torçor.

Os cálculos foram realizados nas mesmas dimensões e cargas utilizadas no cálculo analítico. Os resultados foram os seguintes:

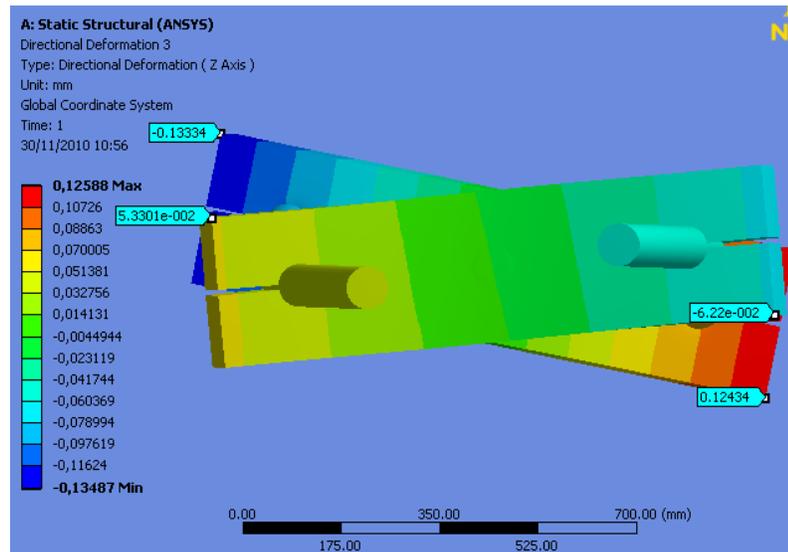


Figura A.16 Deformação na direção "z" do modelo simplificado da MTT gerado pelo torçor no Ansys

Pela simetria, o deslocamento  $\delta z_1$  da viga superior é igual à viga inferior e da simulação de Ansys temos  $\delta z = 0,1854 \text{ mm}$ , a partir do qual se obtém o ângulo de rotação  $\theta = 0,021^\circ$ .

E finalmente a rigidez torsional da MTT

$$K_T = \frac{T}{\theta} = \frac{1300}{3,708 \cdot 10^{-4}} \quad K_T = 3,507 \text{ MN.m/rad}$$

A continuação apresenta-se uma tabela com a rigidez axial e torsional em diferentes diâmetros da coluna, a carga trativa e o momento torçor máximo, o mesmo utilizado nos cálculos acima.

Tabela A.1 Influência do diâmetro na rigidez axial e torsional

$(\phi)$	Deflexão ( $\delta_y$ )			Rigidez Axial ( $K_a$ )			Rotação ( $\delta_z$ )	Rigidez Torsional ( $K_T$ )
	Análítico ( $10^{-4}m$ )	Ftool ( $10^{-4}m$ )	Ansys ( $10^{-4}m$ )	Análítico MN/m	Ftool MN/m	Ansys MN/m	Ansys ( $10^{-4}m$ )	Ansys MN.m/rad
75	1,822	1,797	1,724	1372	1391	1449	1,854	3,507
100	1,262	1,262	1,274	1981	1981	1963	0,6466	10,053
120	1,038	1,011	1,083	2407	2474	2308	0,4534	14,335
140	0,89	0,871	0,9524	2782	2871	2625	0,2092	31,075
150	0,846	0,819	0,8226	2954	3050	3040	0,1788	36,360
170	0,763	0,7357	0,7309	3279	3390	3420	0,1266	51,334
180	0,7274	0,702	0,6917	3437	3541	3600	0,1086	59,853

### A.3

#### Rigidez axial do modelo simplificado da MTT no Ansys.

As deflexões axiais geradas pela mesma carga de tração  $P = 250$  kN sobre o novo modelo da MTT foram calculadas utilizando-se o software Ansys.

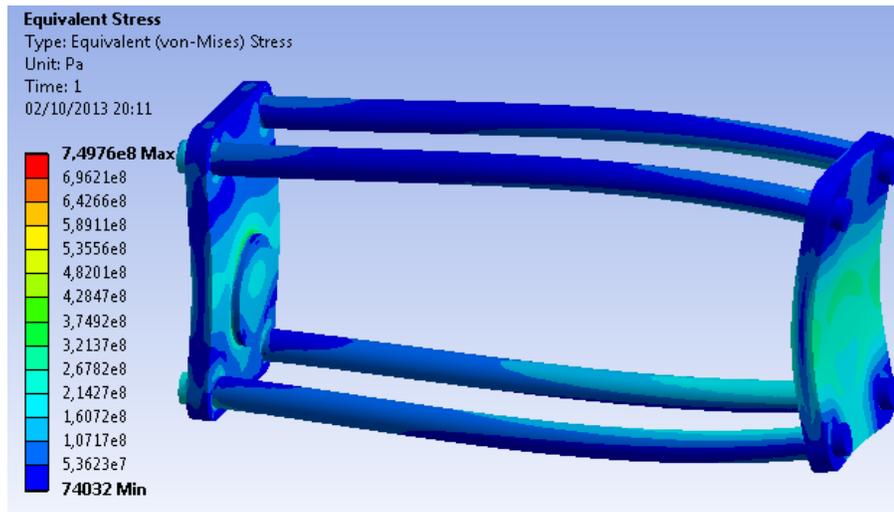


Figura A.17 Tensões no modelo simplificado da MTT devido à carga trativa.

A continuação apresentam-se os deslocamentos axiais do modelo simplificado da MTT na direção "x", devido à carga trativa.

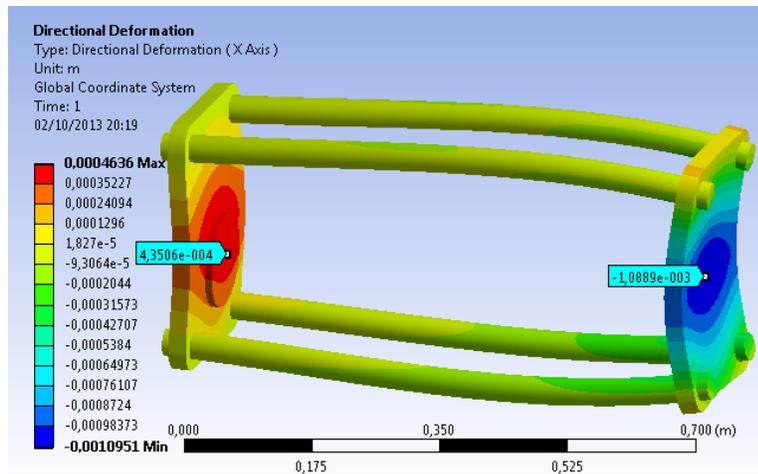


Figura A.18 Deslocamento na direção "x" do modelo simplificado da MTT

Na Figura 4.20, o deslocamento total é dado pela diferença do deslocamento do lado direito  $\delta_D = -0,0010889$  e do lado esquerdo  $\delta_I = 0,00043506$ ,  $\delta_{Total} = |\delta_D - \delta_I| = 0,00152396$ . Finalmente, a rigidez axial do modelo simplificado da MTT é  $K_a = 250000 / (15,2396 \cdot 10^{-4})$ , então, tem-se  $K_a = 164 \text{ MN/m}$ .

Dado as colunas serem delgadas e o carregamento requerido ser alto, é necessário determinar no Ansys o carregamento que geraria o problema de flambagem sobre o novo modelo simplificado da MTT.

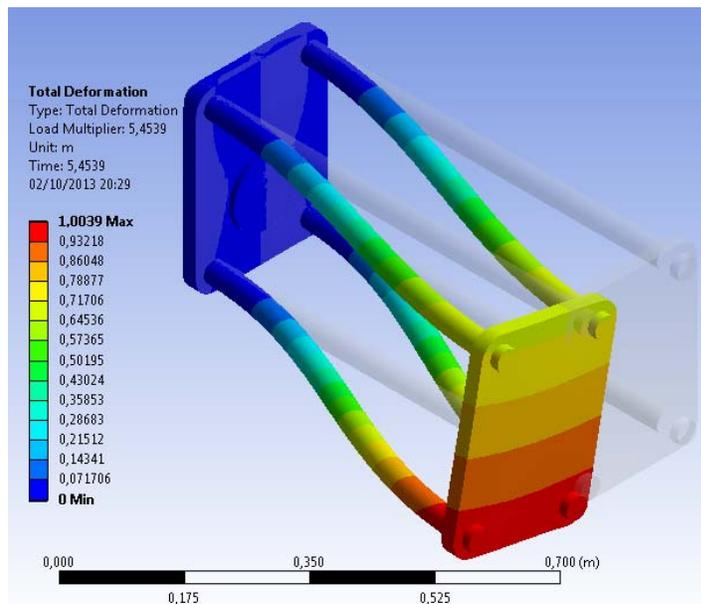


Figura A.19 Análise da falha por flambagem da MTT em compressão pura

A partir do análise de flambagem feita no Ansys pode-se determinar o fator de

flambagem  $k_{fb}^P = 5,45$ , em compressão pura. Este representa o fator que multiplicado à carga máxima, prevê o carregamento que provocaria o problema de flambagem nas colunas. Neste caso, seria uma carga de  $P \cong 100 \text{ MN}$ .

### A.3.1

#### Rigidez torsional do modelo simplificado da MTT no Ansys.

Para calcular a rigidez torsional do novo modelo da MTT, foi calculado com o auxílio do software Ansys a máxima deflexão angular para a mesma condição de momento torsional  $T = 1300 \text{ N.m}$ . Na Figura 4.22, apresentam-se as tensões máximas geradas pelo momento torçor, sobre a estrutura de reação do novo modelo da MTT.

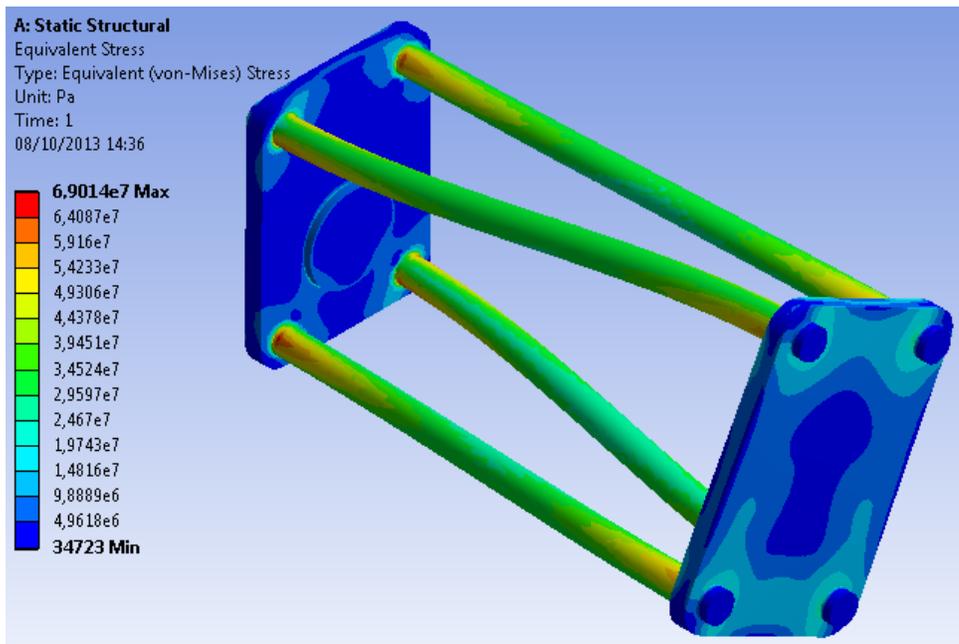


Figura A.20 Tensões no novo modelo da MTT devido a torção pura.

As tensões máximas geradas pelo momento torçor máximo são de aproximadamente  $\sigma_{Mises} = 69 \text{ MPa}$ , portanto a estrutura de reação trabalha na zona elástica. Na Figura 4.23, apresentam-se os deslocamentos na direção "z" da estrutura de reação do o novo modelo da MTT.

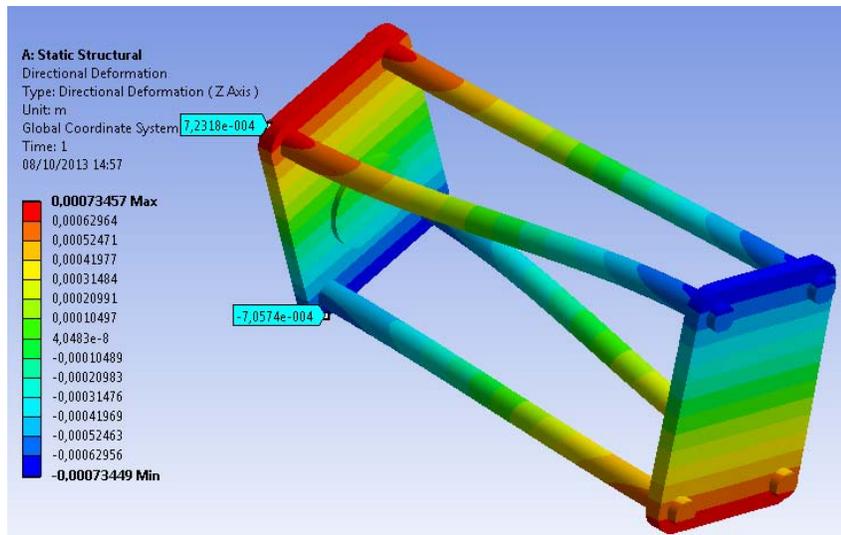


Figura A.21 Deslocamento na direção "z" do novo modelo da MTT

A partir da Figura 4.23, a deflexão linear na direção "z" é  $\delta_z = 1,428 \text{ mm}$ , o comprimento das colunas  $703 \text{ mm}$  e de acordo com a Equação (A.24), obtém-se a deflexão angular  $\theta = 0,002 \text{ rad}$ . Finalmente, a rigidez torsional do novo modelo da MTT como  $K_T = 1300 / 0,002 = 650 \text{ kN.m/rad}$ .

Também foi feita a análise da falha por flambagem nas colunas do novo modelo da MTT devido a torção pura. Os resultados da análise feita no Ansys são apresentados na Figura 4.24.

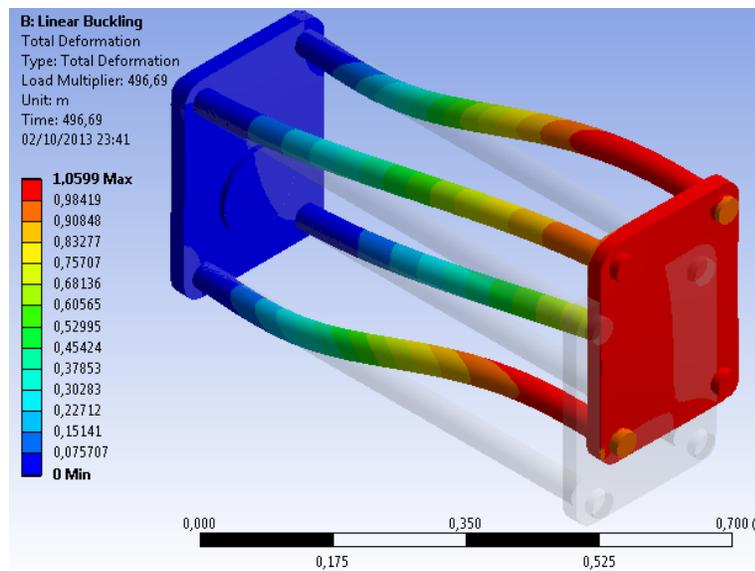


Figura A.22 Análise da falha por flambagem da MTT em torção pura

A partir da análise de flambagem Ansys, determina-se o fator de flambagem  $k_{fg}^T = 496$  em torção pura, o qual representa o fator pelo qual teria que ser multiplicado o momento torçor máximo para gerar o problema de flambagem nas colunas. Neste caso seria um momento torçor de  $T \cong 645 \text{ kN.m}$ .

A condição mais crítica do trabalho ocorre quando a MTT é submetida a um carregamento combinado de força axial máxima ( $P = 250 \text{ kN}$ ) e torque máximo ( $T = 1300 \text{ N.m}$ ). Na Figura 4.25, apresentam-se as tensões de Mises geradas pela carga máxima combinada sobre a estrutura de reação da MTT.

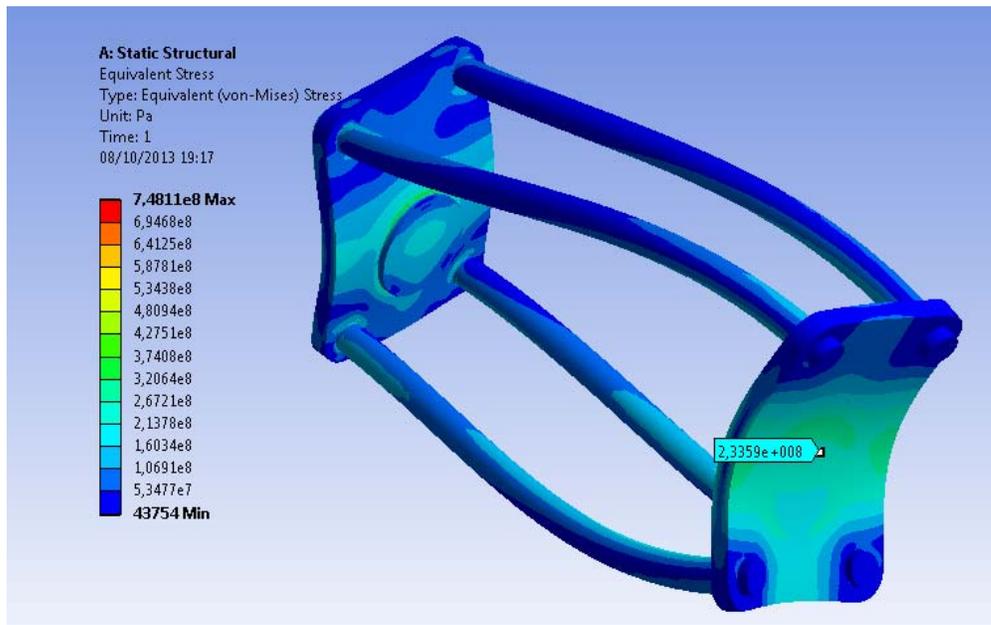


Figura A.23 Tensões de Mises devido a carregamento combinado sobre a MTT

A tensão máxima sobre a estrutura de reação da MTT, devido a carregamento combinado, foi de  $\sigma_{Mises} = 233,5 \text{ Mpa}$ , abaixo da resistência ao escoamento do material, sendo portanto aceitável.