

Projeto de Graduação do Curso de Engenharia e Automação

**Simulação e Controle com Filtro de Kalman
de um Pêndulo Invertido com base giratória**

Cesar Augusto Lampe Linhares da Fonseca

João Luiz Almeida de Souza Ramos

Aos nossos pais.

Agradecimentos

Queremos agradecer aos professores Dr. Marco Antônio Meggiolaro, Dr. Mauro Speranza Neto, Dr. Carlos Alberto de Almeida e Dr. Hans Ingo Weber, pelo tema, pelo apoio, pelos conhecimentos ensinados e pelas oportunidades oferecidas na nossa vida acadêmica.

Aos integrantes da equipe Riobotz, em especial a Guilherme Rodrigues de Paula, Guilherme Mourão, Pedro Blois, Pedro Bittencourt e Alexandre Ormiga por terem dedicado tempo para nos ajudar no projeto, pois, sem essa ajuda vital, pouco teríamos concretizado.

Aos nossos amigos, em especial, Ricardo Cavalcanti Marques, Bernard Pereira de Oliveira, Marcos Paulo Barreto, Marina Doneda, Norton Barcellos, Roberta Lima (Betinha), Marcell Hosana e Carolina Galhardo, por tornarem nossas vidas mais felizes e nossos estudos mais agradáveis.

Às nossas amigas de infância, Mateus Braune (John), Fabio Paredes, Germano Cereja, Ian Dunker Lyra Carlos Eduardo Dunker Fucci e Frederico Kenji Oshiro Sato, por serem nossos irmãos postiços.

A todos os meus irmão escoteiros, que são minha segunda família.

Às nossas amigas multi-nacionais da Alemanha e Itália, pois mesmo a distância, as amigas se mantêm.

À PUC-Rio, por ser nosso segundo lar.

Aos nossos familiares,

Aos nossos pais, mães e irmãos, por tudo.

“Sabedoria não é o resultado da escolaridade, mas da tentativa ao longo da vida de adquiri-la.”

Albert Einstein

Prefácio

Existe um exemplo clássico na engenharia, há muito estudado, que é a análise da cinemática e da dinâmica do chamado pêndulo invertido. Seu estudo é motivador, pois, mesmo sendo um dispositivo simples, envolve equações não-lineares que exigem certo conhecimento teórico básico em dinâmica de corpos rígidos e em métodos numéricos. Além disso, há a possibilidade de criar diferentes situações com características diferentes e padrões caóticos. Há geometrias simples e bem conhecidas, como a de uma haste sem carga, até os mais caóticos, como pêndulos duplos e triplos, conhecidos das disciplinas de dinâmica de corpos rígidos. Outras categorias são os pêndulos de base fixa, móvel ou oscilante. De todos estes tipos e criativos modelos de construção, o problema se resume em observar o comportamento de uma haste largada a partir de uma posição vertical para cima com um pequeno deslocamento ou condição inicial diferente de zero.

A partir da análise de dinâmica e da cinemática, surge um novo objetivo ao estudo do problema em questão: tentar controlar as variáveis, de tal forma que os elementos do pêndulo sejam mantidos na vertical. São empregados nesta situação diversos conhecimentos em controle de sistemas, desde o controle clássico até o controle moderno discreto para a análise dos pólos no plano imaginário. Para isso, a ferramenta computacional Matlab® é importante, tanto para simular o sistema computacionalmente quanto para funcionar na prática. Podem-se encontrar também na literatura acadêmica exemplos de controle que envolvem análises utilizando funções bem conhecidas de controle, como o controle PID, mas também métodos de inteligência artificial como redes neurais, lógica nebulosa (fuzzy) e algoritmos genéticos. Também está sendo levado em conta no controle um importante método para o tratamento de erro e de perturbação na leitura do sinal de posição do ângulo da haste. O filtro desenvolvido pelo engenheiro elétrico e matemático húngaro Rudolf Emil Kalman em 1960 é de implementação simples e garantiu o sucesso do programa Apollo da NASA e encontra ampla utilização na navegação atual e na aviônica.

Neste projeto de trabalho de conclusão de graduação, desenvolvemos um pêndulo simples (haste única) para funcionar na prática e um duplo ser somente simulado, ambos com base giratória. Este tipo de pêndulo é mais compacto e não depende da limitação de fim de curso como os modelos tradicionais. Além disso, o atuador é fixo e conectado diretamente à base, simplificando a montagem e evitando correias. Desta forma, teremos dados mais precisos e um modelo menos complexo de construir; entretanto, a dinâmica será complicada. Também faremos

com que a posição inicial do pêndulo esteja direcionada para baixo. Isto introduz novas formas de controle mais heurísticas para impulsionar a haste até uma posição próxima da vertical para cima, quando poderemos linearizar as equações de movimento.

Graças ao poder computacional existente atualmente, já existem produtos famosos, como o meio de transporte sobre duas rodas Segway®, os monociclos automatizados e os robôs humanóides, que são derivados da análise e do controle de um pêndulo invertido. Além disso, este estudo é importante para qualquer forma de estrutura que necessite permanecer na vertical. Logo, esta análise, inserida, na área da Engenharia de Controle e Automação, é um tema atual, além de motivador.

Este trabalho será dividido em três capítulos:

No primeiro capítulo, será abordada a modelagem dinâmica do sistema, avaliando quais variáveis são relevantes e quais devem ser controladas.

No segundo capítulo, a modelagem dinâmica será simulada pelo software de engenharia Matlab® e os resultados serão expostos em figuras e em gráficos.

No terceiro capítulo, abordar-se-á a construção de um modelo real de um pêndulo invertido e serão utilizadas as ferramentas de controle dos resultados da simulação na prática.

Resumo

Neste trabalho de fim de curso, deseja-se controlar um pêndulo invertido na prática e um pêndulo duplo em uma simulação em Matlab®. Utilizam-se conceitos de controle discreto como LQR (Linear Quadratic Regulator) para alocação de novos pólos ao sistema, junto com um sistema de tratamento de ruído e de perturbação chamado de “filtro de Kalman”.

Palavras-chaves: pêndulo invertido, pêndulo duplo, Kalman, controle discreto, LQR, swing-up.

Lista das figuras

Figura 1- Pendulo invertido linear	13
Figura 2- Pêndulo proposto por K. Furuta	13
Figura 4- Esquema de denotação dos parâmetros de Denavit-Hartenberg	16
Figura 5- Demonstração dos eixos	17
Figura 6- Variáveis no pêndulo duplo	24
Figura 7- projeto de estimador	31
Figura 8- Posição inicial de ambos os pêndulos	35
Figura 9- Comportamento dinâmico do pêndulo livre	36
Figura 10- Plano de estados do pêndulo livre	37
Figura 11- Comportamento dinâmico, pêndulo simples	38
Figura 12- Comportamento livre do pêndulo duplo	39
Figura 13- Plano de estados do pêndulo duplo livre	40
Figura 14- Comportamento do pêndulo duplo em malha aberta	42
Figura 15- Comportamento com controle LQR	44
Figura 16- Controle LQR com posição desejada diferente de zero	45
Figura 17- Controle LQR mais o estimador	46
Figura 18- Controle LQR para o comportamento não-linear	50
Figura 19- Controle LQR não linear com peso 200 em Q2	50
Figura 20- Comportamento com ruído nos sensores com $dp = 0.001$	51
Figura 21- Comportamento com ruído nos sensores com $dp = 0.01$	52
Figura 22- Comportamento com ruído nos sensores com $dp = 0.1$	53
Figura 23- Comportamento com perturbações na atuação	54
Figura 24- Comportamento com alta perturbação	54
Figura 25- Comportamento de acordo com a variação no ruído	55
Figura 26- Comportamento de acordo com a variação na perturbação	55
Figura 27- Efeito de quantização	56
Figura 28- Comparação da velocidade real e estimada (esq) e erro da estimativa (dir)	57
Figura 29- Controle LQR para o comportamento não-linear pêndulo duplo	58
Figura 30- Controle LQR para o comportamento não-linear com ganho 200 em Q2	59
Figura 31- Diferença entre os valores reais e ideais do sistema	60
Figura 32- Comparação da velocidade real e estimada (esq.) e erro da estimativa (dir.) para pêndulo duplo em ambos	60
Figura 33- Região de estabilização e de "swing-up"	62
Figura 34- Evolução swing up (esq.) e ampliação no ponto de mudança de controle (dir.)	64
Figura 35- Evolução da energia do sistema (esq.) e da atuação do motor (dir.)	64
Figura 36- Modelo 3D do pêndulo	66
Figura 37- Vista explodida do esquema de montagem do encoder e eixo do Pêndulo	67
Figura 38- Motor utilizado	68
Figura 39- Sinais do encoder (horário e anti-horário)	69
Figura 40- Ampliação mostrando as subdivisões do disco do encoder	70

Figura 41- O posicionamento do encoder e o disco na extremidade da haste.....	70
Figura 42- Motor secundário, (tacômetro)	71
Figura 43- Placa de divisão de sinal da Banebots	72
Figura 44- Dispositivo e seus módulos da National Instruments	73
Figura 45- Módulos utilizados	73
Figura 46- Amplificador utilizado	74
Figura 47- Modelo real completo	74
Figura 48- Controle PD de posição do motor	76
Figura 49- Console do controle PD do motor.....	77
Figura 50- Programa de controle LQR.....	78
Figura 51- Controle PD utilizando o encoder do pêndulo.....	80

Lista de variáveis

m_1 : massa da definida haste
 m_2 : massa do primeiro elo do pêndulo
 m_3 : massa do segundo elo do pêndulo
 I_1 : momento de inércia definido haste em relação ao seu centro de massa
 I_2 : momento de inércia do primeiro elo do pêndulo em relação ao centro de massa
 I_3 : momento de inércia do segundo elo do pêndulo em relação ao centro de massa
 a_0 : distância entre o eixo base do motor e do eixo do pêndulo
 a_1 : comprimento do primeiro elo do pêndulo
 a_2 : comprimento do segundo elo do pêndulo
 l_1 : posição do centro de massa do primeiro elo em relação ao seu centro de rotação
 l_2 : posição do centro de massa do segundo elo em relação ao seu centro de rotação
 h_0 : espessura da haste
 d_0 : distância entre os centros dos eixos O_0 e O_3 na coordenada z_0
 θ_1 : ângulo entre o braço da haste (eixo x_1) e o eixo base x_0
 θ_2 : ângulo entre o primeiro elo do pêndulo (eixo x_3) e o eixo de rotação x_2
 θ_3 : ângulo entre o segundo elo do pêndulo (eixo x_4) e o eixo de rotação x_3 do elo 1
 $\dot{\theta}_i$: derivada primeira de θ_i em relação ao tempo
 ω_i : derivada primeira da variável de estado θ_i em relação ao tempo
 $\ddot{\theta}_i$: derivada segunda de θ_i em relação ao tempo
 T_i^{i-1} : matriz de transformação entre os eixos i e $(i - 1)$
 v : vetor velocidade linear dos centros de massa da haste, elo 1 e elo 2
 ω : vetor velocidade angular dos centros de massa da haste, elo 1 e elo 2
 J_L : matriz Jacobiana linear relacionando as velocidades angulares das juntas com as lineares dos centros de massa
 J_A : matriz Jacobiana angular relacionando as velocidades angulares das juntas com as angulares dos centros de massa
 J : matriz Jacobiana total do pêndulo
 p_x : coordenada x_0 do centro de massa do elo
 p_y : coordenada y_0 do centro de massa do elo
 p_z : coordenada z_0 do centro de massa do elo
 \vec{b}_0 : vetor direção de rotação do eixo 1
 \vec{b}_1 : vetor direção de rotação do eixo 3
 \vec{b}_2 : vetor direção de rotação do eixo 4
 I_i^* : matriz de inércia do elo em relação ao seu centro de massa
 H : matriz de inércia total do pêndulo
 h_{ijk} : índices de Chritofell para acoplamento centrífugo e Coriolis
 h : vetor de índices de Chritofell
 G_i : termo gravitacional da equação i
 g' : vetor de termos gravitacionais
 Q_i : somatório de forças generalizadas da equação i
 Q : vetor de forças generalizadas

T : energia cinética total do sistema
 U : energia potencial total do sistema
 E_{total} : energia total do sistema
 g : aceleração gravitacional
 $r_{o,ci}$: posição do centro de massa do elo i em relação ao eixo base
 τ : torque aplicado pelo motor sobre a haste
 b_i : constante de atrito viscoso na junta i
 X : vetor de variáveis de estado
 X_0 : vetor de variáveis de estado inicial
 X_d : vetor de variáveis de estado desejado de controle
 Y : vetor de variáveis de estado lidas pelos sensores
 F : matriz de multiplicação dos vetores de estado contínua
 G : vetor de multiplicação do vetor de entrada contínuo
 D : matriz de modelagem de aquisição dos sensores
 H_{linear} : matriz de inércia do pêndulo linearizada
 h_{linear} : vetor nulo dos índices lineares de Christoffel
 g_{linear} : vetor de termos gravitacionais linearizados
 f_i : função linear que modela a derivada segunda da variável de estado θ_i
 Φ : matriz de multiplicação dos vetores de estado discreta
 Γ : vetor de multiplicação do vetor de entrada discreto
 C : matriz de controlabilidade do sistema discreto
 O : matriz de observabilidade do sistema discreto
 K : ganho ótimo LQR
 U : variável de entrada do sistema
 k : variável de tempo discreta
 L_p : ganho de controle por Ackerman
 α_c : polinômio de raízes iguais aos pólos de controle desejados
 w : vetor de perturbações aleatórias do sistema
 v : vetor de ruído aleatório do sistema
 φ : função não linear discreta do sistema
 η : função não linear de leitura discreta dos sensores
 P : matriz de covariância das variáveis de estado
 W : matriz de covariância do atuador
 V : matriz de covariância dos sensores
 q_i : variável de quantização do sensor i

Índice

Capítulo 1 - Modelagem Dinâmica e Controle Digital	16
1.1 - Pêndulo Simples	17
1.2- Pêndulo Duplo	24
1.3 - Controle Digital.....	29
1.3.1- Espaço estado digital; Controle LQR	29
1.3.2 - Estimador.....	30
1.3.3 - O filtro de Kalman	32
Capítulo 2 - Simulação Dinâmica	34
2.1- Implementação do controle	41
2.1.1- Estabilização - Estudo do sistema linear	41
2.1.2- Estabilização do sistema não-linear	46
2.2 - Pêndulo Simples não-linear.....	49
2.3- Pêndulo Duplo não-linear	57
2.4– Swing-Up	61
Capítulo 3 - O modelo real	66
3.1 – Materiais e geometria	66
3.2 Motor	68
3.3 Sensores	68
3.4 - Eletrônica	71
3.5 - Sobre a aquisição e geração de sinais.....	72
3.6 - Amplificador	73
3.7 – O controlador.....	75
3.8 - O erros da análise experimental.....	81
Conclusão.....	82
Referências.....	84
APÊNDICES	85

Introdução - O Pêndulo Invertido do Tipo Furuta

No curso de controle discreto do Departamento de Engenharia Mecânica da PUC-Rio, foi feita uma análise completa da dinâmica e do controle de um pêndulo invertido em um carro com uma haste no topo. Neste exemplo, o pêndulo invertido era do tipo linear, o qual era impulsionado por uma força acoplada ao carro para controlar, tanto a posição de translação do carro em algum ponto, quanto o ângulo da haste com o eixo vertical de forma a torná-lo nulo.

A dinâmica deste modelo foi amplamente estudada ao longo do século XX e

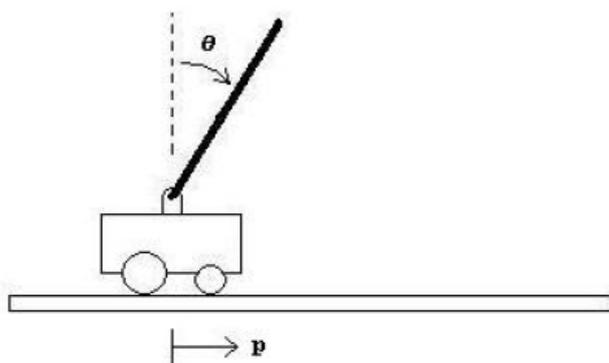


Figura 1- Pêndulo invertido linear

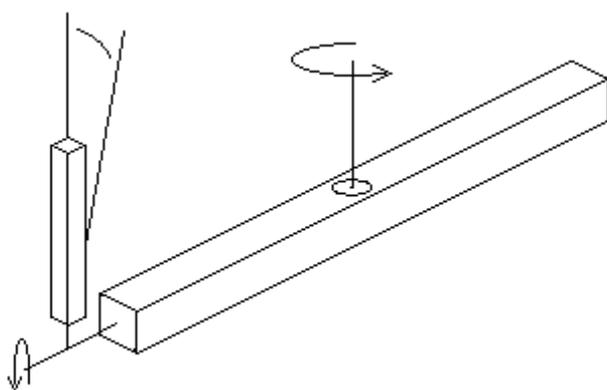


Figura 2- Pêndulo proposto por K. Furuta

tornou-se um exemplo didático clássico para os mais diversos tipos de controle, devido sua simplicidade e facilidade de entendimento.

Porém, em 1991, o pesquisador K. Furuta, do Instituto de Tecnologia de Tóquio, sugeriu um novo tipo de pêndulo com base giratória (Figura 2).

Em vez de um carrinho controlado por uma força, mas sim por torque, ele propôs utilizar uma base

oscilatória. A grande vantagem deste modelo é que não há uma condição

de fim de curso como no caso do pêndulo com carrinho, pois o pêndulo linear percorre sobre trilhos

um comprimento limitado. No caso do “Pêndulo de Furuta”, o pêndulo é

controlado pelo torque gerado por um motor no centro da base. Desta

maneira, a base pode girar sem

limitações. Além disso, o elemento de atuação está fixo em relação à origem

do sistema, sem alterar o centro de massa.

No entanto, o equacionamento da dinâmica do sistema torna-se mais complexo. O pêndulo linear pode ser observado como um problema bidimensional, simplificando o modelo, principalmente em relação à inércia dos componentes. Há também a

considerar o fenômeno de Coriolis na equação de movimento, já que há dois movimentos circulares acoplados.

Objetivos

Analisar toda a dinâmica envolvida e o controle do pêndulo invertido de Furuta, primeiramente com uma simulação em Matlab® e, em seguida, na construção de um modelo real com os conceitos de controle aplicado estudados no curso e de conceitos encontrados na literatura acadêmica, que levam em conta a perturbação do sistema e o ruído na amostragem nos sensores. Ao final, far-se-á um estudo expandido com um pêndulo duplo, cujas características não-lineares são mais evidentes e seu comportamento é mais caótico e de difícil controle.

Capítulo 1 - Modelagem Dinâmica e Controle Digital

Uma vez que a arquitetura do pêndulo simples rotacional de Furuta pode ser interpretada como um braço robótico com apenas uma junta, a modelagem matemática que utilizamos foi a do modelo de manipuladores, a partir dos parâmetros de Denavit-Hartenberg. Este método traz a padronização dos cálculos da dinâmica e permite que as equações de movimento possam ser facilmente obtidas, com ilustrado abaixo na figura 3.

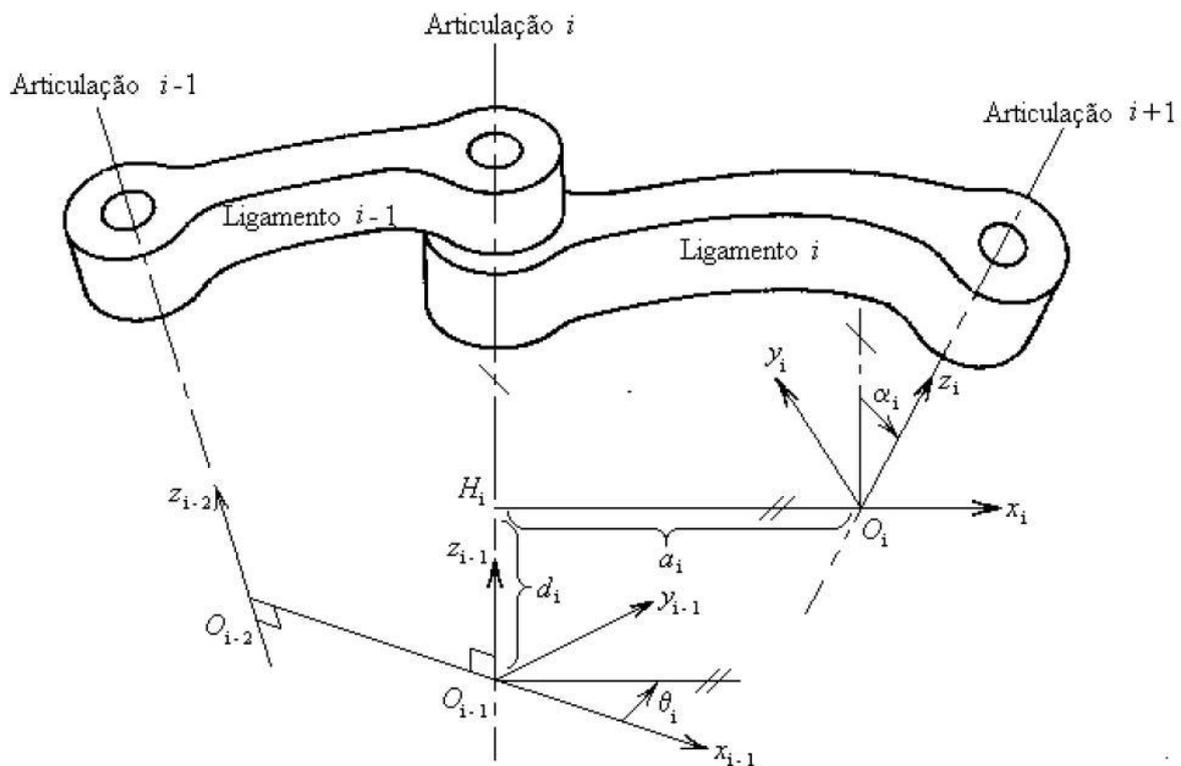


Figura 3- Esquema de denotação dos parâmetros de Denavit-Hartenberg

Sendo z_i o eixo de rotação do elo i , definimos os parâmetros de Denavit-Hartenberg como:

- a_i : comprimento da normal comum aos eixos de rotação i e $i-1$;
- d_i : distância entre O_{i-1} e a normal comum na coordenada z_{i-1} ;
- α_i : ângulo entre z_{i-1} e z_i na direção x_i ;
- θ_i : ângulo entre x_{i-1} e x_i na direção z_{i-1} .

Poderemos construir o nosso ponto de partida na dinâmica.

1.1 - Pêndulo Simples

Temos a construção na figura abaixo:

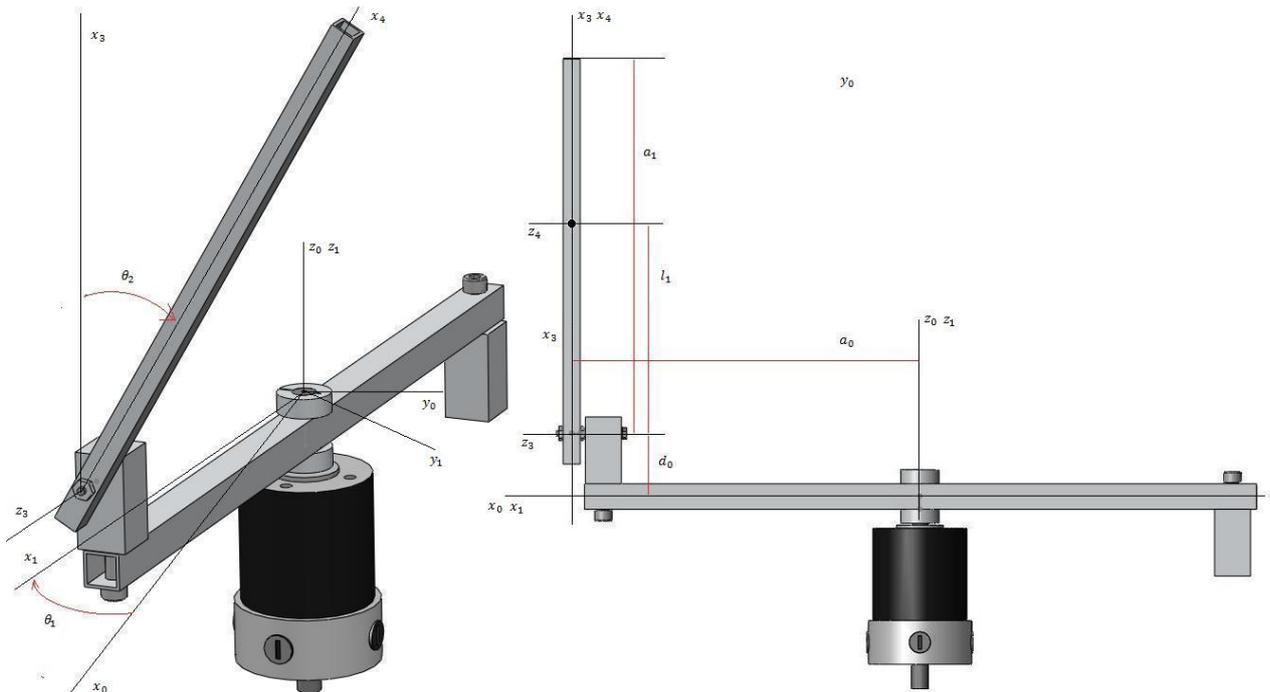


Figura 4- Demonstração dos eixos

Observe que no caso do pêndulo invertido rotacional, não podemos fazer a transformação direta do eixo 1 para o 2, pois os parâmetros de Denavit-Hartenberg não permitem a rotação no eixo z se este for paralelo ao braço (direção axial, coordenada x anterior). Assim, precisamos de um elo extra que apenas muda a direção do eixo, mas é fixo. A posição em que os ângulos são nulos corresponde à posição vertical para cima do pêndulo, e os sentidos de rotação positivos correspondem são como indicado na figura.

Desse modo, com o modelo de pêndulo simples invertido descrito acima, temos os seguintes parâmetros de Denavit-Hartenberg:

Eixo	a_i (mm)	d_i (mm)	α_i (graus)	θ_i (graus)
1	a_0	0	-90	θ_1
2	d_0	0	-90	-90
3	a_1	0	0	θ_2

Pela padronização de Denavit-Hartenberg, a matriz de transformação entre os sistemas de coordenadas pode ser dada como

$$T_i^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \cos(\alpha_i) & \sin(\theta_i) \sin(\alpha_i) & a_i \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \cos(\alpha_i) & -\cos(\theta_i) \sin(\alpha_i) & a_i \sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nesse sistema, as três primeiras linhas da terceira coluna indicam a direção de rotação do sistema i , e a quarta coluna indica as três coordenadas desse sistema. Para o centro de massa do pêndulo, temos a seguinte matriz de transformação T_3^0 :

$$T_3^0 = T_1^0 \cdot T_2^1 \cdot T_3^2.$$

Portanto,

$$T_3^0 = \begin{bmatrix} \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) & \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) & \cos(\theta_1) & l_1 \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) + a_0 \cos(\theta_1) \\ -\cos(\theta_1) \sin(\theta_2) & -\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) & \sin(\theta_1) & -l_1 \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) + a_0 \sin(\theta_1) \\ \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) & 0 & l_1 \cos(\theta_2) + d_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Perceba que a direção de rotação ($T_3^0(1:3,3)$) equivale à projeção do eixo z_2 sobre o sistema de coordenada universal. Isso faz sentido, uma vez que essa projeção é feita sempre no mesmo plano, independentemente de θ_2 . Do mesmo modo, a última coluna corresponde às coordenadas do centro de massa do pêndulo no sistema universal. Assim, podemos definir a matriz jacobiana, que relaciona a velocidade angular de cada junta com a velocidade linear do centro de massa do pêndulo,

$$\dot{v} = J_L \dot{\theta}.$$

Por definição, a matriz jacobiana neste caso seria 3x2 (dois ângulos oferecendo uma velocidade tridimensional ao centro de massa), dada pela expressão

$$J_L = \begin{bmatrix} \frac{\partial p_x(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} & \frac{\partial p_x(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial p_y(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} & \frac{\partial p_y(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial p_z(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} & \frac{\partial p_z(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2} \end{bmatrix},$$

sendo p_x , p_y e p_z as coordenadas do centro de massa do pêndulo em relação ao sistema universal fixo determinado pelas coordenadas x_0 , y_0 e z_0 . Substituindo os termos da quarta coluna da matriz T_3^0 , temos

$$J_L^{(2)} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) - a_0 \sin(\theta_1) & l_1 \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) \\ l_1 \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) + a_0 \cos(\theta_1) & -l_1 \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) \\ 0 & -l_1 \sin(\theta_2) \end{bmatrix}.$$

A matriz J_L corresponde à contribuição das derivadas da posição do centro de massa às velocidades translacionais do pêndulo. Por outro lado, no caso das velocidades angulares,

$$\dot{\omega} = J_A \cdot \dot{\theta},$$

a matriz jacobiana utilizada leva em consideração os eixos de rotação de cada junta, ou seja, em relação ao sistema de coordenada anterior,

$$J_A^{(2)} = [\vec{b}_0 \quad \vec{b}_1].$$

Temos, então,

$$J_A^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & \cos(\theta_1) \\ 0 & \sin(\theta_1) \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para encontrar as velocidades angulares e translacionais da haste de suporte do motor, podemos utilizar os mesmos passos:

- Escrever as coordenadas do centro de massa em relação ao sistema universal;
- Encontrar a matriz jacobiana da haste a partir destas coordenadas e dos eixos de rotação.

Para calcular o tensor de inércia, podemos considerar tanto o pêndulo quanto a barra como elementos esbeltos, de modo que apenas o momento de inércia em uma direção pode ser considerado relevante e a geometria do pêndulo está alinhada com o sistema de coordenadas. Neste caso, para ambos os elementos, temos o seguinte tensor em relação ao seu sistema de coordenada do elo:

$$I_i^* = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}.$$

No entanto, o tensor de inércia em relação ao sistema universal pode ser calculado como:

$$I_i = R_i^0 \cdot I_i^* \cdot R_i^{0T},$$

em que a matriz R_i^0 corresponde à matriz de rotação entre o elo i onde o tensor de inércia está sendo calculado e o sistema de coordenadas universal. Esta matriz equivale ao primeiro bloco de matriz 3x3 (três primeiras linhas e três primeiras colunas) das matrizes de transformação da padronização de Denavit-Hartenberg.

Consideremos agora a equação de movimento do manipulador como deduzida a partir da seguinte lagrangiana:

$$\sum_{j=1}^n H_{ij} \ddot{\theta}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n h_{ijk} \dot{\theta}_j \dot{\theta}_k + G_i = Q_i.$$

A matriz H é a matriz de inércia total do manipulador (haste + pêndulo), dada pela expressão

$$H(\theta_1, \theta_2) = \sum_{i=1}^n [m_i J_L^{(i)T} J_L^{(i)} + J_A^{(i)T} I_i J_A^{(i)}].$$

No nosso caso teremos $n = 2$, pois este é o número de variáveis de estado utilizadas no problema ($q_1 = \theta_1, q_2 = \theta_2$) e teremos duas equações de movimento distintas ($i = 1$ e $i = 2$).

$$H = \begin{bmatrix} I_1 + m_2 a_0^2 & m_2 l_1 a_0 \cos(\theta_2) \\ m_2 l_1 a_0 \cos(\theta_2) & I_{2zz} + m_2 l_1^2 \end{bmatrix}.$$

Os h_{ijk} são denominados índices de Christoffel, os quais determinam as contribuições das acelerações centrífugas e de Coriolis, e são dados por

$$h_{ijk} = \frac{\partial H_{ij}}{\partial \theta_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial H_{jk}}{\partial \theta_i}.$$

Assim, teremos

$$h_{111} = h_{121} = h_{222} = h_{112} = h_{211} = 0,$$

$$h_{221} + h_{212} = 0,$$

$$h_{122} = -m_2 l_1 a_0 \sin(\theta_2).$$

A energia cinética do sistema pode ser dada pela expressão:

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}^T H \dot{q} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 H_{ij} \dot{\theta}_i \dot{\theta}_j,$$

onde $J^{(i)}$ corresponde à coluna i da matriz jacobiana J_L ou J_A . Esta matriz H é positiva definida (todos os autovalores são positivos) e também simétrica.

O termo G_i corresponde à contribuição da força gravitacional sobre o sistema e pode ser dado pela expressão

$$G_i = \frac{\partial U(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_i},$$

onde U corresponde à energia potencial gravitacional total do sistema, dado por

$$U = - \sum_{i=1}^n m_i G^T r_{o,ci},$$

sendo $G = [0, 0, -g]^T$ e o vetor $r_{o,ci}$ é a distância da origem do sistema fixo ao centro de massa do elemento i . O vetor G corresponde ao vetor aceleração da gravidade (g) no sistema universal. A terceira componente de G foi definida negativa para que a o valor da energia potencial cresça no sentido positivo do eixo z_0 .

Agora, o termo Q_i corresponde ao somatório das forças não-conservativas agindo sobre o sistema na equação 1 e 2 separadamente. Como o pêndulo tem apenas uma junta ativa e estamos modelando também o atrito viscoso (b_i) que existe na junta dos elos, então podemos escrever que:

$$\begin{cases} Q_1 = \tau - b_1 \dot{\theta}_1 \\ Q_2 = -b_2 \dot{\theta}_2, \end{cases}$$

onde a variável τ corresponde ao torque aplicado pelo motor na haste, b_1 é o coeficiente de atrito viscoso do motor e b_2 o coeficiente de atrito viscoso na junta haste-pêndulo. Considerando o plano de potencial nulo como o plano x_0/y_0 , temos a energia potencial total do sistema como

$$U = m_2 g l_1 \cos(\theta_2).$$

Assim,

$$\begin{cases} G_1 = 0 \\ G_2 = -m_2 g l_1 \sin(\theta_2). \end{cases}$$

Expandindo as equações de movimento, temos:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^2 H_{1j} \ddot{\theta}_j + \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 h_{1jk} \dot{\theta}_j \dot{\theta}_k = \tau - b_1 \dot{\theta}_1 \\ \sum_{j=1}^2 H_{2j} \ddot{\theta}_j + \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 h_{2jk} \dot{\theta}_j \dot{\theta}_k - m_2 g l_1 \sin(\theta_2) = -b_2 \dot{\theta}_2, \end{cases}$$

que podemos reescrever como

$$\begin{cases} (I_1 + m_2 a_0^2) \ddot{\theta}_1 + (m_2 l_1 a_0 \cos(\theta_2)) \ddot{\theta}_2 - m_2 l_1 a_0 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2^2 = \tau - b_1 \dot{\theta}_1 \\ (m_2 l_1 a_0 \cos(\theta_2)) \ddot{\theta}_1 + (I_2 + m_2 l_1^2) \ddot{\theta}_2 - m_2 l_1^2 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_1^2 - m_2 g l_1 \sin(\theta_2) = -b_2 \dot{\theta}_2 \end{cases}$$

Na forma de espaço estado não-linear:

$$H \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + h + g = Q,$$

onde

$$h = \begin{bmatrix} -m_2 l_1 a_0 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2^2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$g = \begin{bmatrix} 0 \\ -m_2 g l_1 \sin(\theta_2) \end{bmatrix}$$

e

$$Q = \begin{bmatrix} \tau - b_1 \dot{\theta}_1 \\ -b_2 \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}.$$

Podemos reescrever ainda:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = f(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \tau) = H^{-1}[Q - h - g],$$

onde

$$H^{-1} = \frac{1}{\det[H]} \begin{bmatrix} I_2 + m_2 l_1^2 & -m_2 l_1 a_0 \cos(\theta_2) \\ -m_2 l_1 a_0 \cos(\theta_2) & I_1 + m_2 a_0^2 \end{bmatrix}.$$

Para fazer a linearização, faremos as aproximações

- $\sin(\theta_i) \sim \theta_i$
- $\cos(\theta_i) \sim 1$.

Considerando os ângulos e velocidades pequenos (seus valores ao quadrado são desprezíveis em comparação com os outros termos da expressão), as equações de movimento se tornam

$$\begin{cases} (I_1 + m_2 a_0^2) \ddot{\theta}_1 + (m_2 l_1 a_0) \ddot{\theta}_2 = \tau - b_1 \dot{\theta}_1 \\ (m_2 l_1 a_0) \ddot{\theta}_1 + (I_2 + m_2 l_1^2) \ddot{\theta}_2 - m_2 g l_1 \theta_2 = -b_2 \dot{\theta}_2. \end{cases}$$

O sistema de equações acima pode ser reescrito na forma de espaço dos estados:

$$\dot{X}' = F' \cdot X' + G' \cdot \tau,$$

onde:

$$F' = H'^{-1} \begin{bmatrix} -b_1 \\ m_2 g l_1 \\ -b_2 \end{bmatrix},$$

$$G' = H'^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$X' = [\dot{\theta}_1 \quad \theta_2 \quad \dot{\theta}_2]^T.$$

Nas equações acima, H é a matriz de inércia linearizada. O modelo utiliza um segundo vetor de variáveis de estado, que considera ainda θ_1 :

$$X = [\theta_1 \quad \dot{\theta}_1 \quad \theta_2 \quad \dot{\theta}_2]^T.$$

Podemos rearranjar as matrizes anteriores de modo a obter as equações abaixo (isso foi feito numericamente durante o controle implementado em ambiente MatLab):

$$\begin{cases} \dot{X} = F \cdot X + G \cdot \tau \\ Y = D \cdot X \end{cases}$$

Como o sistema utiliza apenas sensores de posição e estimadores para as velocidades, a matriz D é dada por

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.2- Pêndulo Duplo

Neste caso, teremos:

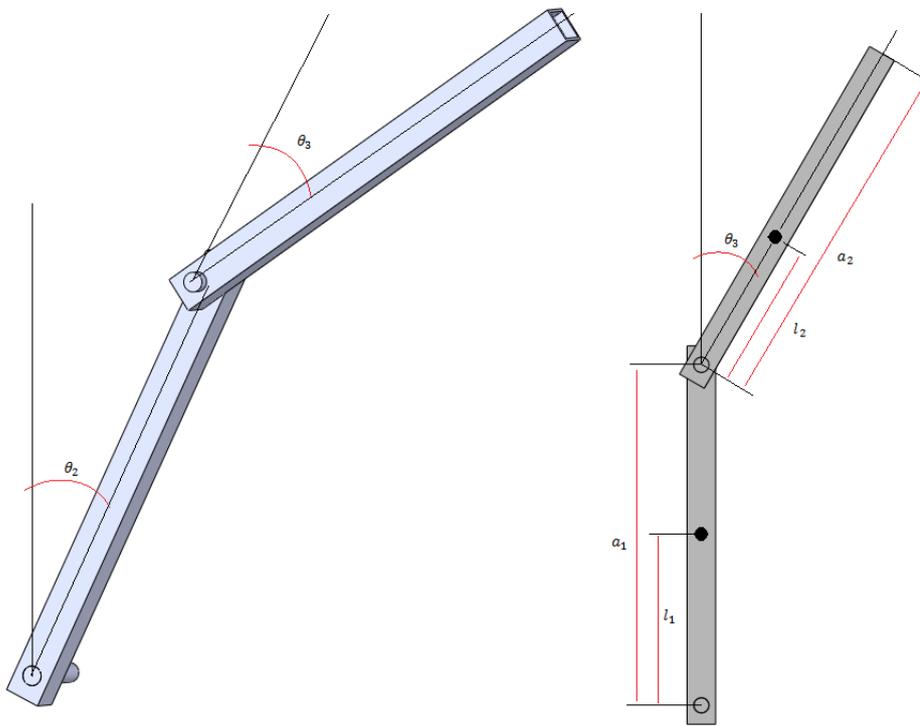


Figura 5- Variáveis no pêndulo duplo

Utilizando a mesma metodologia anterior, teremos os seguintes parâmetros de Denavit-Hartenberg, sendo os mesmos os parâmetros para a haste:

Eixo	a_i (mm)	d_i (mm)	α_i (graus)	θ_i (graus)
1	a_0	0	-90	θ_1
2	d_0	0	-90	-90
3	a_1	0	0	θ_2
4	a_2	0	0	θ_3

No caso presente, a matriz de transformação para a posição do centro de massa do segundo pêndulo no sistema de coordenadas universal é:

$$T_4^0 = T_1^0 \cdot T_2^1 \cdot T_3^2 \cdot T_4^3$$

Como a matriz escrita de forma literal é relativamente grande, vale mostrar apenas o vetor direção de rotação do centro de massa, dado por $T_4^0(1:3,3)$, e o vetor posição do mesmo, dado por $T_4^0(1:3,4)$:

$$T_4^0(1:3,3) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$T_4^0(1:3,4) = \begin{bmatrix} l_2 \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \sin(\theta_2 + \theta_3) + a_1 \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) + a_0 \cos(\theta_1) \\ -l_2 \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) \sin(\theta_2 + \theta_3) - a_1 \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) + a_0 \sin(\theta_1) \\ l_2 \cos(\theta_2 + \theta_3) + a_1 \cos(\theta_2) \end{bmatrix}.$$

Agora, podemos escrever a matriz jacobiana da posição do centro de massa do segundo pêndulo como

$$J_L^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial p_{x3}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)}{\partial \theta_1} & \frac{\partial p_{x3}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)}{\partial \theta_2} & \frac{\partial p_{x3}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial p_{y3}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)}{\partial \theta_1} & \frac{\partial p_{y3}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)}{\partial \theta_2} & \frac{\partial p_{y3}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial p_{z3}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)}{\partial \theta_1} & \frac{\partial p_{z3}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)}{\partial \theta_2} & \frac{\partial p_{z3}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)}{\partial \theta_3} \end{bmatrix},$$

onde p_x , p_y e p_z correspondem às expressões das coordenadas x, y e z do centro de massa do pêndulo 3, ou seja,

$$\begin{aligned} p_{x3} &= T_4^0(1,4), \\ p_{y3} &= T_4^0(2,4), \\ p_{z3} &= T_4^0(3,4). \end{aligned}$$

Para a matriz jacobiana para as velocidades angulares dos centros de massa,

$$J_A^{(3)} = [\vec{b}_0 \quad \vec{b}_1 \quad \vec{b}_2] = \begin{bmatrix} 0 & \cos(\theta_1) & \cos(\theta_1) \\ 0 & \sin(\theta_1) & \sin(\theta_1) \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

os eixos de rotação dos pêndulos 1 e 2 são iguais, pois os suportes têm rotações paralelas:

$$\begin{aligned} \vec{b}_2 &= \vec{b}_1 = T_4^0(1:3,3) = T_3^0(1:3,3), \\ \vec{b}_0 &= T_1^0(1:3,3). \end{aligned}$$

Podemos calcular as velocidades do outros centros de massa, mas estas são as mesmas daquelas para o pêndulo simples. Assim, escrevemos a matriz de inércia, simétrica e positiva definida, do sistema como

$$H(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \sum_{i=1}^3 [m_i J_L^{(i)T} J_L^{(i)} + J_A^{(i)T} I_i J_A^{(i)}],$$

$$H = \begin{bmatrix} I_1 + a_0^2(m_1 + m_2) & a_0(m_2 l_1 + m_3 a_1) \cos(\theta_2) & m_3 l_2 a_0 \cos(\theta_2 + \theta_3) \\ a_0(m_2 l_1 + m_3 a_1) \cos(\theta_2) & I_2 + m_2 l_1^2 + m_3 a_1^2 & m_3 l_2 a_1 \cos(\theta_3) \\ m_3 l_2 a_0 \cos(\theta_2 + \theta_3) & m_3 l_2 a_1 \cos(\theta_3) & I_3 + m_3 l_2^2 \end{bmatrix},$$

onde o momento de inércia, considerado como de uma barra esbelta, em relação ao seu centro de massa, é dado por

$$I_1 = \frac{1}{12} m_1 (2a_0)^2, \quad I_{2,3} = \frac{1}{12} m_{2,3} a_{1,2}^2.$$

O elemento de matriz H_{11} pode ser fisicamente interpretado como o momento de inércia relativo ao eixo 1, quando todas as outras velocidades são zero. Como os dois pêndulos têm a mesma aceleração, podemos interpretá-los como uma única massa concentrada na ponta da haste e de valor $M = (m_1 + m_2)$. Como o centro de massa está localizado em cima do eixo de rotação, não temos a contribuição da massa m_1 . Já para H_{22} , temos a contribuição de sua própria massa m_2 a uma distância l_1 do eixo de rotação e também da massa concentrada m_3 localizada na ponta do elo. O último elemento, H_{33} , tem influência apenas de sua própria massa e do momento de inércia.

Assim, os índices de Christoffel são nove para cada equação de movimento. Na primeira, eles são dados por

$$h_{111} = h_{112} = h_{121} = h_{113} = h_{131} = h_{123} = 0,$$

$$h_{122} = -a_0(m_2 l_1 + m_2 a_1) \sin(\theta_2),$$

$$h_{133} = h_{132} = -m_3 l_2 a_0 \sin(\theta_2 + \theta_3).$$

Na segunda,

$$h_{211} = h_{222} = h_{232} = h_{223} = 0,$$

$$h_{212} + h_{221} = 0,$$

$$h_{213} = h_{231} = \frac{1}{2} m_3 l_2 a_0 \sin(\theta_2 + \theta_3),$$

$$h_{233} = -m_3 l_2 a_1 \sin(\theta_3).$$

Na terceira,

$$h_{311} = h_{321} = h_{322} = h_{333} = 0,$$

$$h_{323} + h_{332} = h_{313} + h_{331} = 0,$$

$$h_{312} = -m_3 l_2 a_0 \sin(\theta_2 + \theta_3).$$

A energia potencial gravitacional do sistema é escrita como

$$U = m_2 g l_1 \cos(\theta_2) + m_3 g (a_1 \cos(\theta_2) + l_2 \cos(\theta_2 + \theta_3)).$$

Assim, os termos gravitacionais das equações de movimento são

$$\begin{cases} G_1 = 0, \\ G_2 = -m_2 g l_1 \sin(\theta_2) - m_3 g (a_1 \sin(\theta_2) + l_2 \sin(\theta_2 + \theta_3)), \\ G_3 = -m_3 g l_2 \sin(\theta_2 + \theta_3). \end{cases}$$

Temos ainda as forças não conservativas de cada equação,

$$\begin{cases} Q_1 = \tau - b_1 \dot{\theta}_1, \\ Q_2 = -b_2 \dot{\theta}_2, \\ Q_3 = -b_3 \dot{\theta}_3. \end{cases}$$

Desse modo, podemos escrever as equações de movimento do pêndulo duplo da seguinte maneira:

$$\begin{cases} H_{11}\ddot{\theta}_1 + H_{12}\ddot{\theta}_2 + H_{13}\ddot{\theta}_3 + h_{132}\dot{\theta}_3\dot{\theta}_2 + h_{122}\dot{\theta}_2^2 + h_{133}\dot{\theta}_3^2 = \tau - b_1\dot{\theta}_1 \\ H_{21}\ddot{\theta}_1 + H_{22}\ddot{\theta}_2 + H_{23}\ddot{\theta}_3 + h_{213}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 + h_{233}\dot{\theta}_3^2 + G_2 = -b_2\dot{\theta}_2 \\ H_{31}\ddot{\theta}_1 + H_{32}\ddot{\theta}_2 + H_{33}\ddot{\theta}_3 + h_{312}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + G_3 = -b_3\dot{\theta}_3, \end{cases}$$

que na forma de espaço de estados não-linear se torna

$$H \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_{132}\dot{\theta}_3\dot{\theta}_2 + h_{122}\dot{\theta}_2^2 + h_{133}\dot{\theta}_3^2 \\ h_{213}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 + h_{233}\dot{\theta}_3^2 \\ h_{312}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G_2 \\ G_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau - b_1\dot{\theta}_1 \\ -b_2\dot{\theta}_2 \\ -b_3\dot{\theta}_3 \end{bmatrix},$$

ou, em forma matricial,

$$H \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix} + h + g = Q.$$

Logo,

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix} = f(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3, \tau) = H^{-1}[Q - h - g].$$

Vale ressaltar que a expressão de H é consideravelmente extensa para fazer a sua inversa literalmente; desse modo, esta foi calculada numericamente a cada passo da iteração da simulação. Podemos escrever a linearização das equações de movimento, fazendo:

- $\sin(\theta_i) \sim \theta_i$,
- $\cos(\theta_i) \sim 1$.

Então, a matriz de inércia se torna

$$H_{linear} = \begin{bmatrix} I_1 + a_0^2(m_1 + m_2) & a_0(m_2 l_1 + m_3 a_1) & m_3 l_2 a_0 \\ a_0(m_2 l_1 + m_3 a_1) & I_2 + m_2 l_1^2 + m_3 a_1^2 & m_3 l_2 a_1 \\ m_3 l_2 a_0 & m_3 l_2 a_1 & I_3 + m_3 l_2^2 \end{bmatrix}.$$

Zerando os termos centrífugos e de Coriolis (para ângulos e velocidades muito pequenos), temos

$$h_{linear} = 0.$$

O termo gravitacional é

$$g_{linear} = \begin{bmatrix} 0 \\ -m_2 g l_1 \theta_2 - m_3 g (a_1 \theta_2 + l_2 (\theta_2 + \theta_3)) \\ -m_3 g l_2 (\theta_2 + \theta_3) \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$H_{linear} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix} + g_{linear} = Q,$$

ou, escrevendo na forma de espaço de estados,

$$\dot{X} = FX + G\tau.$$

Podemos rearranjar as matrizes H_{linear} e g_{linear} de forma que

$$X = [\theta_1 \quad \dot{\theta}_1 \quad \theta_2 \quad \dot{\theta}_2 \quad \theta_3 \quad \dot{\theta}_3]^T,$$

$$F = H_{linear}^{-1}(-g_{linear}),$$

$$G = H_{linear}^{-1}Q.$$

Assim, teremos

$$\begin{cases} \dot{X} = FX + G\tau \\ Y = DX \end{cases},$$

Como temos apenas sensores de posição, a matriz D se escreve

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.3 - Controle Digital

1.3.1- Espaço estado digital; Controle LQR

No controle de sistema no contínuo é necessário que o sistema seja escrito na forma de espaço dos estados.

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = FX(t) + GU(t) \\ Y(t) = HX(t) + JU(t), \end{cases}$$

Entretanto, em controle moderno, o sistema contínuo precisa ser subdividido em intervalos de tempo discretos, já que o processamento de dados forma amostras e atua em intervalos de tempo definidos. O equivalente de Zero-order-hold (ZOH) é empregado para que se possa converter o sistema do contínuo para o discreto de período T .

$$\begin{cases} \Phi = e^{FT} \\ \Gamma = \int_0^T (e^{FT} ds) \cdot G \\ H; J. \end{cases}$$

Assim, podemos escrever

$$\begin{cases} X(k+1) = \Phi X(k) + \Gamma U(k) \\ Y(k+1) = HX(k) + JU(k). \end{cases}$$

No software Matlab® já existe uma função pré-definida que realiza esta conversão:

$$[Phi, Gamma, H, J] = c2dm(F, G, H, J, T, 'zoh')$$

Todo controle implica dizer que a entrada $U(k) = -K.X(k)$. O ganho K precisa ser definido para alterar a posição dos pólos do sistema. Existem diversas formas de se calcular este ganho K e para uma resposta ótima utiliza-se freqüentemente o controle

de estado regulador linear quadrático ou LQR (Linear Quadratic Regulator). O valor K é resposta da seguinte expressão

$$K = (\Gamma^T S \Gamma + Q_2)^{-1} (\Gamma^T S \Phi),$$

onde S é solução da equação de Riccati:

$$\Phi^T S \Phi - S - (\Phi^T S \Gamma)(\Gamma^T S \Gamma + Q_2)^{-1} \Gamma^T S \Phi + Q_1 = 0.$$

As matrizes Q_1 e Q_2 são matrizes de peso que minimizam o erro nas posições θ_1 e θ_2 e a força, respectivamente. A matriz Q_1 é definida inicialmente como:

$$Q_1 = H^T H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

mas os valores unitários podem ser alterados sem regra. Diferentes valores nesta matriz implicam atribuir ao controle pesos diferentes às variáveis que se deseja controlar. A função `dlqr` no Matlab® já calcula o ganho K desejado em função de Q_1 e Q_2 . Contudo, este controle precisa de uma rotina própria, caso se queira uma posição de referência própria diferente de zero. Para uma posição X_d final diferente de zero, precisa-se alterar a entrada:

$$\begin{aligned} U &= U_{\text{ref}} - K \cdot X, \\ X(K + 1) &= (\Phi - \Gamma \cdot K)X(k) + \Gamma \cdot U_{\text{ref}}, \\ X_d &\cong (\Phi - \Gamma \cdot K)X_d + \Gamma \cdot U_{\text{ref}} \\ U_{\text{ref}} &\cong \text{pinv}(\Gamma)(I - \Phi)X_d + KX_d \end{aligned}$$

onde `pinv` corresponde à função de pseudo-inversa no Matlab®. Assim,

$$U(k) = U_{\text{ref}} - K(X - X_d) + \text{pinv}(\Gamma)(I - \Phi)X_d.$$

1.3.2 - Estimador

Em controle moderno, um excelente método adicional é o do projeto de estimador do sistema a partir do último dado captado pelos sensores. No pêndulo de Furuta, deseja-se estimar a posição seguinte a partir da posição, da estimativa anterior e do vetor de entrada $U(k)$ anterior. No controle, isto significa tratar com o vetor de saída $Y(k)$ e com a matriz H , ambos definidos anteriormente.

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Como H multiplica o vetor $X(k)$, obtêm-se somente os dados de θ_1 e θ_2 . A predição $\bar{X}(k + 1)$ é dada de acordo com a seguinte forma:

$$\bar{X}(k + 1) = \Phi \cdot \bar{X}(k) \cdot \Gamma + U(k) + L_p(Y(k) - H \cdot \bar{X}(k)).$$

L_p é uma matriz de ganhos desenvolvida por Ackermann e definida como:

$$L_p = [0 \ 0 \ 0 \ 1]C^{-1}\alpha_c(\Phi^T),$$

onde

$$C^{-1} \equiv [H^T \ \Phi^T H^T \ \Phi^{2T} H^T \ \Phi^{3T} H^T]$$

e $\alpha_c(z)$ é o polinômio das raízes desejadas para os pólos do estimador.

A função do Matlab® *place* já calcula a matriz L_p :

$$L_p^T = \text{place}(F^T, H^T, P),$$

onde P é um vetor contendo os pólos desejados do sistema no LQR, desde que sua multiplicidade não seja maior que o posto de H . O diagrama abaixo (figura 6) exemplifica um estimador de malha fechada.

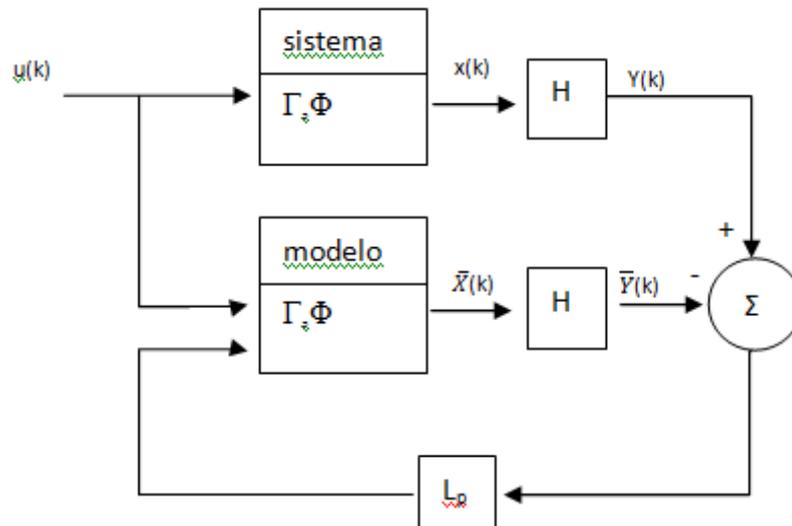


Figura 6- projeto de estimador

Na simulação do controlador em conjunto com o estimador, é preciso reescrever as equações, passando a

$$\begin{bmatrix} X(k + 1) \\ \tilde{X}(k + 1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \Phi - \Gamma K & \Gamma K \\ 0 & \Phi - L_p H \end{bmatrix}}_{\Phi_{c+e}} \begin{bmatrix} X(k) \\ \tilde{X}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma \\ 0 \end{bmatrix} U_{ref}(k),$$

$$\tilde{X}(k) = X(k) - \bar{X}(k).$$

1.3.3 - O filtro de Kalman

Kalman foi um engenheiro elétrico e matemático húngaro, que imigrou para os Estados Unidos no meio do séc. XX. Seu reconhecimento provém de seu trabalho sobre filtragem de sinal realizado nos anos cinquenta. A exploração e o pioneirismo da corrida espacial conseguiram progredir graças a este método, chamado de filtro de Kalman.

O filtro de Kalman consiste em levar em conta a estatística de erro conhecida dos sensores e comparar estes erros com o resultado do estimador. A diferença entra no sistema como a sua entrada. Deve-se supor que existam perturbações e ruídos no sistema. Assim, estes são acrescentados ao espaço de estados:

$$\begin{cases} X(k+1) = \Phi \cdot X(k) + \Gamma \cdot U(k) + \Gamma_w \cdot w \\ Y(k) = H \cdot X(k) + v, \end{cases}$$

onde w é um vetor de perturbação na atuação e v é um vetor de ruído no sensoriamento. A equação agora usa um novo vetor corrigido de posição \hat{X} como entrada ao sistema e é calculado de acordo com a solução

$$\hat{X}(k) = \bar{X}(k) + L_c(k) \left(Y(k) - H\bar{X}(k) \right),$$

onde o ganho ótimo é

$$L_c(k) = \bar{P}(k)H^T (H\bar{P}(k)H^T + V)^{-1}.$$

Note que o ganho ótimo necessita da matriz de covariância $\hat{P}(k)$ dos sensores e dos atuadores. Assim, a última estimativa deve ser corrigida para

$$\begin{aligned} \hat{X}(k) &= \bar{X}(k) + L_c \cdot \left(Y(k) - H\bar{X}(k) \right), \\ \hat{P}(k) &= (I - L_c H) \bar{P}(k). \end{aligned}$$

Calcula-se então a resposta com o vetor $\hat{X}(k)$ corrigido.

$$U(k) = U_{ref} - K\hat{X}(k).$$

Desta forma, o sistema prevê a amostra seguinte, $k+1$, através das equações

$$\begin{cases} \bar{X}(k+1) = \Phi \cdot \hat{X}(k) + \Gamma \cdot U(k) \\ \bar{P}(k+1) = \Phi \cdot \hat{P}(k) \cdot \Phi^T + \Gamma_w \cdot W \cdot \Gamma_w^T \\ X(k+1) = \Phi \cdot X(k) + \Gamma \cdot U(k) + \Gamma_w w. \end{cases}$$

Este método fornece uma resposta do sistema a partir da estatística dos sensores e dos atuadores, mesmo que haja uma perturbação e ruídos nos sinais de entrada e de saída.

Capítulo 2 - Simulação Dinâmica

As rotinas em ambiente MatLab que serão utilizadas nas simulações descritas nesse capítulo se encontram nos arquivos “Simulacao_ao_linear.m” e “Simulacao_ao_linear2.m”.

A simulação para verificação do comportamento dinâmico foi feita utilizando o software comercial MatLab, e tem o objetivo de avaliar visualmente a coerência das equações de movimento dos dois sistemas estudados. Para fazer a simulação do movimento do pêndulo, foi utilizado o Robotics Toolbox¹ desenvolvido por Peter I. Corke e que permite fazer a visualização de um manipulador, dados seus parâmetros de Denavit-Hartenberg.

Desse modo, existem duas rotinas para cada sistema, “Simulacao_ao_linear.m” e “Pendulo_Simples.m” para o pêndulo simples e “Simulacao_ao_linear2.m” e “Pendulo_Duplo.m” para o pêndulo duplo. Para cada uma destas, definimos os parâmetros físicos de ambos os pêndulos (massa, momento de inércia, comprimentos, etc.). Também se utiliza a sub-rotina pré-definida do MatLab que se chama “ode45()”, a qual, dada a posição inicial e os intervalos de tempo desejados, faz a simulação da equação diferencial ordinária definida no corpo de seu código.

Desse modo, podemos escrever as equações isoladas para as acelerações angulares das três juntas, ou seja, para o pêndulo simples,

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 = f_1(\dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2, \tau) \\ \ddot{\theta}_2 = f_2(\dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2, \tau). \end{cases}$$

Estas equações foram calculadas literalmente utilizando o software matemático Maple12 e estão definidas no apêndice C. Perceba que estas equações poderiam ser feitas numericamente a cada passo da iteração, evitando o trabalho de fazer toda a resolução literal do sistema de equações diferenciais. Entretanto, como será visto depois, será preciso ter o conhecimento destas equações isoladas das acelerações angulares para que seja feita a linearização local da simulação do sistema a cada passo da iteração de controle. Assim, do mesmo modo que para o pêndulo simples, para o duplo, teremos

¹ Em todas as simulações no Matlab®, foi empregada a biblioteca *Robotics Toolbox*®.

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 = f_1(\dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2, \theta_3, \dot{\theta}_3, \tau) \\ \ddot{\theta}_2 = f_2(\dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2, \theta_3, \dot{\theta}_3, \tau) \\ \ddot{\theta}_3 = f_3(\dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2, \theta_3, \dot{\theta}_3, \tau). \end{cases}$$

Vale ressaltar que estas equações são consideravelmente extensas, de modo que foram calculadas utilizando a linguagem simbólica disponível pelo Maple12 (e depois fazendo a conversão para linguagem MatLab) e estão, como no caso anterior, disponíveis no apêndice C. Estas equações não foram reduzidas utilizando métodos de substituição trigonométrica, mas foram feitos testes comparativos utilizando o cálculo numérico destas mesmas equações, garantindo sua veracidade.

Utilizando o Robotics Toolbox, na posição inicial, podemos visualizar a simulação dos pêndulos físicos, como na figura abaixo.

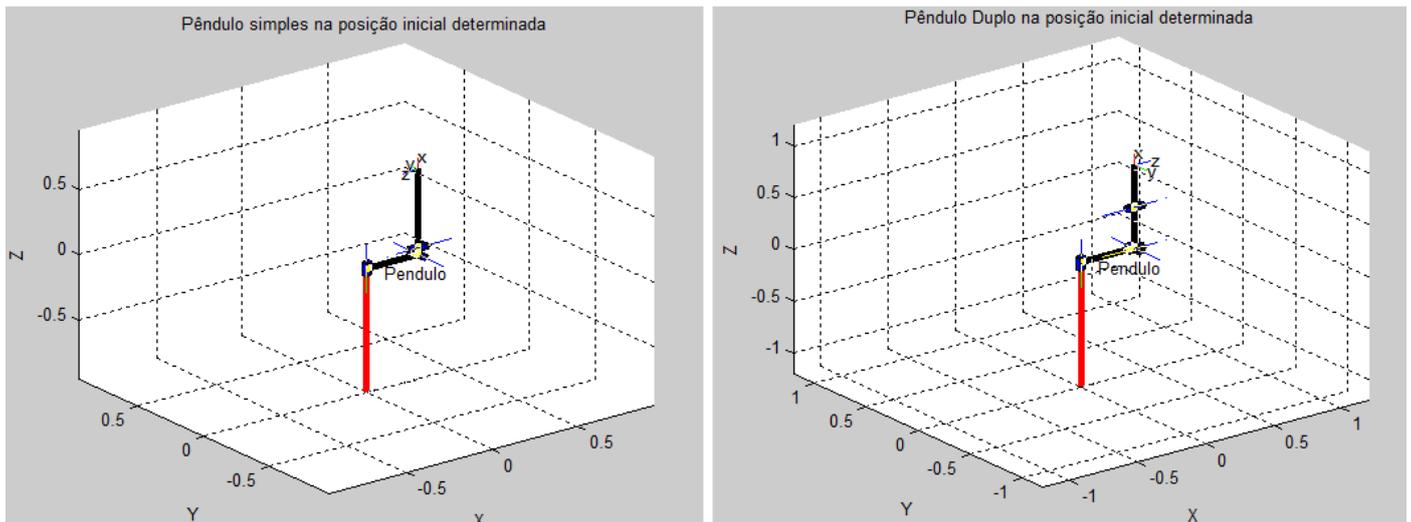


Figura 7- Posição inicial de ambos os pêndulos

Na primeira análise, observa-se simplesmente a dinâmica do problema. Para efeito de observação, com a condição inicial do pêndulo dada na posição paralela ao plano x_0y_0 da base do sistema, utilizamos os seguintes valores para os parâmetros físicos do problema:

$m_1 = 0.5 \text{ kg}$	$a_1 = 0.6\text{m}$
$m_2 = 0.1 \text{ kg}$	$l_0 = 0.3\text{m}$
$b_1 = 0.1 \text{ Ns/m}$	$l_1 = 0.3\text{m}$
$b_2 = 1\text{e-}6 \text{ Ns/m}$	$h_0 = 0.1\text{m}$
$a_0 = 0.3\text{m}$	$d_0 = 0.1\text{m}$

Definindo o valor da aceleração da gravidade, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, a posição inicial é estabelecida como

$$X_0 = [0 \quad 0 \quad 0,1 \quad 0].$$

A figura 8 mostra a relação entre os ângulos da base e da haste e suas respectivas velocidades angulares. Vemos que o comportamento de ambos os elementos está de acordo com o esperado. A haste parte de $\pi/2$, ganha velocidade, oscila e pára exatamente em π (segundo a referência de que $\theta_2 = 0$ significa vertical para cima). Já a base parte do repouso, adquire velocidade e pára em um pequeno ângulo diferente de zero ($\theta_1 \neq 0$), devido ao acoplamento entre os dois elementos. Vale observar que, nos gráficos a seguir, definimos

$$\omega_1 = \dot{\theta}_1,$$

$$\omega_2 = \dot{\theta}_2,$$

$$\omega_3 = \dot{\theta}_3.$$

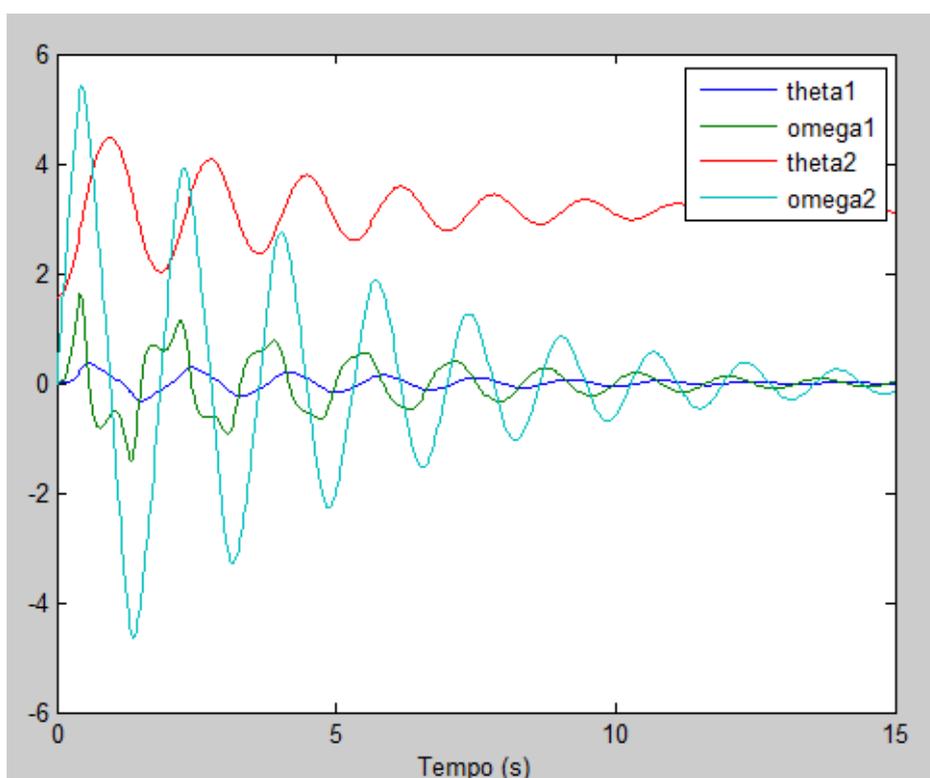


Figura 8- Comportamento dinâmico do pêndulo livre

O segundo gráfico (figura 9) explicita a relação entre todas as variáveis em questão em função do tempo da dinâmica. Percebe-se um claro movimento oscilatório levemente amortecido para a haste, mas relativamente mais amortecido para a base. Isto ocorre porque os coeficientes de amortecimento do motor e do rolamento, onde se apóia o pêndulo, são diferentes.

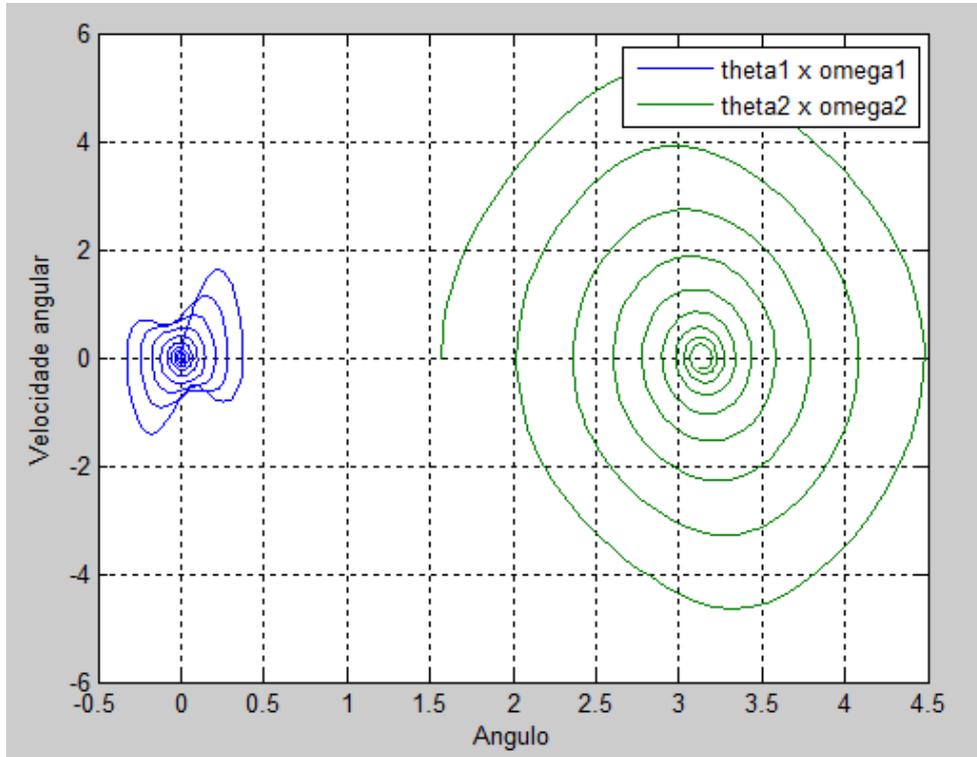


Figura 9- Plano de estados do pêndulo livre

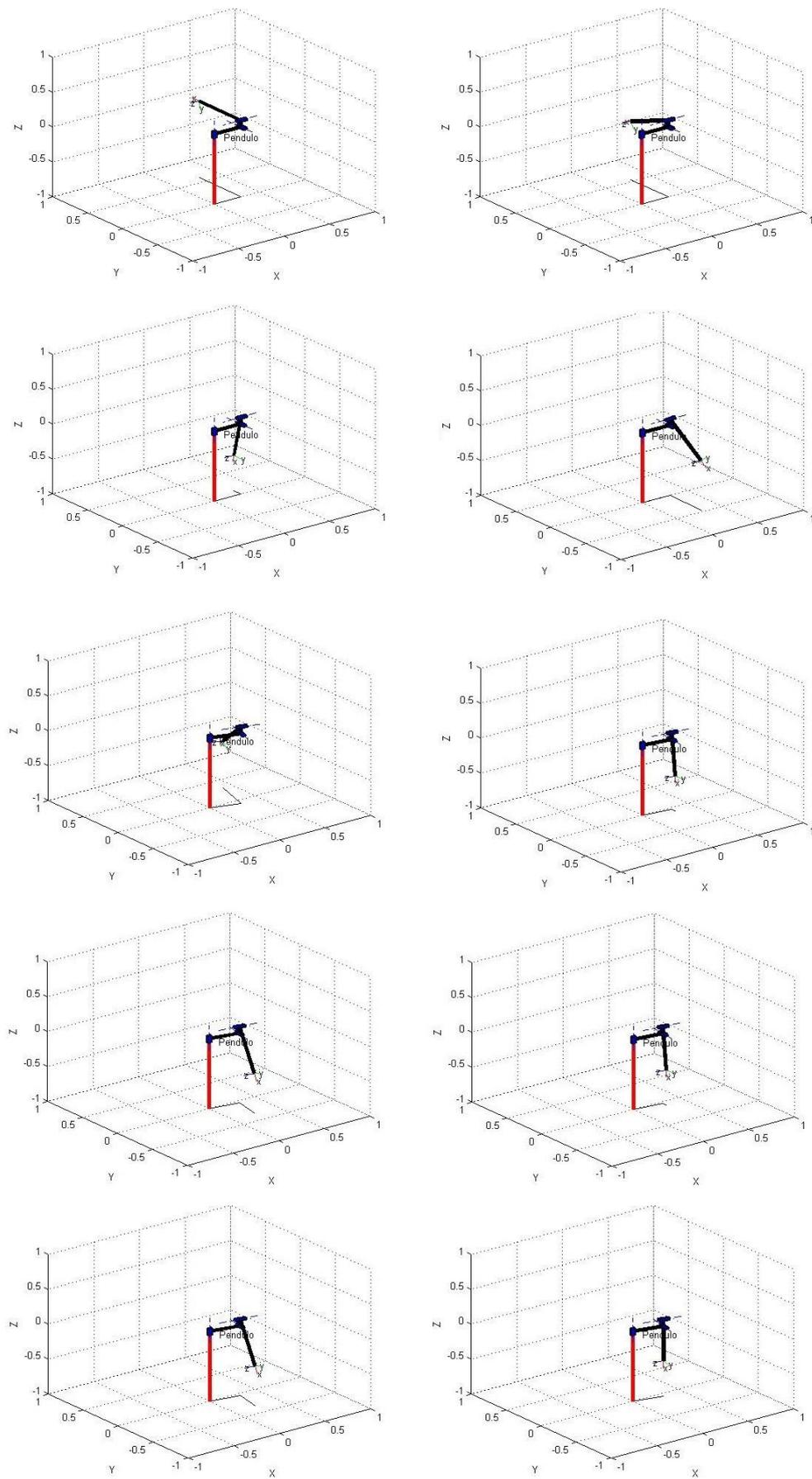


Figura 10- Comportamento dinâmico, pêndulo simples

Para o pêndulo duplo, podemos fazer o mesmo tipo de simulação, considerando

$$X_0 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0,1 \quad 0]$$

$m_1 = 0.5 \text{ kg}$	$a_1 = 0.6\text{m}$
$m_2 = 0.2 \text{ kg}$	$a_2 = 0.6\text{m}$
$m_3 = 0.1 \text{ kg}$	$l_0 = 0.3\text{m}$
$b_1 = 0.1 \text{ Ns/m}$	$l_1 = 0.3\text{m}$
$b_2 = 0.1 \text{ Ns/m}$	$l_2 = 0.3\text{m}$
$b_3 = 0.1 \text{ Ns/m}$	$h_0 = 0.1\text{m}$
$a_0 = 0.3\text{m}$	$d_0 = 0.1\text{m}$

Pode ser observado o comportamento dado pela figura 11.

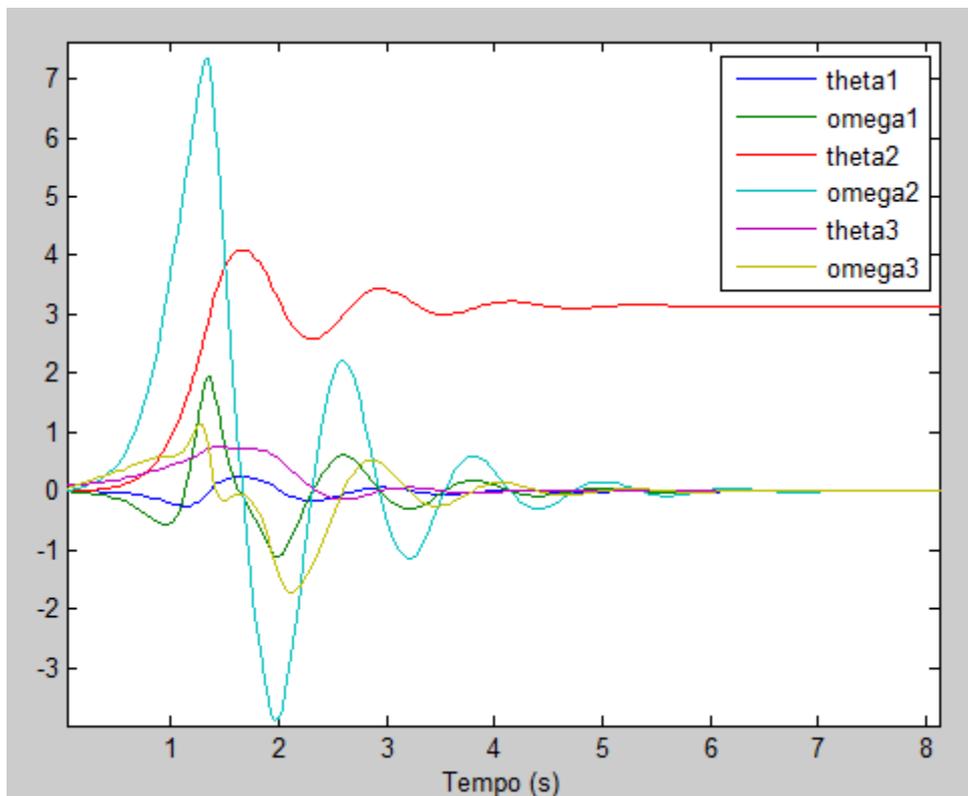


Figura 11- Comportamento livre do pêndulo duplo

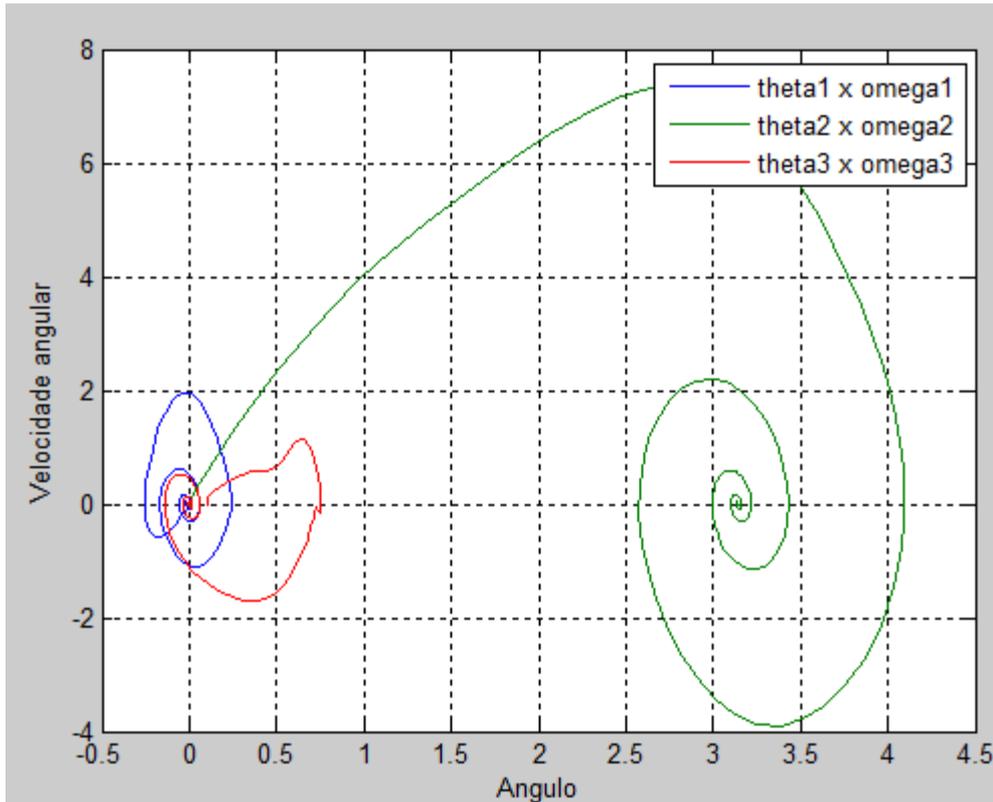


Figura 12- Plano de estados do pêndulo duplo livre

Como esperado, todas as variáveis possuem um comportamento assintótico, verificados pelas espirais do plano de estados, e convergem para zero, a não ser por θ_2 que converge para π , pois foi convencionado que a posição mais baixa do pêndulo seria considerada como meia volta completa.

2.1- Implementação do controle

2.1.1- Estabilização - Estudo do sistema linear

A rotina em MatLab que simula os comportamentos analisados a seguir é “Simulacao_linear.m”.

O controle de estabilização do pêndulo pode ser encarado como um sistema de equações lineares. Essa propriedade pode ser aplicada quando temos pequenos ângulos de deslocamento em relação à posição inicial (da ordem de 0,1 radianos) e pequenas velocidades (da ordem de 0,5 rad/s). Neste caso, utilizamos as equações linearizadas calculadas e podemos escrever o sistema na forma de espaço estado linear

$$\begin{cases} \dot{X} = FX + G\tau \\ Y = DX. \end{cases}$$

Para efeitos de estudo dos estimadores foi realizada uma simulação completamente linear, que extrapola a consideração de pequenos deslocamentos e considera todo o espaço de variáveis do sistema como linear pela sub-rotina “dlsim()” do MatLab. Utilizando a mesma escolha de parâmetros físicos do pêndulo que aqueles utilizados na simulação dinâmica, pode-se escrever que, utilizando o ZOH e um período de amostragem de $T = 0,01$ s, o sistema de equações de espaço de estado discreto,

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1.000 & 0.0099 & 0.0006 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.9814 & 0.1144 & 0.0006 & -0.001 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0012 & 0.0100 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.010 & 0.2327 & 1.0012 & -0.040 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0001 & -0.001 & 0.0000 & 1.0010 & 0.0100 \\ 0.0000 & 0.0102 & -0.242 & 0.0000 & 0.1929 & 1.0010 \end{bmatrix}.$$

Do mesmo modo,

$$\Gamma = [0.0009 \quad 0.1862 \quad 0.0005 \quad 0.0982 \quad -0.0005 \quad -0.1020]^T.$$

Os pólos de malha aberta do sistema são dados pelos autovalores da matriz Φ , ou seja,

$$eig(\Phi) = [1.0000 \quad 1.0546 \quad 1.0333 \quad 0.9435 \quad 0.9867 \quad 0.9656].$$

Considerando a condição inicial linear

$$X_0 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0,1],$$

temos pólos do sistema discreto com módulo maior que uma unidade, podemos deduzir que o sistema seja instável em malha aberta. De fato, o comportamento sem controle do sistema pode ser visto na figura a seguir:

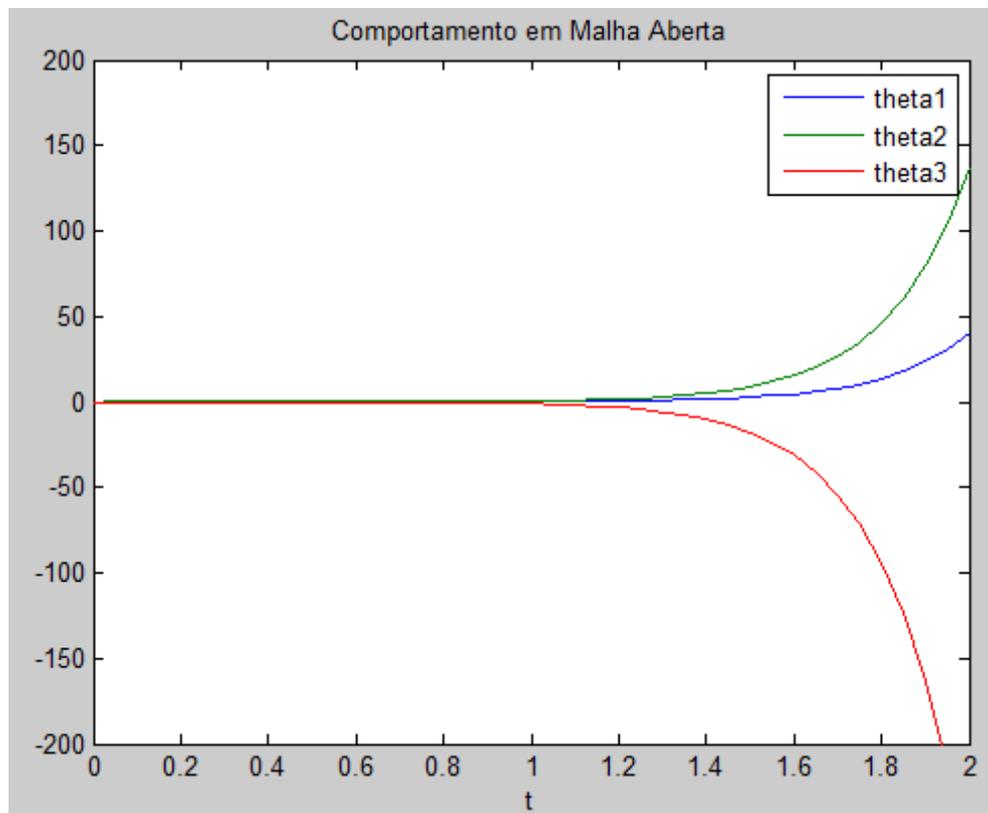


Figura 13- Comportamento do pêndulo duplo em malha aberta

Podemos ver que as variáveis aumentam de valor indefinidamente e o sistema fica altamente instável. Para resolver o problema, utiliza-se um vetor de ganho K , mas antes deve-se conferir o critério de controlabilidade e observabilidade do sistema. De fato, para que esse sistema seja controlável e observável, precisamos ter o posto da matriz de controlabilidade e observabilidade igual ao número de variáveis de estado. A matriz de controlabilidade é dada por

$$C = [\Gamma \quad \Phi\Gamma \quad \dots \quad \Phi^{n-1}\Gamma],$$

onde n é o número de variáveis de estado, no caso, 6. Já a matriz de observabilidade é dada por

$$O = [D \quad D\Phi \quad \dots \quad H\Phi^{n-1}]^T.$$

Desse modo, calculando o posto dessas matrizes utilizando a função “rank” do MatLab, temos:

$$\text{rank}(C) = 6,$$

$$\text{rank}(O) = 6.$$

Como o posto da matriz é igual o número de variáveis de estado, o sistema é totalmente controlável, mesmo que sejam utilizados apenas sensores de posição e não de velocidade.

A matriz de ganho K pode ser obtida utilizando o método de Ackerman (pela função “place()” do MatLab) ou pelo método LQR. No primeiro caso, temos que especificar os pólos de malha aberta do sistema, que serão considerados todos iguais a 0.95, de modo a resultarem em um sistema assintoticamente estável. O vetor resultante é

$$K = [2.9380 \quad 3.4079 \quad -68.2570 \quad -31.3036 \quad -97.9369 \quad -26.4814].$$

Perceba que este vetor corresponde a um feedback positivo de força ao sistema. Isso pode ser interpretado como, quando tentamos equilibrar um pêndulo no sentido vertical, devemos fazer uma atuação a favor daquele movimento feito pelo pêndulo (ao se tentar equilibrar uma vara na mão, este fato é facilmente verificado).

Agora, utilizando o método LQR, temos o ganho ótimo. Vamos considerar os pesos arbitrários de 200, 500, 500 e 1 para as posições 1, 2, 3 e para a minimização da força, respectivamente. O resultado obtido é muito próximo daquele observado no caso por Ackerman, com o vetor de pesos

$$K = [1.2597 \quad 1.5861 \quad -34.4255 \quad -17.1574 \quad -58.9822 \quad -15.7496].$$

Os pólos de malha fechada neste caso seriam

$$\text{eig}(\Phi - \Gamma K) = [0.9393 \pm 0.0274i \quad 0.9662 \pm 0.0224i \quad 0.9716 \pm 0.0055i].$$

Perceba que todos os pólos têm módulo menor que uma unidade e são, desse modo, controláveis. Se tivermos um atuador de capacidade infinita, podemos fazer pólos arbitrariamente rápidos, e o sistema pode convergir de maneira muito mais rápida. De fato, o comportamento para o ganho LQR feito seria aquele dado pela figura 14.

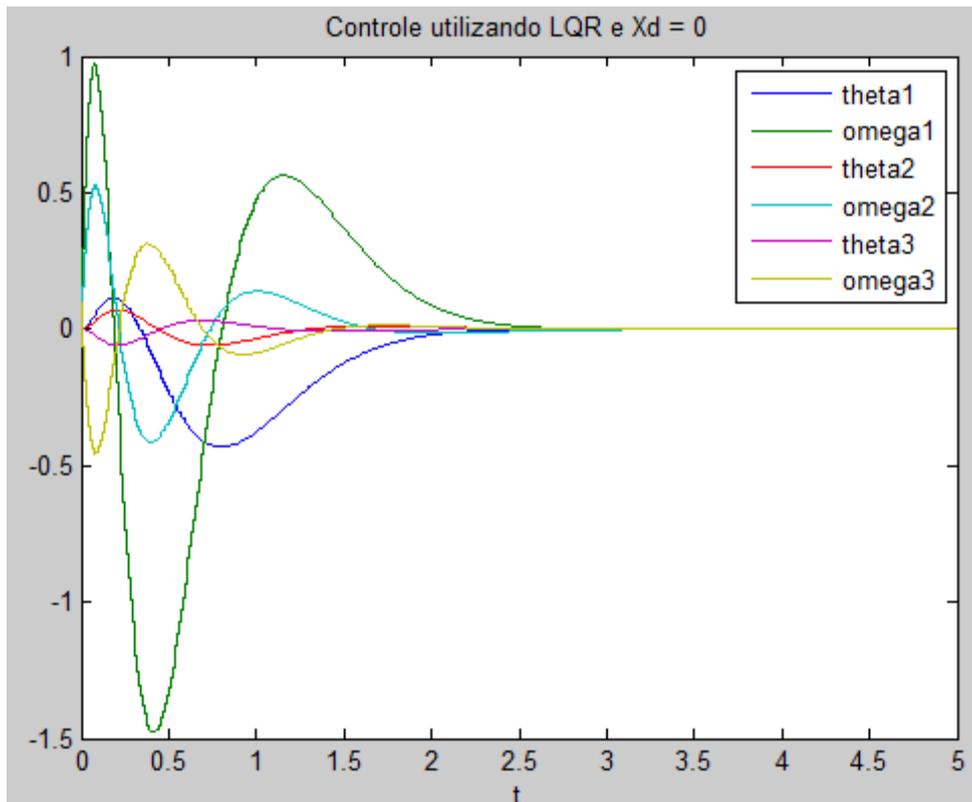


Figura 14- Comportamento com controle LQR

Entretanto, a entrada para o sistema quando queremos uma posição final diferente de zero não pode ser a mesma daquela utilizada. Se considerarmos condições inicial e final desejadas como

$$X_0 = [\pi \quad 0 \quad 0 \quad 0.1 \quad 0 \quad -0.1],$$

$$X_d = [\pi/4 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0],$$

a entrada seria

$$U(k) = -K(X - X_d) + pinv(\Gamma)(I - \Phi)X_d,$$

e obtemos o comportamento observado na figura 15.

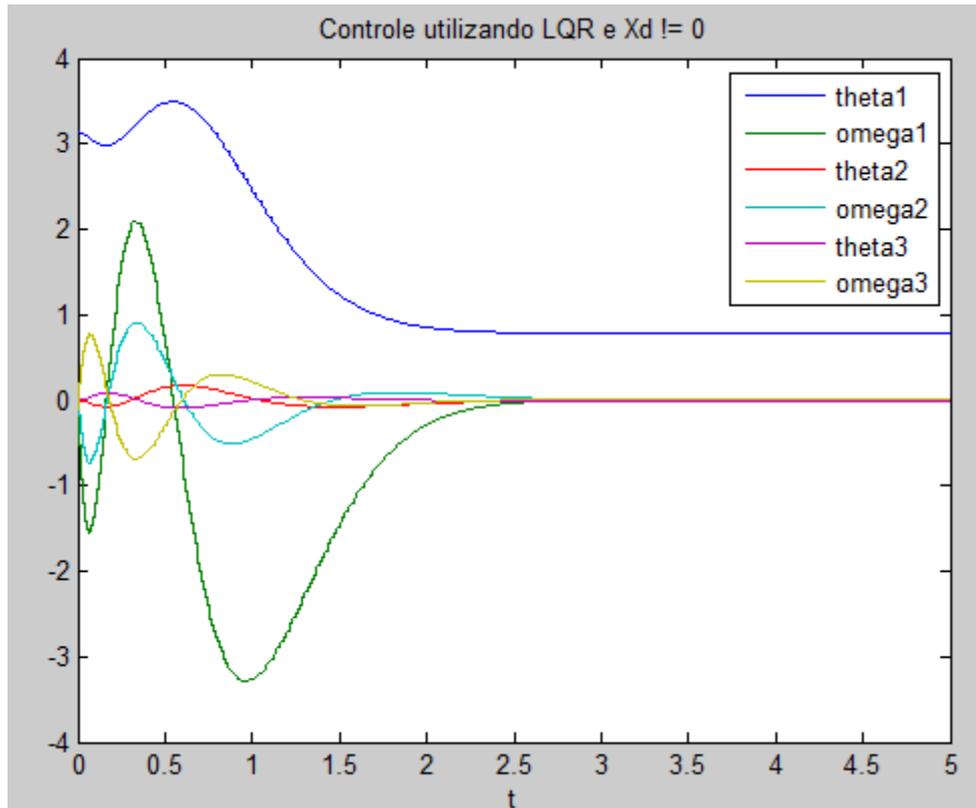


Figura 15- Controle LQR com posição desejada diferente de zero

Mas, como a simulação foi modelada como linear, a resposta do sistema não corresponde à realidade e podemos ver na simulação que o pêndulo tem sua estabilidade controlada de maneira diferente daquela esperada.

Agora, considerando um estimador para as velocidades, queremos uma resposta rápida do sistema, pois o atraso de estimativa entre os intervalos de amostragem pode causar instabilidade. Vamos utilizar pólos seis vezes mais rápidos para o estimador; teremos, então, os números característicos:

$$\frac{1}{(1 - 0,9393)} = 16,5; \quad \frac{1}{(1 - 0,9662)} = 29,6; \quad \frac{1}{(1 - 0,9716)} = 35,2.$$

Os pólos do estimador devem ser

$$\frac{16,5}{6} = 2,75 \therefore \frac{(2,75 - 1)}{2,75} = 0,6364,$$

que são consideravelmente rápidos. Com isso, temos a matriz de ganhos preditivos L_p calculada pelo método de Ackerman:

$$L_p = [0 \ 0 \ 0 \ 1]C^{-1}\alpha_c(\Phi^T),$$

$$\Phi_{est} = \begin{bmatrix} \Phi - \Gamma K & \Gamma K \\ 0 & \Phi - L_p D \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_{est} = \begin{bmatrix} \Gamma \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$D_{est} = [D \quad 0].$$

A posição inicial conhecida é dada por uma excitação na extremidade do pêndulo:

$$X_0 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0].$$

Os estados estimados podem ser observados na figura 16.

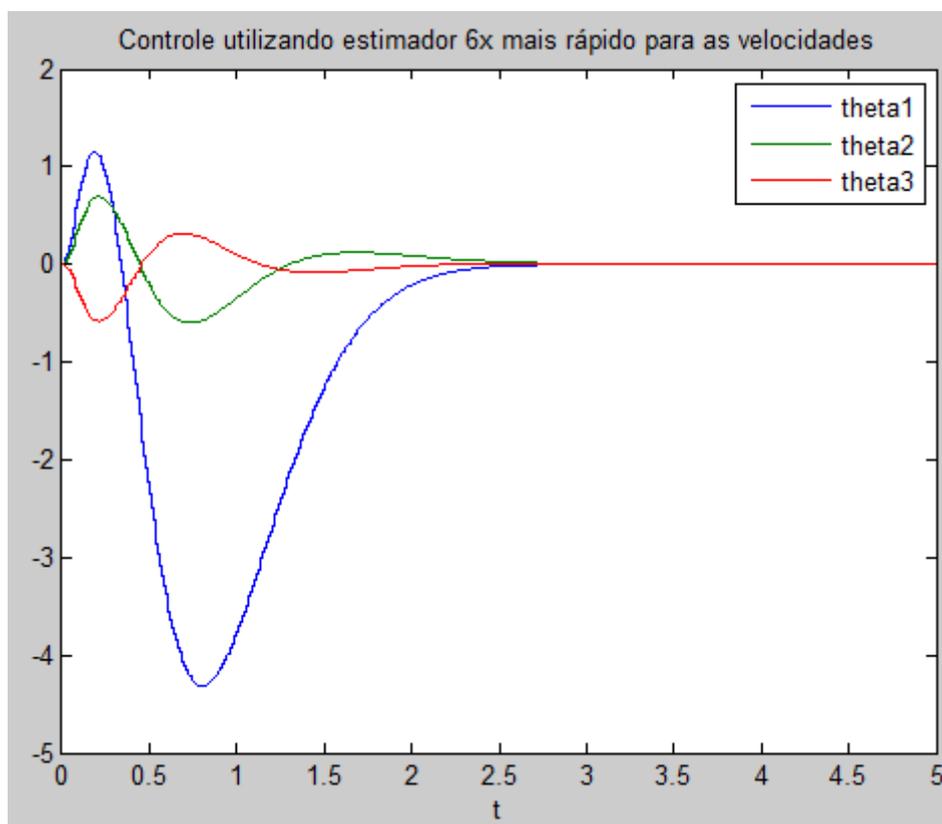


Figura 16- Controle LQR mais o estimador

2.1.2- Estabilização do sistema não-linear

Para os pêndulos simples e duplo foram também consideradas equações que refletem a realidade com maior precisão, utilizando um modelo não-linear de controle. Vale perceber que várias considerações deverão ser tomadas agora, como, por exemplo, não ser mais possível controlar o pêndulo fora da região linear com um controle linear do tipo LQR e com o filtro de Kalman simples e linear. Assim sendo, duas estratégias foram tomadas: fazer um swing-up não-linear para fora da região linear; e utilizar o Filtro de Kalman Estendido (EKF), não-linear, que corrige as instabilidades que ocorreriam com o filtro tradicional.

Se tivermos o conhecimento das equações discretas do sistema, na forma

$$\begin{cases} X(k+1) = \varphi(X(k), U(k) + w) \\ Y(k) = \eta(X(k)) + v, \end{cases}$$

onde w é um vetor de perturbações aleatórias, v um vetor de ruídos dos sensores e φ e η são funções não-lineares. Do mesmo modo, as matrizes Φ , Γ_w e H não são mais lineares e passam a ser dadas por:

$$\hat{\Phi} = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial X} \right|_{X=\hat{X}(k)}, \quad \hat{\Gamma}_w(k) = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial U} \right|_{X=\hat{X}(k)}, \quad \bar{H}(k) = \left. \frac{\partial \eta}{\partial X} \right|_{X=\bar{X}(k)}.$$

Observe que as duas primeiras derivadas parciais são aplicadas ao vetor de entrada estimado $\hat{X}(k)$ e a terceira, ao valor previsto $\bar{X}(k)$. Podemos implementar uma rotina do Filtro de Kalman estendido somado ao controlador a cada passo, com o seguinte algoritmo:

- Simula/mede $Y(k)$ (ao simular fazendo uma escolha aleatória de w e v) – simulador dos sensores:

$$Y(k) = \eta(X(k)) + v;$$

- Calcula o ganho ótimo de Kalman (L_c) – estimador:

$$L_c = \bar{P}(k) \cdot \bar{H}^T (\bar{H} \cdot \bar{P}(k) \cdot \bar{H}^T + V)^{-1};$$

- Corrige a última predição e sua covariância – estimador/correção:

$$\begin{cases} \hat{X}(k) = \bar{X}(k) + L_c [Y(k) - \eta(\bar{X}(k))] \\ \hat{P}(k) = (I - L_c \cdot \bar{H}) \bar{P}(k); \end{cases}$$

- Calcula $U(k)$ a partir da estimativa corrigida – controlador:

$$U(k) = U_{ref} - K \cdot \hat{X}(k);$$

- Prevê e simula o valor de $X(k+1)$, e obtém a covariância do passo seguinte – estimador/predição:

$$\begin{cases} \bar{X}(k+1) = \varphi(\hat{X}(k), U(k)) \\ \bar{P}(k+1) = \hat{\Phi} \cdot \hat{P}(k) \cdot \hat{\Phi}^T + \hat{\Gamma}_w \cdot W \cdot \hat{\Gamma}_w^T; \end{cases}$$

- Simula a dinâmica:

$$X(k+1) = \varphi(X(k), U(k) + w);$$

- Volta ao primeiro item.

Mas, no caso estudado, conhecemos apenas as equações contínuas do sistema,

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = f(X(t), U(t) + w) \\ Y(t) = h(X(t)) + v. \end{cases}$$

A equação discreta associada é aproximada como:

$$\bar{X}(k+1) = \Phi \cdot \hat{X}(k) + \hat{\Gamma}_0 \left[f(\hat{X}(k), U(k)) - \hat{F} \cdot \hat{X}(k) \right],$$

onde

$$\begin{aligned} \hat{F}(k) &= \left. \frac{\partial f}{\partial X} \right|_{X=\hat{X}(k)}, & \hat{G}(k) &= \left. \frac{\partial f}{\partial U} \right|_{X=\hat{X}(k)}, & \bar{H}(k) &= \left. \frac{\partial h}{\partial X} \right|_{X=\bar{X}(k)}, \\ \hat{\Phi} &= e^{\hat{F}T}, & \hat{\Gamma}_0 &= \int_0^T e^{\hat{F}s} ds, & \hat{\Gamma} &= \hat{\Gamma}_w = \hat{\Gamma}_0 \cdot \hat{G}. \end{aligned}$$

Neste caso a rotina do loop de controle fica a seguinte:

- Simula/mede $Y(k)$ (ao simular fazendo uma escolha aleatória de w e v) – simulador dos sensores:

$$Y(k) = \eta(X(k)) + v;$$

- Calcula o ganho ótimo de Kalman (L_c) – estimador:

$$L_c = \bar{P}(k) \cdot \bar{H}^T (\bar{H} \cdot \bar{P}(k) \cdot \bar{H}^T + V)^{-1};$$

- Corrige a última predição e sua covariância – estimador/correção:

$$\begin{cases} \hat{X}(k) = \bar{X}(k) + L_c [Y(k) - \eta(\bar{X}(k))] \\ \hat{P}(k) = (I - L_c \cdot \bar{H}) \bar{P}(k); \end{cases}$$

- Calcula $U(k)$ a partir da estimativa corrigida – controlador:

$$U(k) = U_{ref} - K \cdot \hat{X}(k);$$

- Prevê e simula o valor de $X(k+1)$, e obtém a covariância do passo seguinte – estimador/predição:

$$\begin{cases} \bar{X}(k+1) = \Phi \cdot \hat{X}(k) + \hat{\Gamma}_0 \left[f(\hat{X}(k), U(k)) - \hat{F} \cdot \hat{X}(k) \right] \\ \bar{P}(k+1) = \hat{\Phi} \cdot \hat{P}(k) \cdot \hat{\Phi}^T + \hat{\Gamma}_w \cdot W \cdot \hat{\Gamma}_w^T; \end{cases}$$

- Simula a dinâmica:

$$X(k + 1) = \Phi \cdot X(k) + \Gamma_0 [f(\hat{X}(k), U(k) + w) - F \cdot X(k)];$$

2.2 - Pêndulo Simples não-linear

As rotinas que simulam os estudos avaliados a seguir encontram-se nos arquivos “Simulacao_discreta.m” e “Pendulo_Simples.m”.

Primeiramente, foi feita a simulação para o pêndulo simples. Através de vários testes sobre a abrangência da consideração de linearidade do sistema, podemos supor que este pode ser considerado dentro da faixa de linearidade quando a posição varia entre -0,1 e 0,1 radianos em relação à posição inicial vertical e o módulo da velocidade é menor que 0,5 rad/s. No início da simulação são calculadas as matrizes lineares Fk e Gk contínuas do sistema e, a partir destas, calculam-se as matrizes $Phik$ e $Gammak$ discretas lineares do sistema, das quais, por sua vez, deriva-se o ganho ótimo LQR do sistema. Nestas simulações, foi sempre utilizado um tempo de aquisição de dados de 0,01 segundos.

As variáveis de quantização para encoders com 512 pulsos/revolução adquirem o valor

$$q_1 = q_2 = \frac{2\pi}{512}.$$

Os pólos de malha aberta,

$$eig(Phik) = [1.0000 \quad 1.0430 \quad 0.9339 \quad 0.9755]$$

são instáveis, mas, utilizando um ganho K ótimo,

$$K = [-17.1067 \quad -10.3780 \quad -101.9936 \quad -26.3651],$$

temos os pólos

$$eig(Phik - Gammak \cdot K) = [0.7458 \pm 0.1957i \quad 0.9672 \pm 0.0090i],$$

que tornam o sistema estável, pois tem módulo menor que uma unidade. Assim, podemos observar o seguinte comportamento do sistema na figura 17.

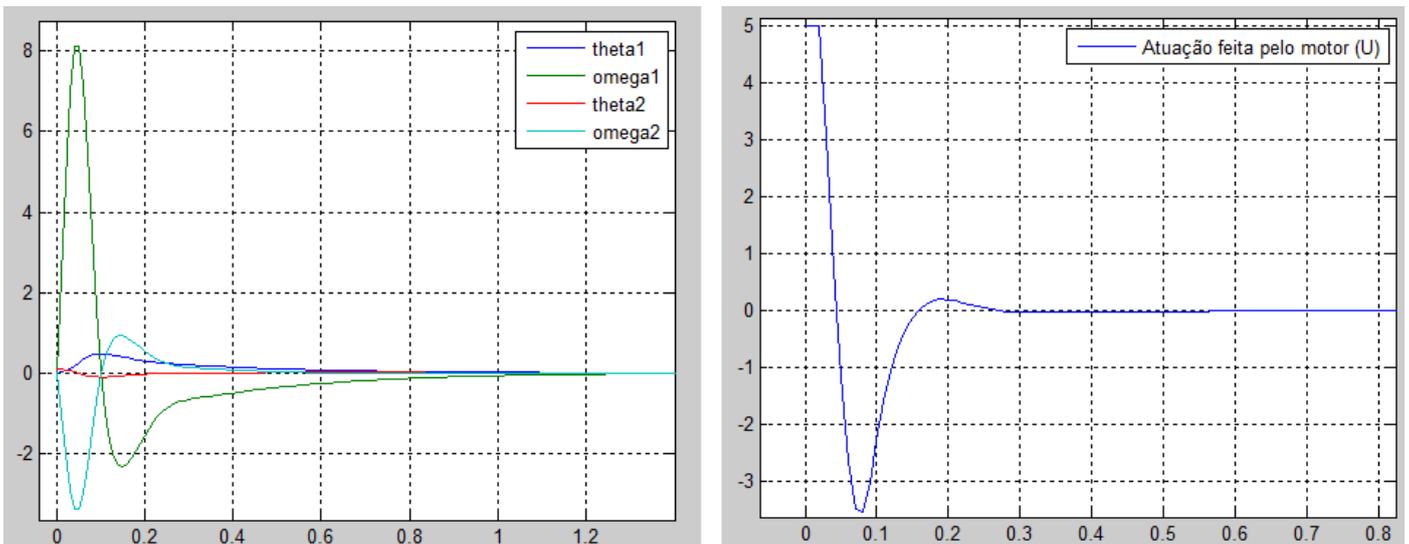


Figura 17- Controle LQR para o comportamento não-linear

Entretanto, podemos perceber que o sistema atinge uma velocidade muito alta e o motor satura na sua atuação máxima (5 Nm). Agora, se utilizarmos o fator LQR para minimizar o torque do motor, arbitramos o peso $Q_2=200$, e teremos a resposta vista na figura 18.

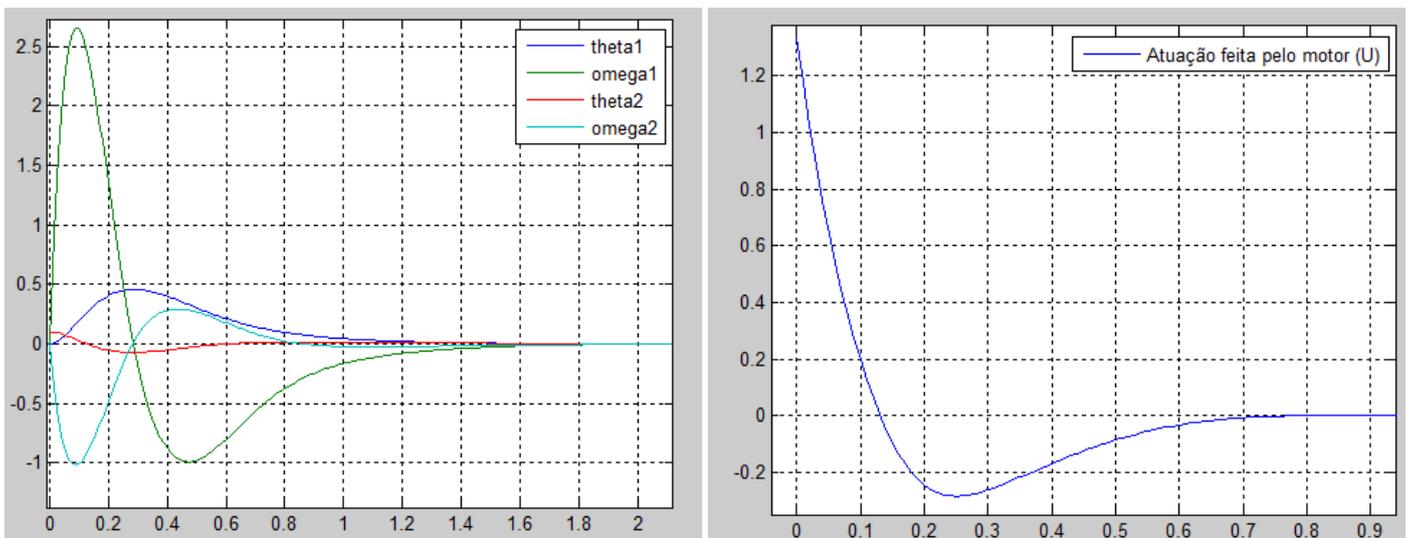


Figura 18- Controle LQR não linear com peso 200 em Q2

Apesar de o sistema ter uma resposta de estabilização mais lenta, a atuação exigida do motor é quase cinco vezes menor. Vale ressaltar que, como a matriz de covariância dos sensores é nula (sensores ideais), e o motor não possui erros de atuação, o filtro consegue estimar exatamente as velocidades do pêndulo. Desse modo, em qualquer instante de tempo, o erro de estimativa é zero.

- Efeito do ruído nos sensores:

Se considerarmos que sensores ideais conseguem medir o estado de saída exatamente e que a medição dos sensores ditos reais depende do desvio padrão médio de suas medições, ou seja, da sua qualidade de medição, então podemos estudar o efeito comparativo destes ruídos. Como temos apenas sensores de posição, podemos considerar o efeito para um desvio padrão de medida de 0,001, 0,01 e 0,1 radianos, visto na figura 19.

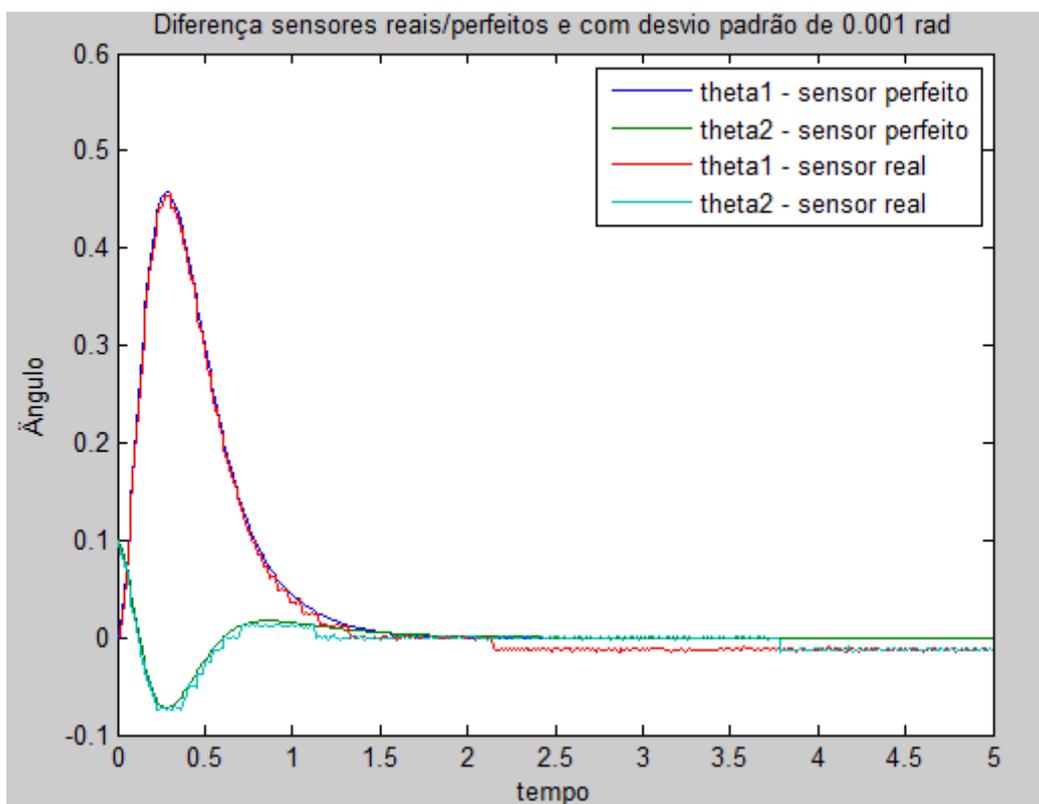


Figura 19- Comportamento com ruído nos sensores com $\text{dp} = 0.001$

Podemos ver, pela figura 19, o considerável efeito de um desvio padrão pequeno (0,1%); os sensores têm erros da ordem de 0,1 radianos quando o sistema se encontra em regime permanente e é estável. Agora, aumentando ainda mais o desvio padrão, observamos o comportamento segundo a figura 20.

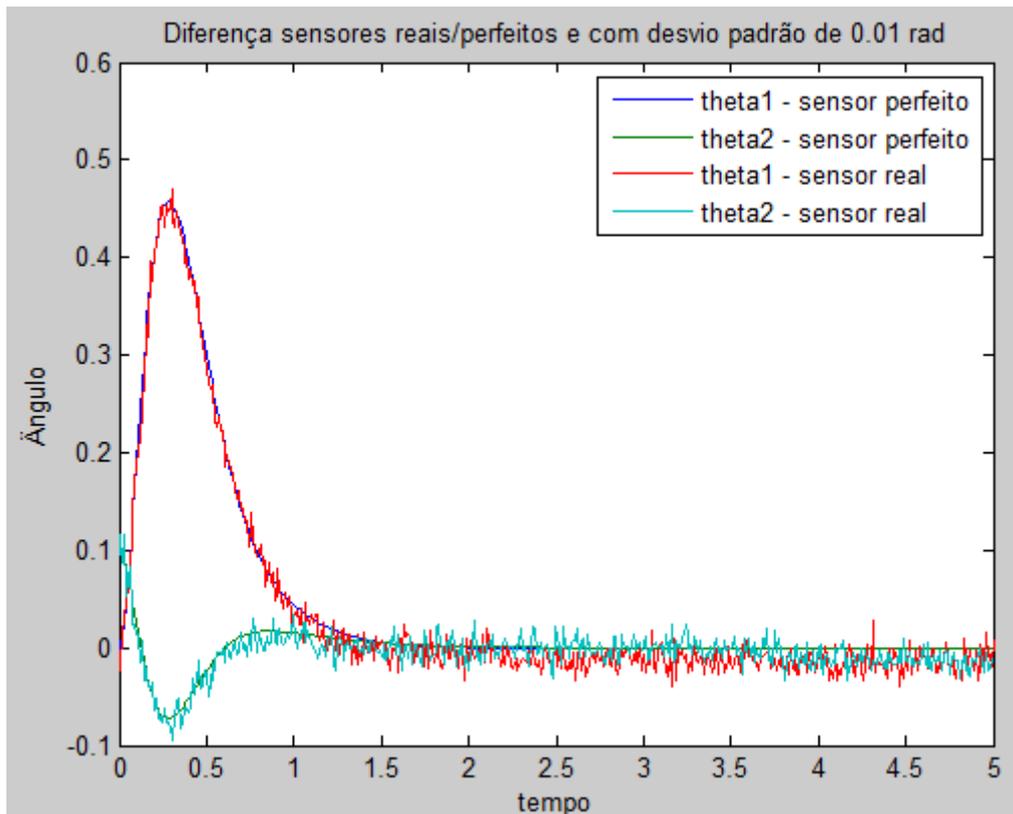


Figura 20- Comportamento com ruído nos sensores com dp = 0.01

O erro de leitura causado por um desvio de 1% faz com que o sensoriamento seja consideravelmente impreciso, e isso pode ser esperado, uma vez que o efeito do ruído não é linear e, segundo a modelagem pelo Filtro de Kalman, varia com o seu quadrado. Extrapolando para 10% de desvio, pode-se ter a resposta dada pela figura 21.

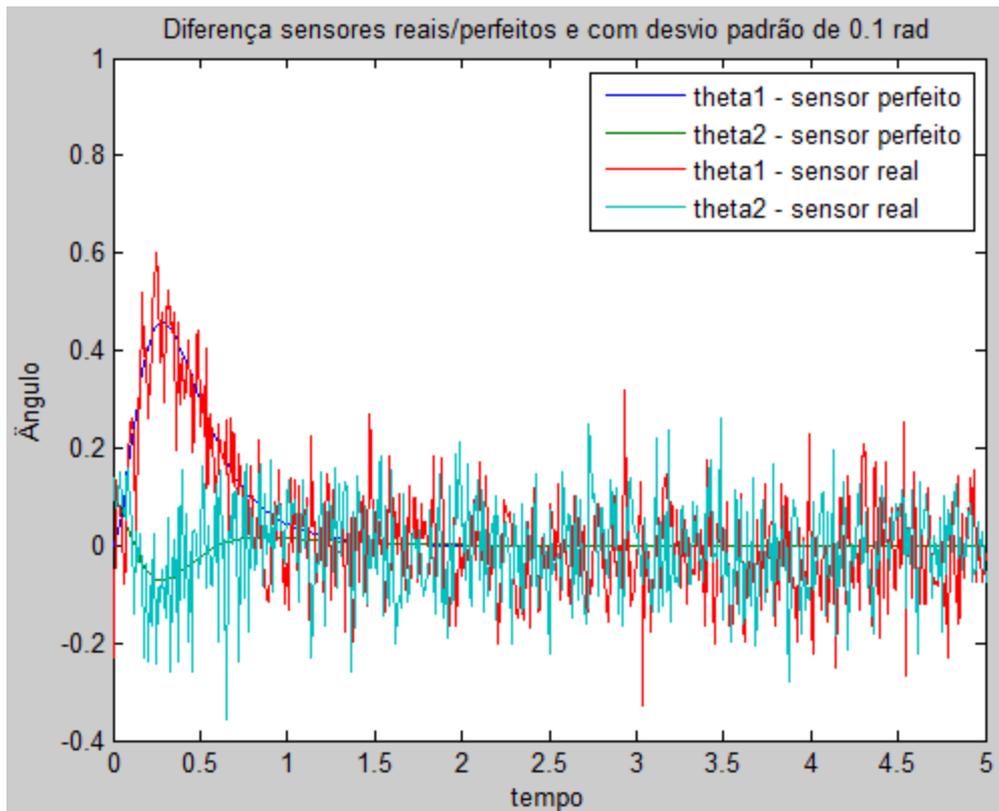


Figura 21- Comportamento com ruído nos sensores com $\sigma_p = 0.1$

Neste caso, o ruído da leitura dos sensores torna extremamente imprecisa a medição, mas, mesmo assim, o Filtro de Kalman consegue controlar o sistema. Isso ocorre, pois a matriz de variação da leitura do sensor é pré-determinada e, desse modo, o filtro avalia a qualidade de medição e, a partir disso, podemos dizer o quanto podemos confiar ou não naquele sensor, baseando o controle proporcionalmente à estimativa do estado. Um ruído da ordem de 1 radiano já desestabiliza o sistema e o pêndulo não consegue mais ser mantido na vertical.

- Efeito das perturbações:

O filtro ainda leva em consideração as eventuais perturbações que podem ocorrer no comando de controle. Não podemos ter total certeza de que o torque que é enviado pelo controlador ao atuador é exercido exatamente por este. É razoável que o motor possa ter um erro pequeno de atuação. Assim sendo, vamos considerar sensores ideais (resolução de 512 pulsos/revolução) e um atuador com desvio padrão de 0,1%.

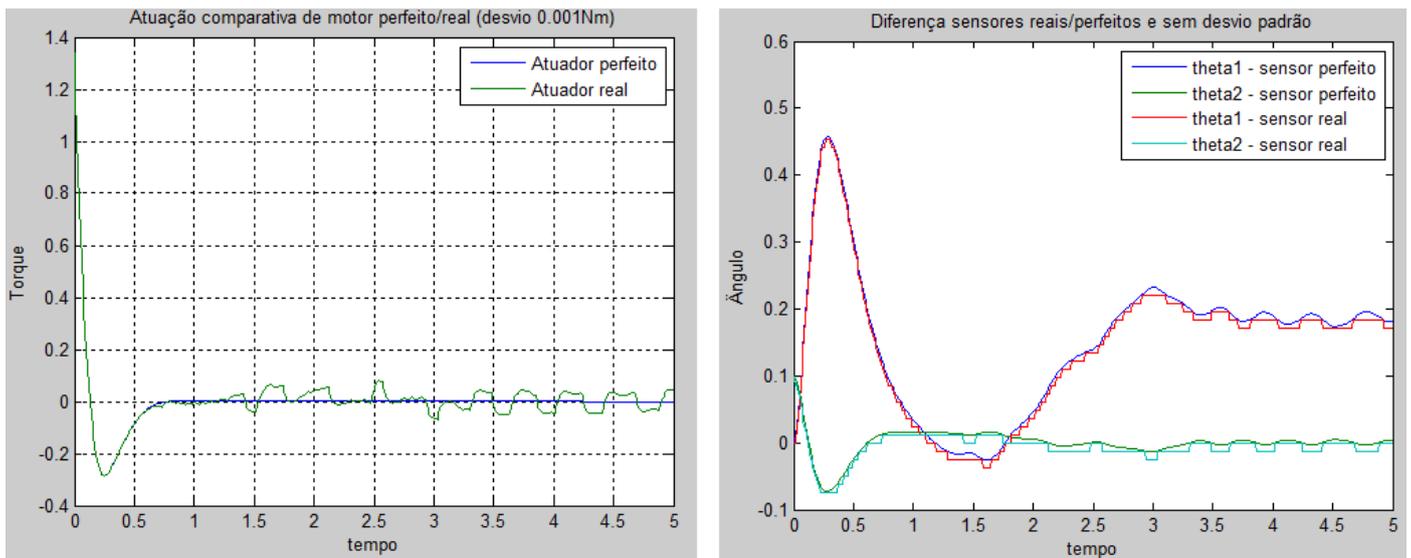


Figura 22- Comportamento com perturbações na atuação

Podemos verificar, segundo a figura 22, que o atuador, mesmo sujeito a perturbações, consegue controlar o pêndulo na posição vertical. Isso pode ser feito se considerarmos um sistema bastante rápido e assumirmos que seja conhecido o comportamento do atuador utilizado. Para uma atuação com desvio padrão de 1,5 Nm, o motor ainda consegue controlar o sistema, mas as perturbações são tão grandes que existe uma grande variação do estado do pêndulo em relação à posição inicial. Se aumentarmos ainda mais esse desvio, o pêndulo não consegue mais ser mantido na vertical e o sistema se torna caótico. Na figura 23 a seguir, podemos ver o comportamento para um desvio de 5 Nm.

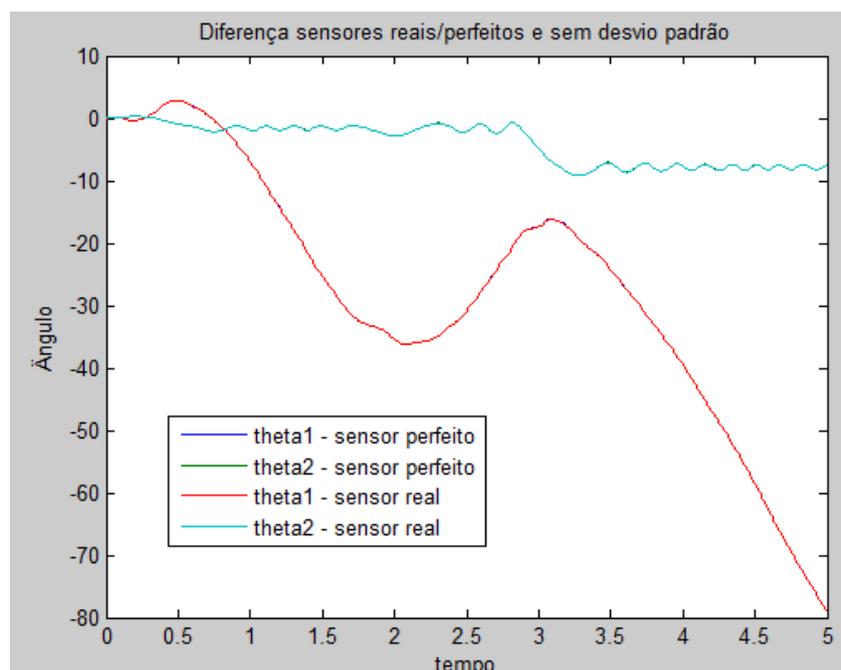


Figura 23- Comportamento com alta perturbação

- Modelando a situação real:

Sabemos que tanto os atuadores quanto os sensores utilizados na realidade são imprecisos e, desse modo, precisamos considerar as possíveis falhas de leitura e atuação dos sistemas reais. Assim, foram feitas simulações que também têm o objetivo de se aproximar o tanto quanto possível da realidade e verificar a eficácia do método apresentado neste trabalho. Vamos considerar os seguintes casos:

1. Atuador com desvio de 0.01 Nm e sensores com desvio de 0.001 e 0.1 radianos e quantização $q = 2\pi/512$ (figura 24).

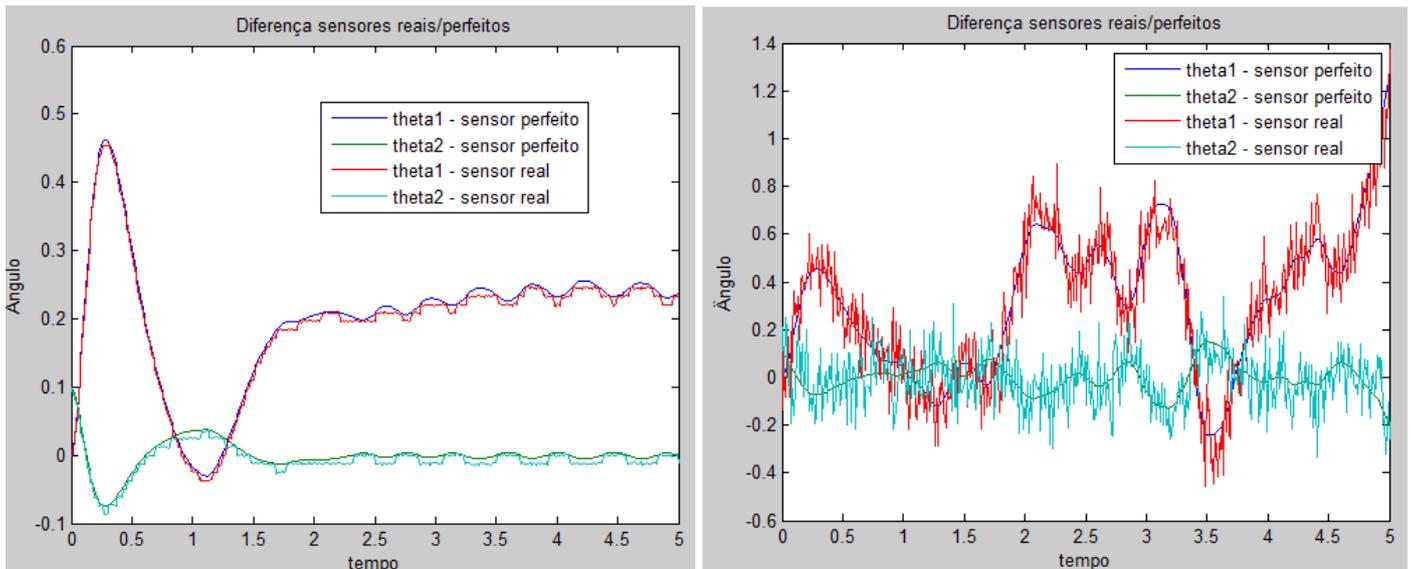


Figura 24- Comportamento de acordo com a variação no ruído

2. Atuador com desvio de 0.1 e 0.001 Nm e sensores com desvio de 0.01 radianos e quantização $q = 2\pi/512$ (figura 25).

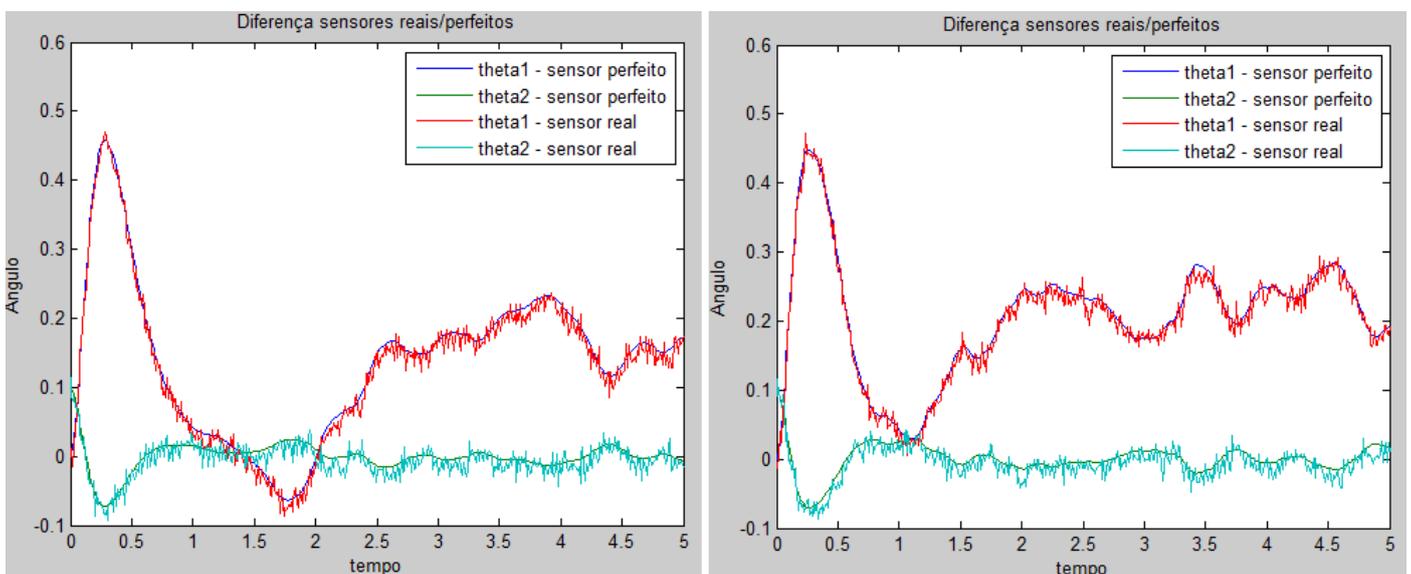


Figura 25- Comportamento de acordo com a variação na perturbação

3. Atuador com desvio de 0.01 Nm e sensores com desvio de 0.01 radianos e quantização $q = 2\pi/256$ e $q = 2\pi/1024$ (figura 26).

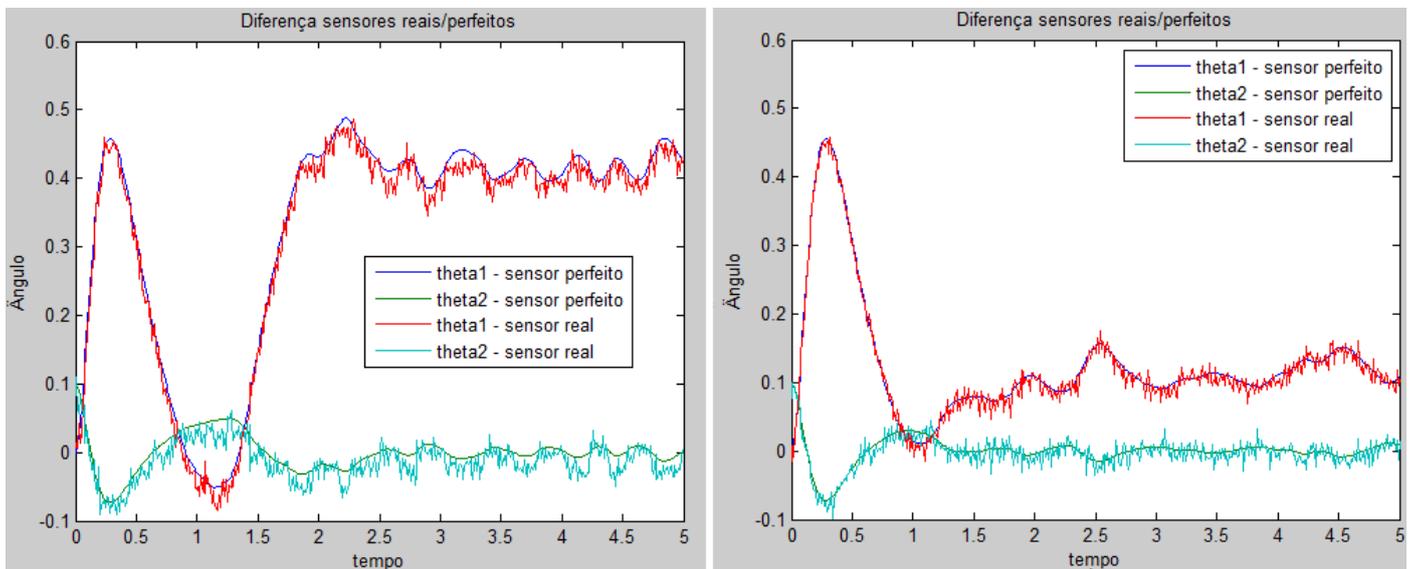


Figura 26- Efeito de quantização

Dadas as condições analisadas, podemos verificar que os sensores são os que mais influenciam a estabilização do sistema, mesmo que a atuação tenha um desvio padrão relativamente mais alto. No primeiro caso, podemos ver que o ruído do sensor, ainda que não seja capaz de desestabilizar o sistema, impõe uma vibração consideravelmente grande quando o motor tenta equilibrar o pêndulo em torno da posição inicial. Já no segundo caso, podemos observar que, ainda que em um primeiro momento o motor retorne à posição inicial, a atuação com diferentes desvios segue aproximadamente o mesmo padrão de resposta, mesmo que a simulação seja executada várias vezes (considerando o ruído como aleatório). O ponto de estabilização ainda se encontra em θ_1 igual a 0.2 radianos, logo, a resolução do *encoder* oferece grande distúrbio para o sistema. Quando temos uma resolução de 256 pulsos por revolução, o sistema, além de estabilizar longe da posição inicial, ainda oscila consideravelmente. Contudo, se melhorarmos a resolução para 1024 pulsos por revolução, então o sistema consegue convergir mais rapidamente e as oscilações são mais suaves que as anteriores.

É interessante perceber que não importam os efeitos de quantização, ruído ou perturbações sobre o sistema. O tempo de resposta, no que diz respeito ao fim do *overshoot*, ainda é praticamente o mesmo, ou seja, existe pouca influência daqueles fatores sobre o tempo de estabilização do sistema. De qualquer modo, ainda que sejam introduzidos erros e falhas reais sobre a simulação, o Filtro de Kalman consegue robustez suficiente para garantir a convergência de retorno à posição inicial.

Em uma análise diferente, vale avaliar as estimativas feitas por Kalman quando temos uma situação crítica como aquela calculada. Assim, pelos gráficos da figura 27 a seguir, podemos conferir a comparação entre as velocidades do sistema e aquelas previstas pelo filtro e, adicionalmente, o erro das estimativas.

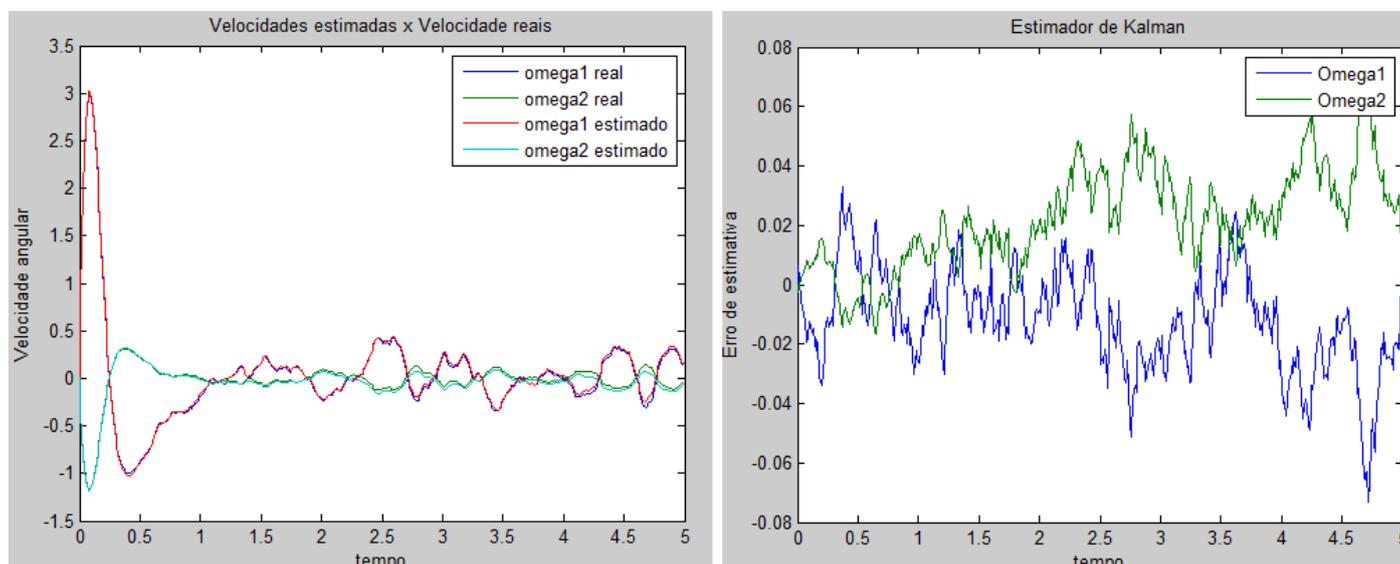


Figura 27- Comparação da velocidade real e estimada (esq) e erro da estimativa (dir)

Vale perceber que quase não há grande diferença entre a estimativa do modelo de Kalman e o valor considerado real pela simulação, graças ao pré-conhecimento da variação do motor e dos sensores. Isso torna a estabilização consistente, pois podemos definir uma tolerância da ordem de 0,5 rad/s para a linearização das equações ao redor da posição inicial. O erro máximo de estimativa nessa condição é da ordem de 6,25 vezes menor que o limite máximo.

2.3- Pêndulo Duplo não-linear

As rotinas que simulam os estudos avaliados a seguir encontram-se nos arquivos “Simulacao_discreta2.m” e “Pendulo_Duplo.m”.

No presente caso, precisamos considerar o controle do pêndulo duplo invertido. A dinâmica é consideravelmente mais complexa que para o pêndulo simples e os fatores de acoplamento entre os termos torna o sistema ainda mais instável. Desse modo, o controle precisa ser ainda mais robusto e eficiente para que seja possível fazer a estabilização de ambos os elos na posição vertical. Além disso, a modelagem dinâmica precisa ser mais precisa, pois pequenos fatores de modelagem incorreta ou insuficiente podem ser decisivos para o fracasso do controle. Os pólos de malha aberta deste sistema discreto são dados por

$$eig(Phik) = [1.0000 \quad 0.9239 \quad 0.9419 \quad 1.0458 \quad 0.9963 \quad 1.0172],$$

classificados facilmente como instáveis, pois se encontram fora do círculo unitário do plano imaginário. Aplicando o ganho ótimo LQR, encontramos os seguintes ganho e pólos:

$K = [0.0194 \quad 0.0359 \quad -0.8591 \quad 0.0564 \quad 4.7518 \quad 0.7046] \cdot 10^3$,
 $eig(Phik - Gammak \cdot K) = [0.9327 \quad 0.8929 \pm 0.0853i \quad 0.9692 \pm 0.0151i \quad 0.9830]$.
 Observam-se pólos estáveis.

Como feito no caso anterior, para o pêndulo simples, vamos considerar primeiramente o controle do sistema com sensoriamento e atuação ideal, sendo que os *encoders* possuem quantização $2\pi/512$. Levando em conta testes feitos sob estas condições, podemos definir que a região de linearidade do pêndulo duplo é ainda menor que para o simples, da ordem de 0.02 radianos (ou seja, 5 vezes menor), mas para isso o motor precisa ter uma potência mais elevada.

Foram escolhidos pesos 500, 1000 e 1000 para a matriz diagonal Q_1 do controle LQR e $Q_2 = 1$. Assim, podemos verificar o comportamento assintótico; no entanto, observe na figura 28 que, como apesar da variação de ângulo ser bem menor, é necessário que o motor forneça uma potência da mesma ordem de grandeza daquela para o pêndulo simples.

Ainda podemos verificar o comportamento assintótico do pêndulo duplo, o que significa que o controlador teve sucesso para garantir a estabilidade, mesmo que a um custo maior para o motor e que o tempo de estabilização seja maior, mesmo utilizando o LQR para minimizar a força utilizada pelo pêndulo simples. Tentando minimizar a força modificando o ganho Q_2 para 200 no ganho ótimo LQR, temos a resposta da figura 29.

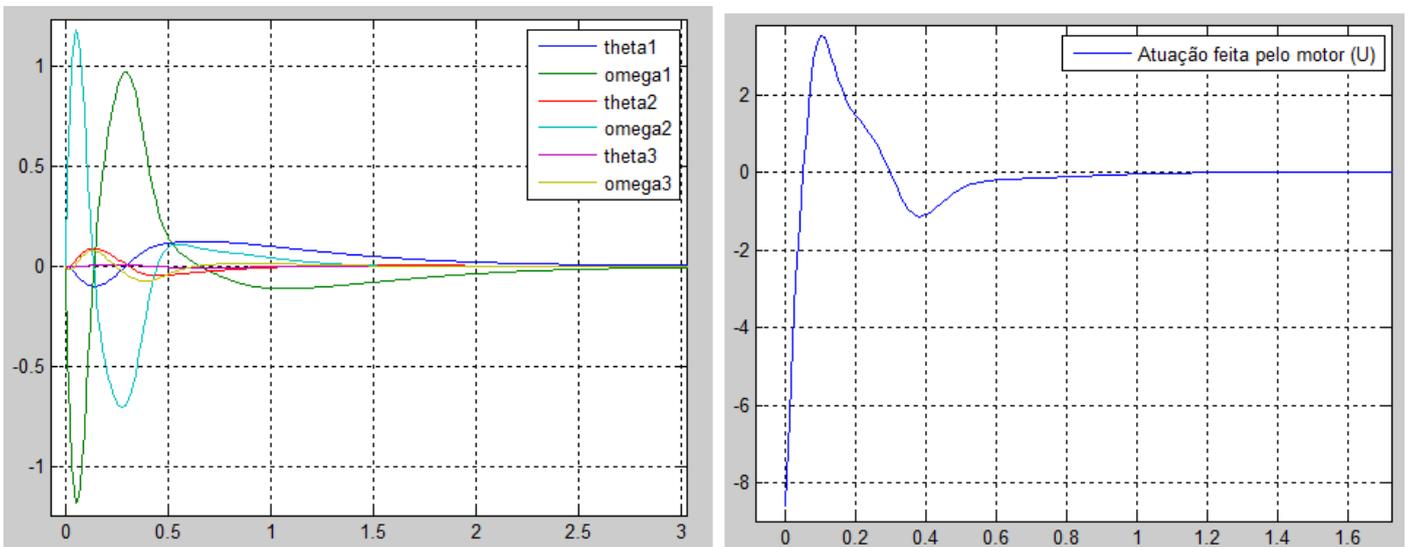


Figura 28-Controle LQR para o comportamento não-linear pêndulo duplo

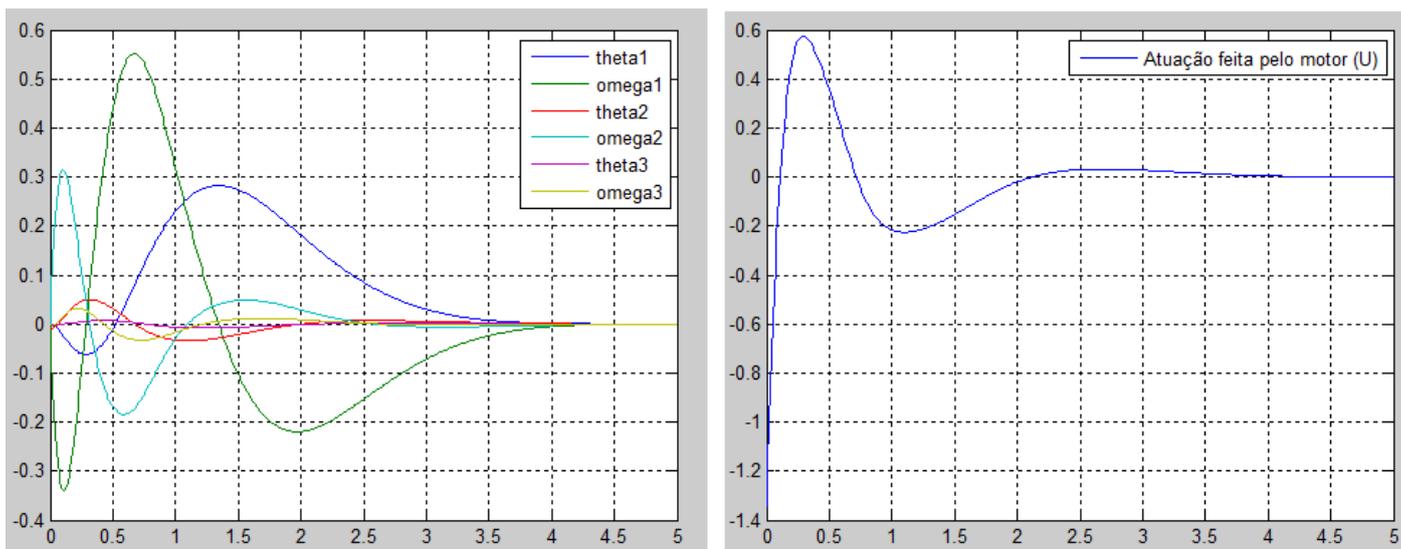


Figura 29- Controle LQR para o comportamento não-linear com ganho 200 em Q2

Mesmo com um tempo de estabilização aproximadamente quase duas vezes maior, podemos ver que a razão de redução da força necessária é de um fator cinco, o que comprova a eficácia da utilização destes pesos do controle LQR para maximizar a atuação. Neste caso, temos

$$K = [1.4623 \quad 3.1603 \quad -134.6875 \quad 3.8062 \quad 624.0844 \quad 92.1930],$$

$$eig(Phik - Gammak.K) = [0.9252 \quad 0.9479 \pm 0.0041i \quad 0.9824 \pm 0.0155i \quad 0.9830],$$

que são pólos ainda estáveis, mas que tornam o tempo de estabilização maior por serem mais lentos (valor absoluto próximo a 1).

Como perturbações com desvio da ordem de 0.1Nm já tornam o sistema instável, depois de um dado momento o acúmulo de erros faz com que o pêndulo seja desequilibrado; assim, é necessária utilização de um equipamento mais preciso para que o controle tenha sucesso. Desse modo, avalia-se diretamente a situação que considera sensores e atuadores reais, com desvio padrão de 0,001 radianos e 0,0001 Nm, respectivamente. Além disso, vamos considerar que os discos de *encoder* têm 1024 pulsos/revolução.

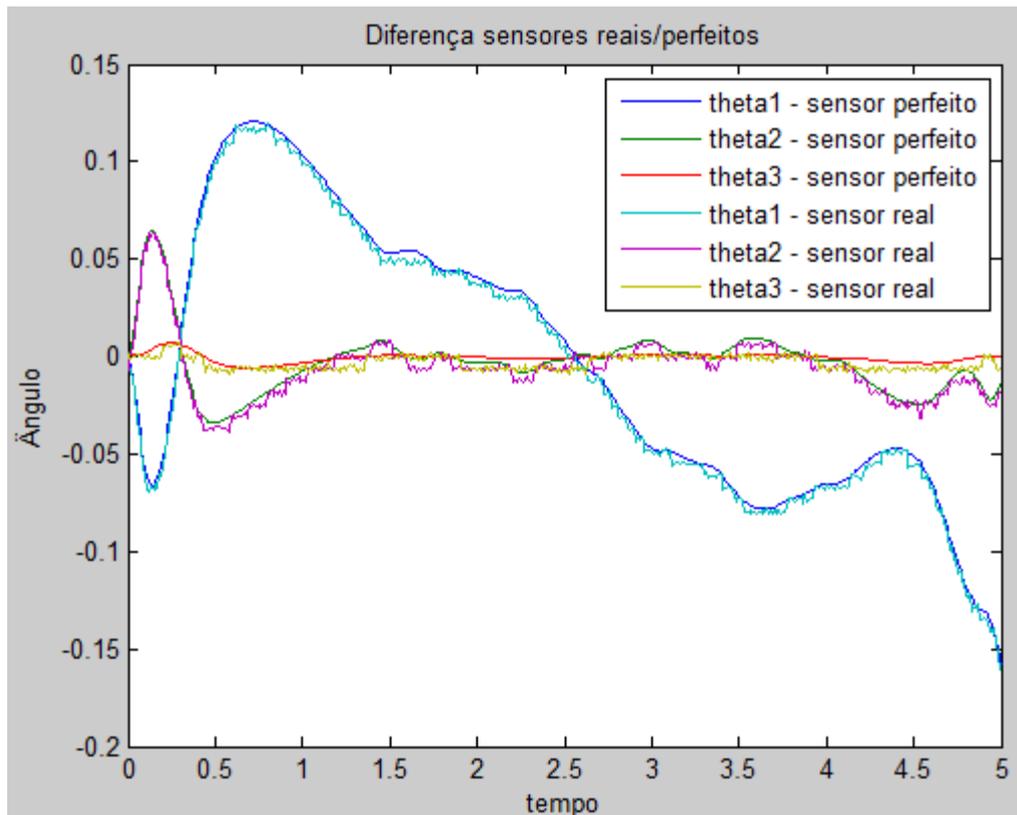


Figura 30- Diferença entre os valores reais e ideais do sistema

É interessante verificar pela figura 30 que, mesmo que seja extrapolada a condição de linearidade, se o controle tiver rapidez suficiente para reagir ao movimento, então o pêndulo ainda pode ser controlado. No gráfico, vemos que o pêndulo atinge uma posição máxima cerca de 5 vezes o valor estipulado para o critério de linearidade. Também com o objetivo de avaliar o filtro, podemos estudar a diferença entre as estimativas feitas para as velocidades estimadas e reais do sistema pela figura 31.

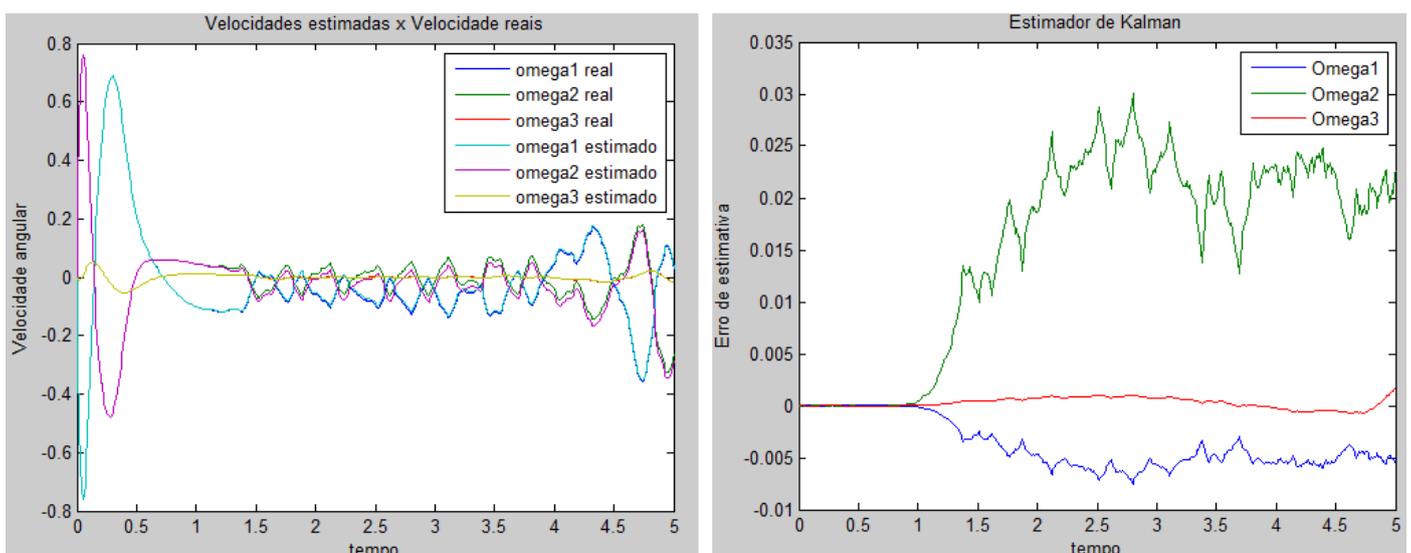


Figura 31- Comparação da velocidade real e estimada (esq.) e erro da estimativa (dir.) para pêndulo duplo em ambos

Podemos perceber que o erro de estimativa do filtro atinge, no máximo, 0,03 rad/s e que, durante o tempo de estabilização, o erro é aproximadamente zero. Quando a atuação do motor passa a ser necessariamente próxima de um ponto constante, o erro de estimativa, somado ao ruído e à falha na atuação, faz com que o sistema se torne mais oscilante e imprevisível, e a partir daí as estimativas ficam piores. Isso ocorre porque as perturbações passam a ser muito maiores que a atuação necessária do motor ($U = 0$), fazendo com que o erro percentual seja alto (da ordem de grandeza das perturbações), o que por sua vez, faz com que estas atuações imperfeitas tentem desequilibrar o pêndulo. Ainda assim, o filtro consegue controlar o sistema.

Neste caso, temos uma tolerância de aproximadamente 0,15 rad/s para as velocidades na parte linear (cerca de 3,3 vezes menor que para o pêndulo simples). No entanto, o erro máximo da estimativa da velocidade é da ordem de 5 vezes menor que essa tolerância (em comparação com os 6,25 vezes menor para o pêndulo simples). O caso do pêndulo duplo, então, pode ser interpretado como bem mais complexo que o do simples e o controle se torna muito mais crítico.

2.4- Swing-Up

Quando o pêndulo se encontra na região de não-linearidade, o controle não-linear atribuído para que o pêndulo se levante sozinho foi adotado pela literatura com o nome em inglês de *swing-up control* (definidos pela figura 32). Esse tipo de controle pode utilizar vários métodos para ser implementado, mas todos visam que o pêndulo chegue à situação linear (posição vertical para cima com ângulos e velocidade pequenos) para que seja trocado este pelo controle linear de estabilização. Vários autores utilizam modos como o uso de uma função de Lyapunov para critério de estabilização não-linear ou lógica nebulosa (*fuzzy logic*). Ainda pode-se considerar o pêndulo um manipulador com duas juntas ativas e, minimizando o torque na junta do pêndulo ao máximo, o resíduo é encarado como uma perturbação ao sistema. Furuta, que propôs originalmente este pêndulo de base rotacional, utiliza alternativamente um controle simples do tipo *bang-bang*.

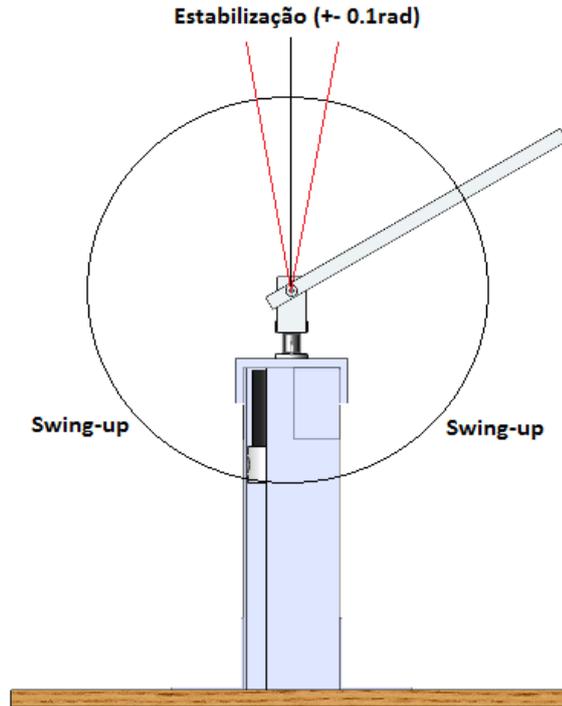


Figura 32- Região de estabilização e de "swing-up"

No presente trabalho, foi escolhido o método de controle por energia. Este método, bastante conhecido, e utilizado no exemplo do pêndulo invertido (de todos os tipos), possui um conceito simples de ser entendido, ainda que sua implementação não seja igualmente simples. O idéia se baseia em encontrar um meio de injetar energia no pêndulo e fazer com que essa energia convirja para aquela da posição vertical para cima. Se considerarmos o pêndulo simples, então a energia total do sistema pode ser dada pela soma da energia potencial e cinética

$$E_{total} = T + U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 H_{ij} \dot{\theta}_i \dot{\theta}_j + m_2 g l_1 \cos(\theta_2),$$

$$E_{total} = \frac{1}{2} [(I_1 + m_2 a_0^2) \dot{\theta}_1^2 + 2m_2 l_1 a_0 \cos(\theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + (I_2 + m_2 l_1^2) \dot{\theta}_2^2] + m_2 g l_1 \cos(\theta_2),$$

A primeira derivada da energia total em relação ao tempo é

$$\frac{d}{dt} E_{total} = \frac{1}{2} [2(I_1 + m_2 a_0^2) \dot{\theta}_1 \ddot{\theta}_1 - 2m_2 l_1 a_0 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2^2 + 2m_2 l_1 a_0 \cos(\theta_2) (\dot{\theta}_2 \ddot{\theta}_1 + \dot{\theta}_1 \ddot{\theta}_2) + 2(I_2 + m_2 l_1^2) \dot{\theta}_2 \ddot{\theta}_2] - m_2 g l_1 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2.$$

Considerando que a única variável de entrada disponível é τ , que age diretamente sobre a aceleração angular da haste, então podemos dizer que o termo disponível para manipulação que injeta energia no pêndulo é definido pelo coeficiente c que multiplica essa aceleração, ou seja, por

$$c = m_2 l_1 a_0 \cos(\theta_2) \dot{\theta}_2.$$

Se soubermos o sinal desse coeficiente, então podemos efetuar um comando de torque que é proporcional à diferença de energia e faz com que seja sempre injetada energia no sistema. Então, teoricamente é possível fazer com que o pêndulo seja levantado até a posição de equilíbrio com a lei de controle

$$U_1 = -k \cdot \text{sign}(\cos(\theta_2) \dot{\theta}_2) \frac{(E_d - E_{total})}{E_d},$$

onde

$$E_d = m_2 g l_1.$$

Isso significa que temos uma diferença de energia normalizada, que proporciona um comando de acordo com o sinal do coeficiente c do termo de aceleração da haste multiplicada por um ganho k , que pode ser ajustado de acordo com a potência disponível do motor. Caso seja usado um atuador forte o suficiente, é possível impor uma grande energia ao sistema em pouco tempo.

Porém, existe um problema na implementação dessa lei de controle. Não temos a garantia de que, ao invés de levantar o pêndulo, o motor comece a girar em seu próprio eixo e chegue a uma dada velocidade constante que faça com que a energia total do sistema também seja aquela desejada e equivalente à potencial. Assim, vale especificar um controle de final de curso para a haste, ou seja, a partir de uma dada posição θ_1 , o motor passa a receber uma segunda contribuição de comando que o force a não dar uma volta completa. Isso pode ser definido por

$$U = \begin{cases} U_1 - 2 \frac{U_{max} \theta_1}{\pi}, & \text{para } \theta_1 > \frac{\pi}{2} \text{ ou } \theta_1 < -\frac{\pi}{2} \\ U_1, & \text{para } -\frac{\pi}{2} \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Esta definição faz com que caso a atuação do motor seja máxima quando ele se aproxima de 90 ou de -90 graus. Então, é feita uma atuação que se torna cada vez maior na direção oposta e culmina no comando de atuação máxima do motor no sentido contrário ao do movimento da haste. Esse controle, além disso, faz com que seja evitado que o fio do *encoder* do pêndulo se enrole no eixo do motor quando este gira e torna a montagem mecânica mais simples.

Após serem feitos alguns testes, foi definido que o ganho k deveria ser igual a 0,8, fazendo com que o pêndulo pudesse ser erguido em aproximadamente 3 segundos, saturando a atuação do motor no máximo de 5 Nm, partindo da posição inicial no sentido anti-horário de π , para baixo. Assim, podemos ver na figura 33 que temos o seguinte comportamento, considerando sensores e atuador ideais.

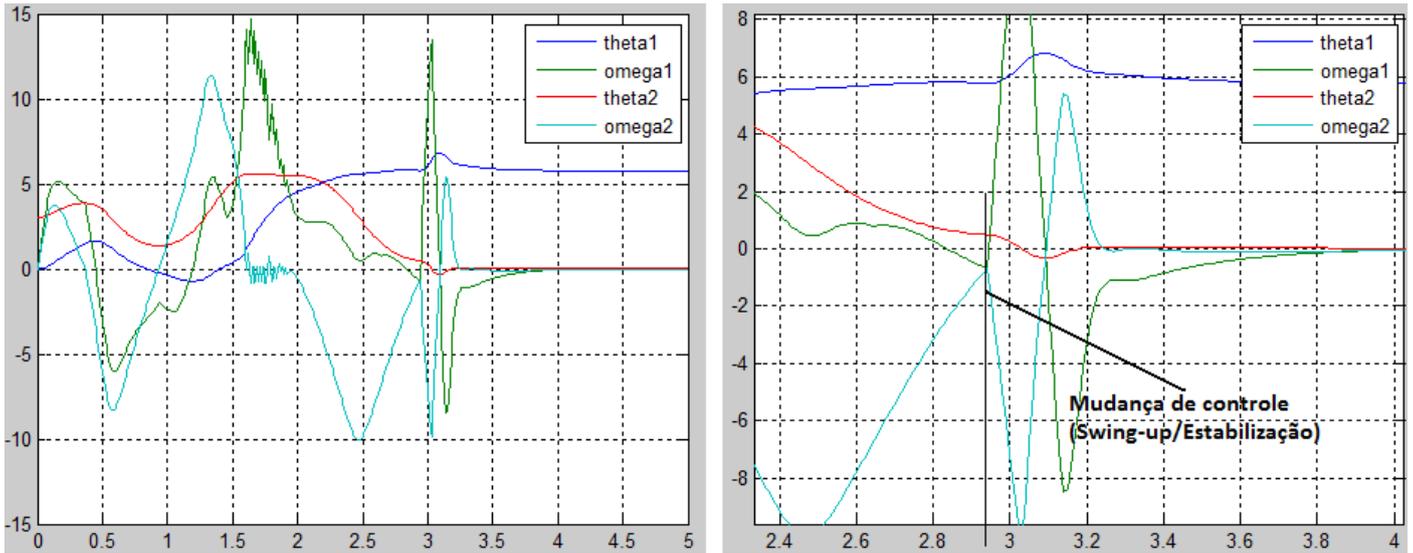


Figura 33- Evolução swing up (esq.) e ampliação no ponto de mudança de controle (dir.)

Observe que ocorre uma mudança brusca entre as duas estratégias de controle. Para resolver esse problema, alguns autores sugerem a utilização de uma terceira estratégia de controle que atua fazendo a suavização entre os dois estados. Como trabalhamos com a energia total do sistema, podemos ver a convergência do modelo pela figura 34 da esquerda.

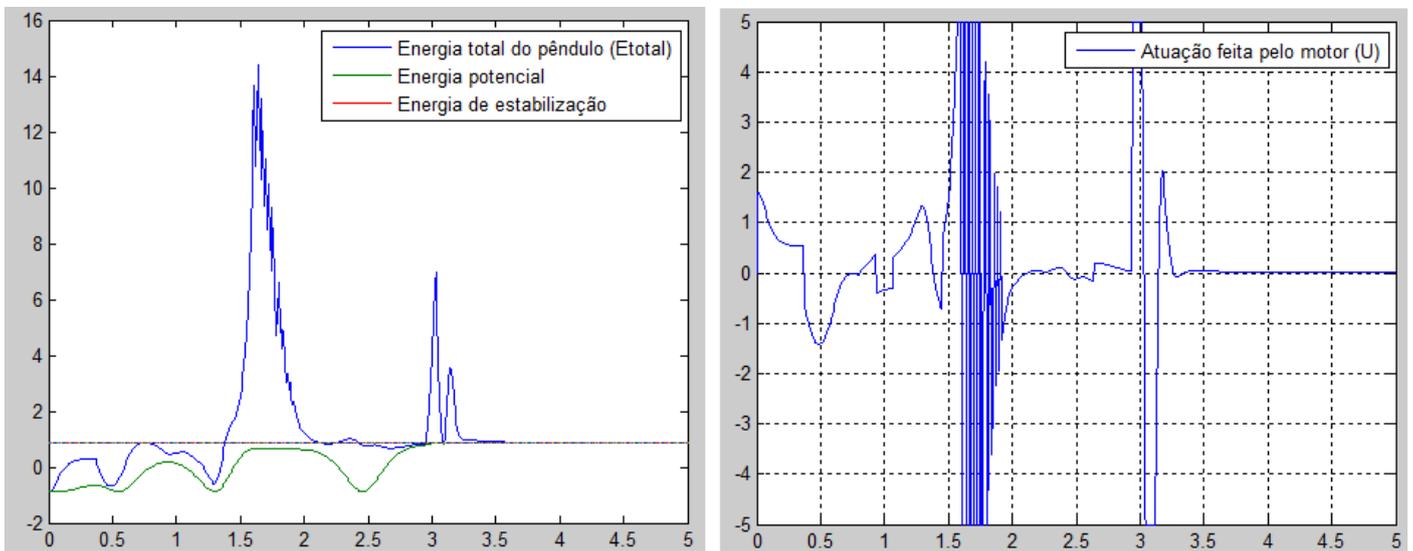


Figura 34- Evolução da energia do sistema (esq.) e da atuação do motor (dir.)

Podemos verificar que o pêndulo precisa de duas voltas completas para ser estabilizado. Na primeira volta, a energia potencial quase atinge a desejada, mas o pêndulo ainda tem uma energia cinética muito elevada (pode ser vista pela diferença entre as energias total e potencial). Logo, o critério de linearidade ainda não é alcançado. Na segunda volta, o pêndulo já atinge a parte superior com energia pequena o suficiente para que possa ser satisfeita a linearização com velocidade baixa e o controle de atração é ativado. É interessante notar também que quando o controle linear é acionado, existe um pico de energia cinética. Isso ocorre devido ao fato de o motor impor uma alta velocidade à haste, de modo a fazer um movimento contrário que estabiliza o pêndulo. Esse movimento pode exigir muito do motor, alternativamente, o swing-up seja feito utilizando um intervalo de tempo ainda maior, com um torque menor. Vale lembrar que, nessa simulação, o ganho Q_2 foi configurado como igual a 1, pois era necessária a rápida resposta do atuador.

Capítulo 3 - O modelo real

Após a demonstração da modelagem simulada no Matlab®, um modelo de pêndulo simples foi projetado e desenvolvido para aplicar estes conceitos de modelagem e de controle.

3.1 - Materiais e geometria

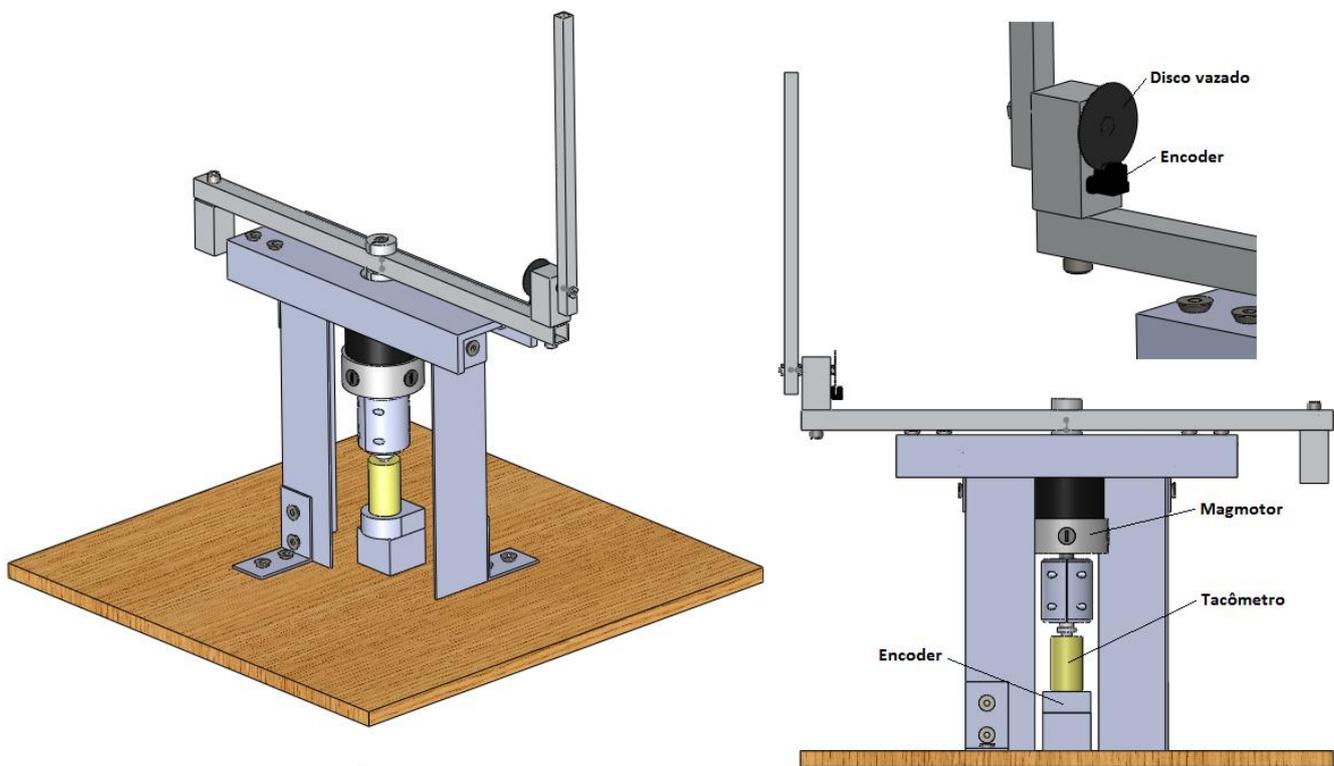


Figura 35- Modelo 3D do pêndulo

Como se pode observar na figura anterior, foram escolhidas duas chapas e dois pequenos blocos de alumínio para compor a estrutura. Alguns critérios foram levados em consideração quando foi elaborado o projeto dos materiais e geometria da figura 35:

- O material escolhido foi o alumínio, por sua boa relação de peso/rigidez, com a propriedade adicional de ser um material mais fácil de trabalhar;
- A haste e o pêndulo foram escolhidos com perfis quadrados vazados para evitar flexões no sentido axial de ambos os elos, garantindo a rigidez;

- O pêndulo foi escolhido de dimensões menores e de perfil vazado para que seus efeitos de inércia não fossem tão influentes no sistema;
- A base foi feita de madeira, visando facilitar sua perfuração, uma vez que é necessário fixar a eletrônica auxiliar.

Foram acrescentados dois parafusos simples de diâmetro 4mm e um rolamento de diâmetro 3/16". Um parafuso é colado ao pêndulo de tal forma que ele acompanhe o movimento do pêndulo e assim temos um eixo passando por rolamento em um dos blocos de alumínio. O segundo bloco, posicionado na outra extremidade da haste, serve para balancear o centro de massa de modo que este permaneça no eixo de rotação do motor. Esta consideração é importante, pois ela garante que teremos elementos fora da diagonal da matriz de inércia do sistema serão nulos. O alumínio foi escolhido por ser leve, disponível em diversas geometrias e, como não há esforços grandes sobre a haste, a estrutura não precisa ser excessivamente rígida.

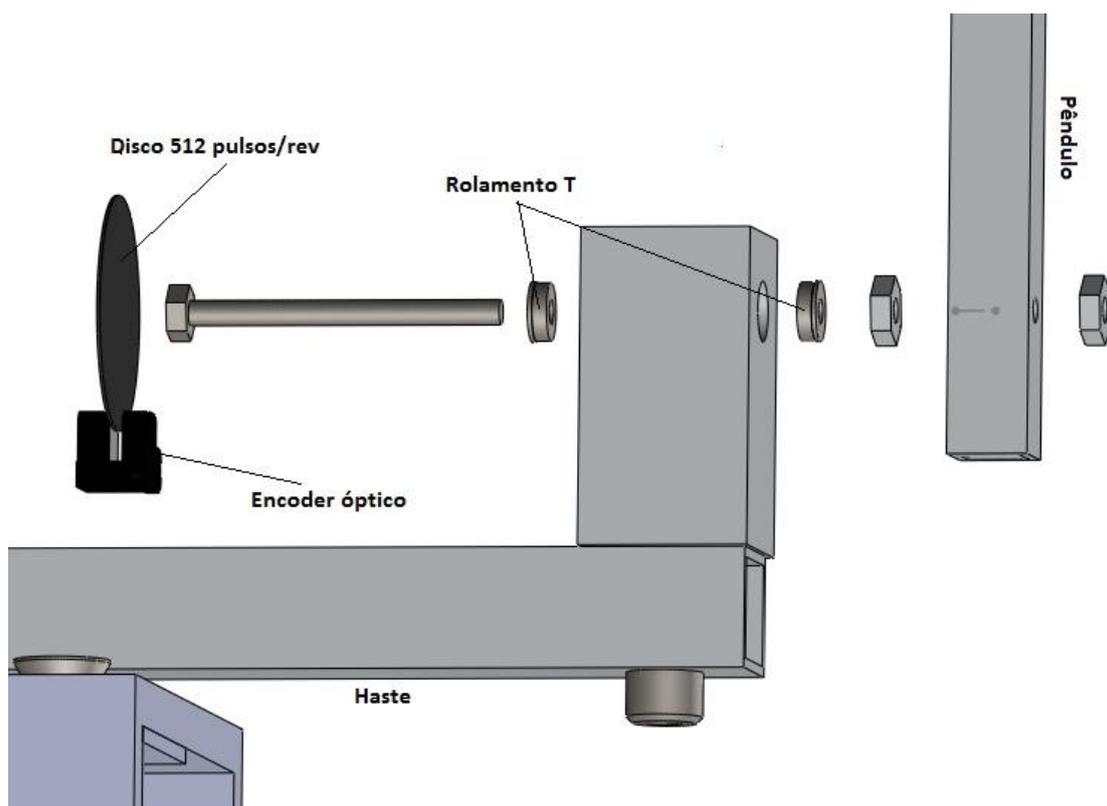


Figura 36- Vista explodida do esquema de montagem do encoder e eixo do Pêndulo

3.2 Motor

A atuação do sistema haste-pêndulo é um motor com escovas MagMotor® S28-150 de corrente contínua (DC) de imã permanente. Abaixo vemos uma figura do motor.



Figura 37- Motor utilizado

As características do motor estão anexadas no apêndice A.

3.3 Sensores

Como descrito na modelagem, as variáveis mais importantes a ser mensuradas são a posição da haste, a posição do motor (θ_1 e θ_2 , respectivamente) a velocidade do motor e a velocidade da haste ($\dot{\theta}_1$ e $\dot{\theta}_2$, respectivamente).

Os sensores de posição de ângulo, chamado *encoders*, são posicionados nos eixos de rotação. Um *encoder* foi fixado no eixo do pêndulo e outro anexado a um motor secundário, não acionado, que gira em conjunto com o motor principal. Ambos os *encoders* são do tipo óptico e incremental. Usualmente, eles geram dois sinais de forma quadrada, defasados um do outro de 90° . Eles possuem um leitor com dois feixes ópticos e um disco que deve estar acoplado ao eixo. A borda deste disco é subdividida em N partes iguais. Isto é análogo a uma série de “janelas” na borda do disco. Quando um feixe óptico passa por uma das janelas, o sinal ultrapassa o disco e, portanto, gera um sinal alto. A defasagem entre os leitores ópticos garante que um sinal torna-se alto antes do outro e, conseqüentemente, sabemos qual o sentido de rotação do *encoder*. A figura abaixo ilustra o funcionamento.

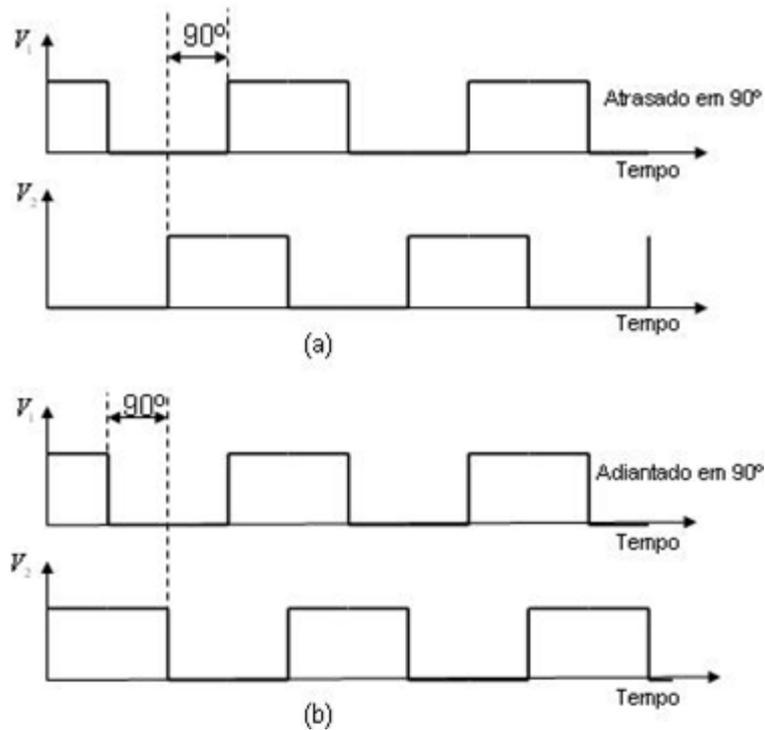


Figura 38- Sinais do encoder (horário e anti-horário)

Vemos que os exemplos 38-a e 38-b demonstram o que seria uma rotação no sentido horário e anti-horário, respectivamente. Graças à defasagem de 90° , sabemos qual o sentido de rotação do pêndulo e do motor.

O *encoder* selecionado para o sistema é o Q9898 da HP (Hewlett-Packard). A resolução do disco é de 512 pulsos por volta. Logo, temos uma resolução de

$$\alpha = \frac{2\pi}{512} = 0,0122 \text{ rad}$$

ou

$$\alpha = \frac{360^\circ}{512} = 0,703^\circ.$$

A figura 39 ilustra como são as subdivisões no disco do *encoder*.



Figura 39- Ampliação mostrando as subdivisões do disco do encoder

A figura 40 abaixo mostra os discos na posição de montagem.



Figura 40- O posicionamento do encoder e o disco na extremidade da haste

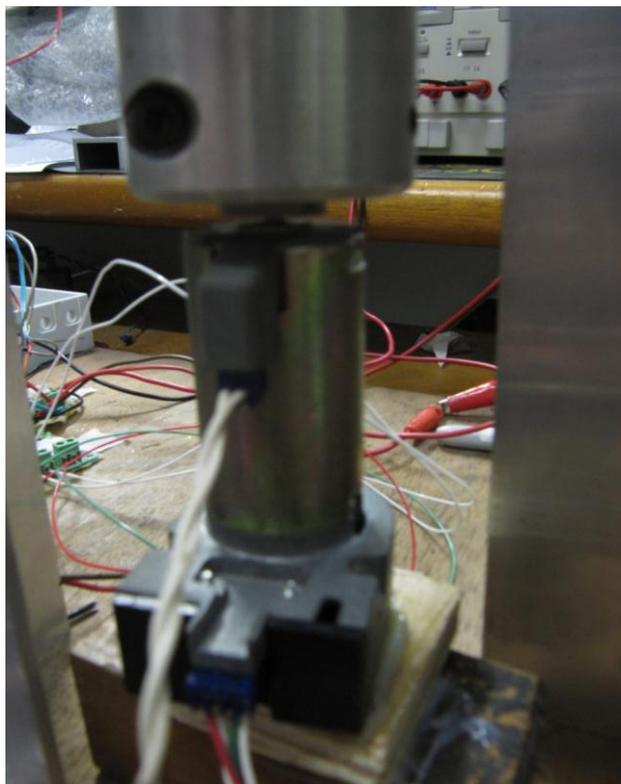


Figura 41- Motor secundário, (tacômetro)

Na figura acima, vemos o motor secundário com dois cabos brancos ligados a ele. Este seria um segundo tipo de sensor existente no sistema. O segundo motor, que não está sendo atuado, gira com a mesma velocidade angular que o motor principal. Logo, ele gera uma tensão induzida nas espiras do motor secundário. Este valor de tensão induzida será captado pelo controlador e tratado como entrada ao sistema. Como a tensão induzida depende da velocidade angular com que o eixo gira, este sinal pode ser considerado como um tacômetro, desde que calibrado. Porém, este método mostrou ser muito ruidoso e seus valores captados foram considerados imprecisos. Também optou-se por não adicionar um tacômetro ao pêndulo, porque iria desbalancear toda a estrutura ao modificar a matriz de inércia e prejudicar o controle.

3.4 - Eletrônica

A aquisição dos sinais é feita primariamente por meio de uma placa auxiliar de divisão de quadratura do *encoder*. Foi utilizada uma placa dedicada, fabricada pela Banebots®, capaz de dividir o sinal de um *encoder* por um fator de 1, 4, 8 ou 16. Na figura abaixo, é mostrado o esquema de conexões da placa.

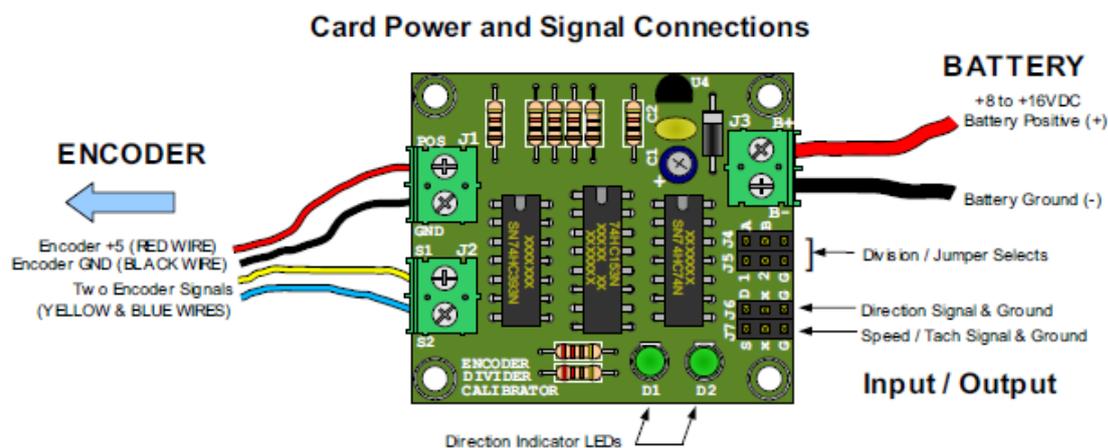


Figura 42- Placa de divisão de sinal da Banebots

Esta placa eletrônica é alimentada com 8V-16V e pelos sinais do *encoder*; além disso, consegue fornecer a alimentação de 5V necessária para o *encoder*. A inserção de dois “jumpers” entre os terminais 1-A e 2-B a configura de acordo com o fator desejado para dividir o sinal. Como resposta, existem dois terminais a mais. O terminal S (speed) é o próprio sinal do *encoder*, dividido ou não. O terminal D (direction) indica o sentido do movimento do disco. Ou seja, não é necessário projetar e desenvolver uma lógica que analise qual dos sinais do *encoder* foi detectado primeiramente para indicar o sentido de rotação. Além disso, dois LEDs indicam o sentido visualmente.

O uso de uma eletrônica dedicada tende a ser uma vantagem, pois evita que certas lógicas sejam tratadas via *software*, o que demandaria preciosos milissegundos de controle. A velocidade de resposta de uma lógica via *hardware* pode ser considerada quase instantânea e, conseqüentemente, confiável. Entretanto, esta possui arquitetura fechada e não consegue ser reprogramada para realizar outras tarefas, que porventura possam surgir.

3.5 - Sobre a aquisição e geração de sinais

Da placa eletrônica da Banebots®, saem dois sinais que precisam ser tratados com a maior eficiência possível, devido à grande velocidade angular que o pêndulo pode atingir em poucos segundos. Além disso, uma entrada e uma saída de tensão analógica são exigidas para o tacômetro e para a saída para a atuação do motor DC, respectivamente.

Logo, utilizamos o sistema da National Instruments® que possui módulos para cada tipo de tarefa com diversas entradas e saídas. Ele se conecta com um PC via USB

ou Ethernet por um dispositivo (CompactDAQ) onde os módulos se encaixam e são reconhecidos.



Figura 43- Dispositivo e seus módulos da National Instruments

Os módulos selecionados são os denominados NI9205 e NI9263 (entrada e saída analógica, respectivamente) e o módulo NI9401 para as entradas digitais dos *encoders*.

O módulo de aquisição digital já inclui uma lógica que contabiliza quantas vezes um pulso partiu do nível lógico 0 (0V) para nível 1 (5V). Isto facilitará a implementação do controle, pois juntamente com o sinal de direção da placa da Banebots®, basta criar um programa que adicione ou subtraia a posição corrente de acordo com a leitura do sinal de direção, além de ser uma lógica via *hardware*, ou seja, mais rápida que o próprio tempo de controle.

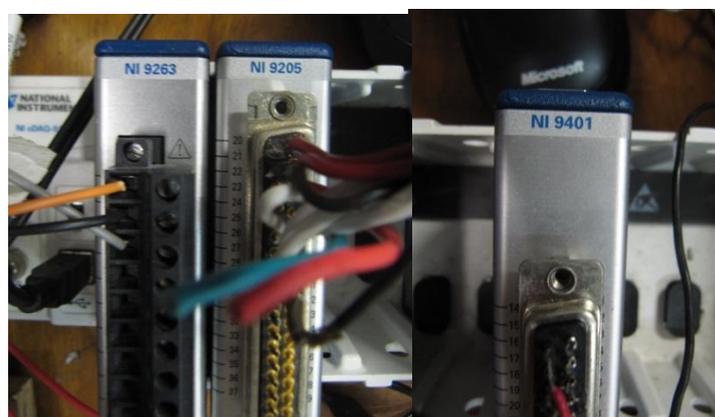


Figura 44- Módulos utilizados

3.6 - Amplificador

O amplificador de dois canais independentes RoboteQ AX2550 foi escolhido, porque ele consegue fornecer e resistir às correntes exigidas pelo motor MagMotor®. O amplificador tem capacidade de operar de 12 a 48 volts contínuos até 120 ampères por canal, utiliza o método de modulação por largura de pulso (PWM) com uma frequência de 16khz. Ele foi configurado para operar com sinais de controle analógico de 0 a 5 volts contínuos para o canal, isto significa que, para uma entrada de controle de 2,5 volts, o motor deve encontrar-se parado, ou seja, o motor é alimentado com 0 volts. Na figura 45, mostra uma foto do amplificador. No anexo B, também pode ser encontrada uma vista do amplificador, na qual, evidenciam-se as ligações dos motores e das fontes de energia (baterias).



Figura 45- Amplificador utilizado

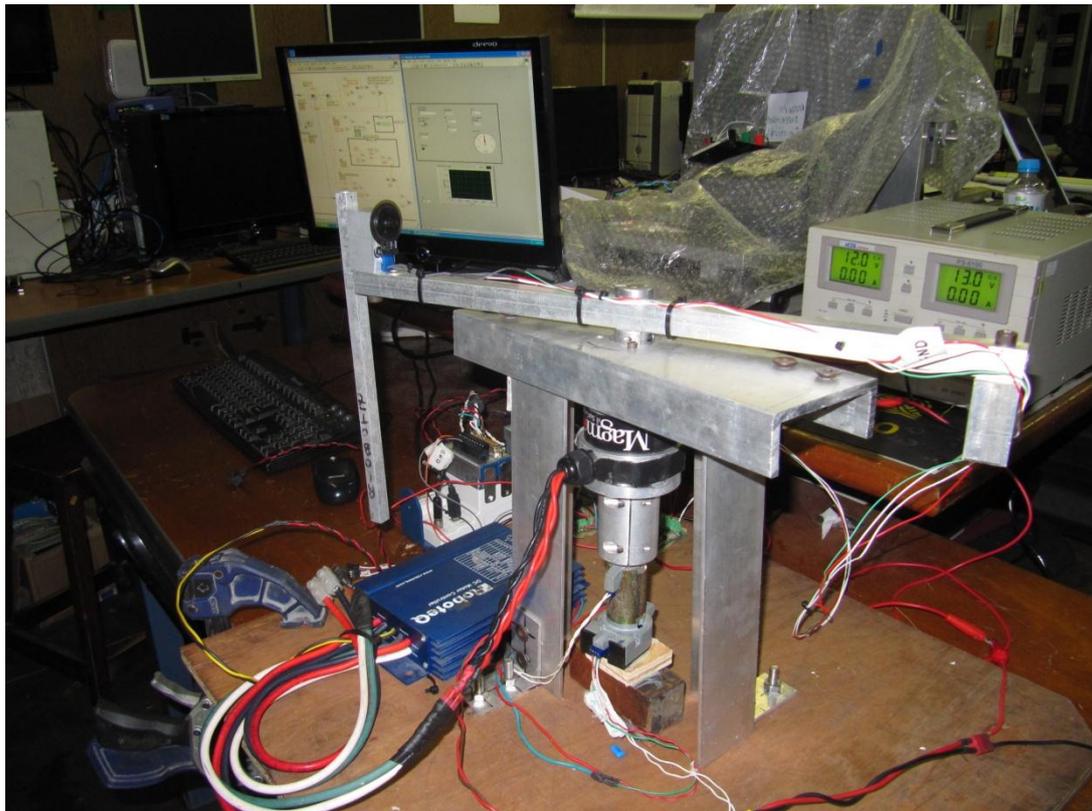


Figura 46- Modelo real completo

3.7 – O controlador

O controle do sistema é executado pelo *software* de engenharia Labview®, empregado amplamente no meio acadêmico e industrial que, por meio de um diagrama de blocos, constrói uma lógica para o controle. O *software* consiste em administrar duas telas simultaneamente, denominadas de Painel de Controle e de Diagrama de Blocos. O primeiro se assemelha a um console de botões e mostradores em uma instalação industrial feito exclusivamente para o usuário observar e controlar. O Diagrama de Blocos é a programação do controle em si. Cada bloco realiza operações, tais como adquirir e gerar sinais, fazer cálculos matemáticos, operações booleanas e de comparações, etc.

Alguns algoritmos para controlar o motor foram desenvolvidos. A estrutura básica do algoritmo para um controle PD do motor é descrita da seguinte forma:

- 0:** início do laço (loop);
- 1:** leitura da posição do motor em pulsos;
- 2:** conversão de pulsos em radianos ou graus;
- 3:** toma-se a diferença em radianos entre o ângulo desejado e o atual, e multiplica-se o resultado por uma constante;
- 4:** multiplica-se a velocidade instantânea por uma outra constante;
- 5:** somam-se os resultados de 3 e 4;
- 6:** comparação com os valores mínimo e máximo de tensão aplicado;
- 7:** aplicação da tensão no motor;
- 8:** volta ao item 0.

Para o programa em Labview® ser mais compacto, foram criados quatro subprogramas que manipulam os dados de posição. O primeiro programa está na etapa 1 do algoritmo e registra a diferença entre o número de pulsos atual e o número da iteração anterior. Seu resultado então é a posição em pulsos a partir de um número inicial. O segundo subprograma, na etapa 3 do algoritmo, divide a posição pelo número total de pulsos do disco e multiplica o resto da divisão por 2π e por 360. Assim, teremos 3 saídas: a posição em radianos, a posição em graus e o número de voltas que o disco realizou.

Os subprogramas 3 e 4 são as rotinas para o controle proporcional (P) e derivativo (D) para o controle de posição do motor. Outra forma para o controle D seria incluir a aquisição da tensão induzida pelo motor secundário e multiplicá-la simplesmente por uma constante; porém, este método mostrou ser muito ruidoso e impreciso, além de comprometer a velocidade do loop do programa. Logo, a velocidade do motor será estimada ao se tomar a diferença entre a posição atual e a anterior e dividi-la pelo tempo de iteração do loop. Na próxima figura, é mostrada a

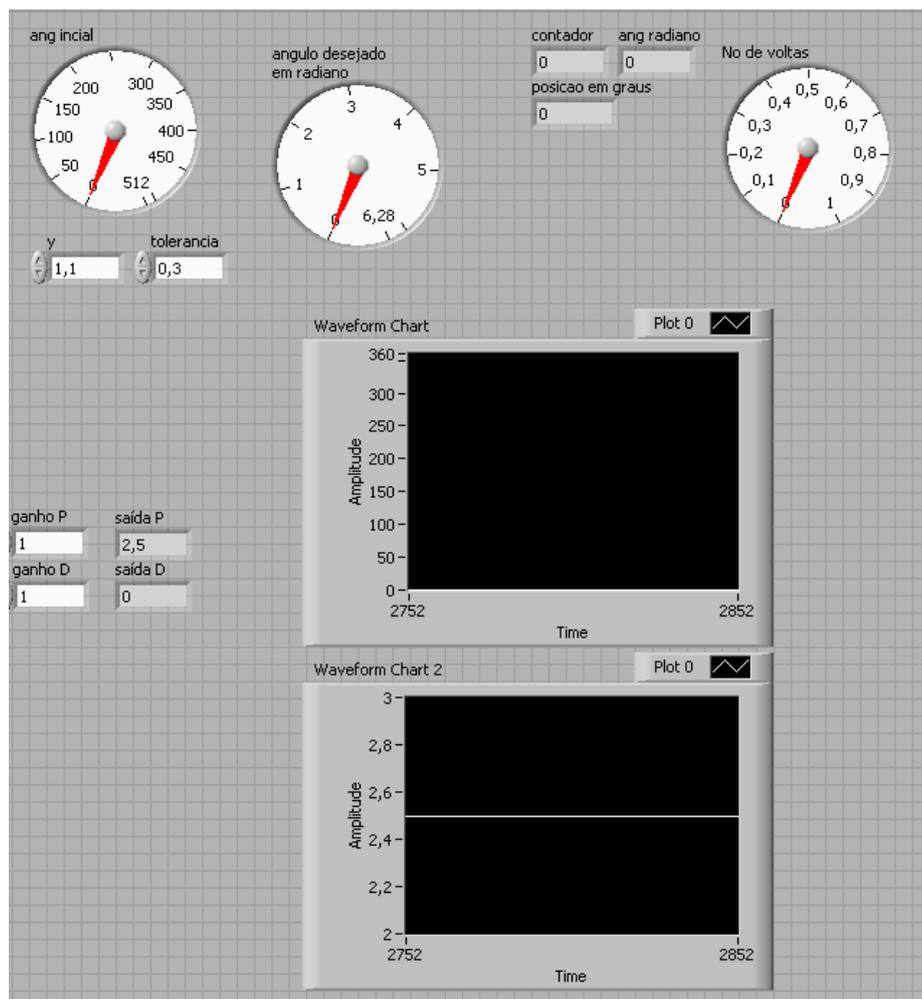


Figura 48- Console do controle PD do motor

Como descrito anteriormente, todo programa Labview® possui uma segunda janela para ser desenvolvida. O painel de controle se limita a dizer quais informações são relevantes para o usuário e, se construída de forma eficiente, evita o acúmulo de variáveis de saída. Assim, há mostradores tipo relógio que mostram a posição angular inicial, ângulo desejado e o número de voltas completadas. Também existem mostradores que fornecem o número da posição em graus e em radianos com maior precisão numérica. Por último, existem telas que exibem graficamente o histórico da posição e da voltagem aplicada ao motor. O ajuste dos ganhos também pode ser feito em tempo real no painel de controle. Este controle se mostrou eficiente e, na montagem feita, observa-se que o motor atinge qualquer posição angular dentro de uma volta.

Assim que a posição do motor torna-se controlável, é possível aplicar outro programa que se empregue os métodos de controle da simulação em Matlab®. Na simulação, o controle LQR via tratamento de Kalman conseguiria manter o pêndulo

na vertical, desde que o ângulo inicial fosse também zero na vertical. A resposta (torque) que o controle deve atuar no motor é

$$U(t) = -1,8851\theta_1 - 1,7945\dot{\theta}_1 - 32,04091\theta_2 - 13,955\dot{\theta}_2.$$

Para aplicar o controle LQR, o algoritmo aumenta em alguns passos:

- 0: início do laço (loop);
- 1: leitura da posição do motor e do pêndulo em pulsos;
- 2: conversão de pulsos em radianos ou graus;
- 3: multiplicação da posição do motor por uma constante 1;
- 4: multiplicação da velocidade instantânea do motor por uma constante 2;
- 5: multiplicação da posição em radianos do pêndulo por uma constante 3;
- 6: toma-se a diferença entre a posição atual do pêndulo e a anterior e divide-se pelo tempo de iteração do loop e multiplica-se o resultado por uma constante 4;
- 7: somam-se os resultados dos itens 3, 4, 5 e 6;
- 8: comparação com os valores mínimo e máximo de tensão aplicado;
- 9: aplicação a tensão no motor;
- 10: volta ao item 0

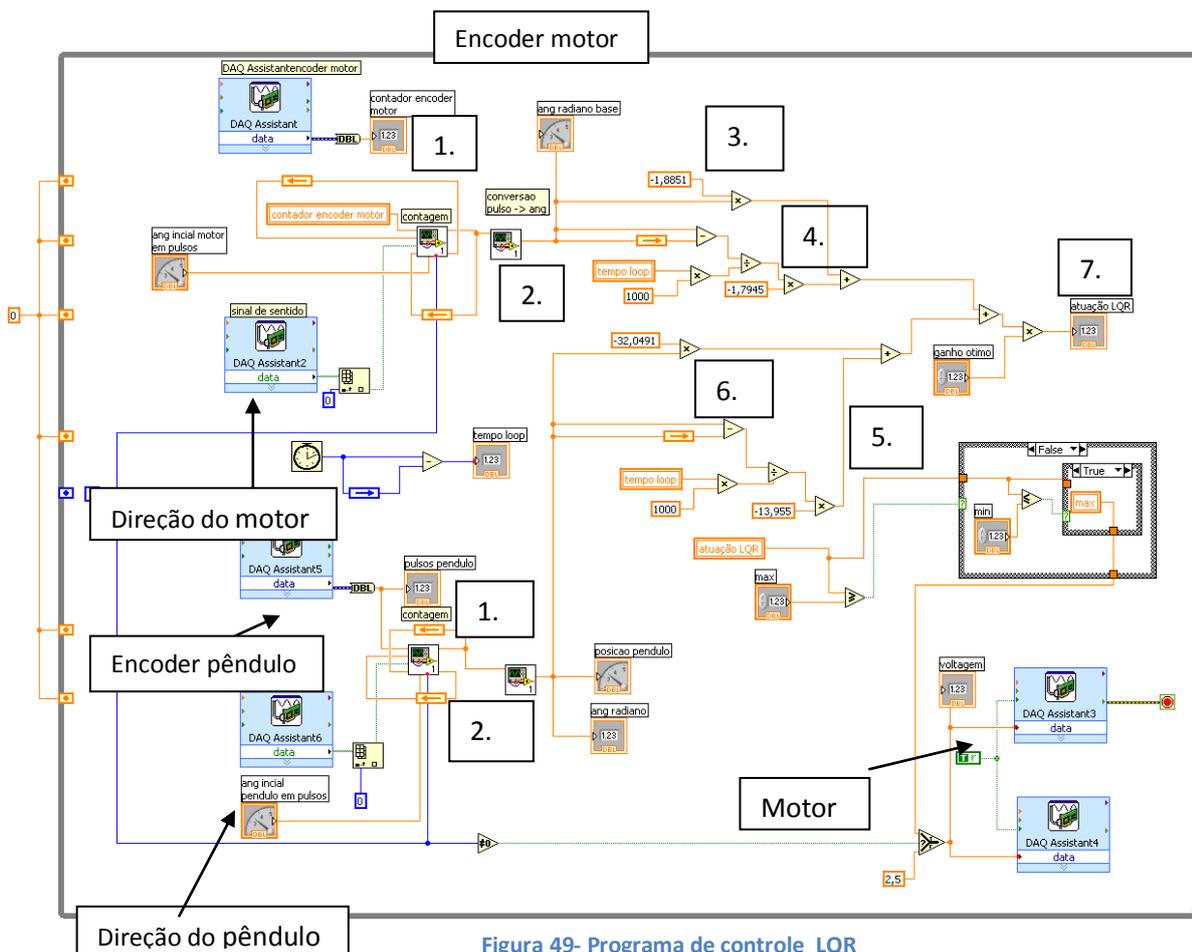


Figura 49- Programa de controle LQR

As constantes 1, 2, 3 e 4 foram determinadas pela simulação e são respectivamente $-1,8851$, $-1,7945$, $-32,041$ e $-13,955$. A figura abaixo ilustra a arquitetura do laço em Labview® com o projeto LQR.

Entretanto, não foi possível aplicar a resposta diretamente para a atuação, pois a variável controlada é o torque gerado pelo motor. Isto deveu-se ao fato de não se possuir a relação entre a voltagem aplicada ao amplificador e a corrente que o motor precisava para um determinado torque.

Logo, um terceiro programa foi desenvolvido com o controle de posição do pêndulo PD. De algoritmo idêntico ao controle de posição do motor, bastava trocar a entrada do encoder do motor pelo do pêndulo. O ajuste das constantes dos controles PD foi totalmente empírico. Com isto, conseguiu-se que o pêndulo permanecesse na vertical para cima por até dois segundos. Por isso, neste caso, levaram-se em conta dois fatores para a segurança:

A inativação da atuação quando o pêndulo estiver abaixo de $-0,3\text{rad}$ e acima de $0,3\text{rad}$.

A inativação da atuação pelo usuário por um botão no controlador ou um botão virtual no painel de controle no computador.

Também foi acrescentado ao código um tratamento da histerese do sistema de tal forma que, quando a posição em pulsos for menor que 2 e maior que -2 e a velocidade igual a zero, o controle deve considerar a posição como 0.

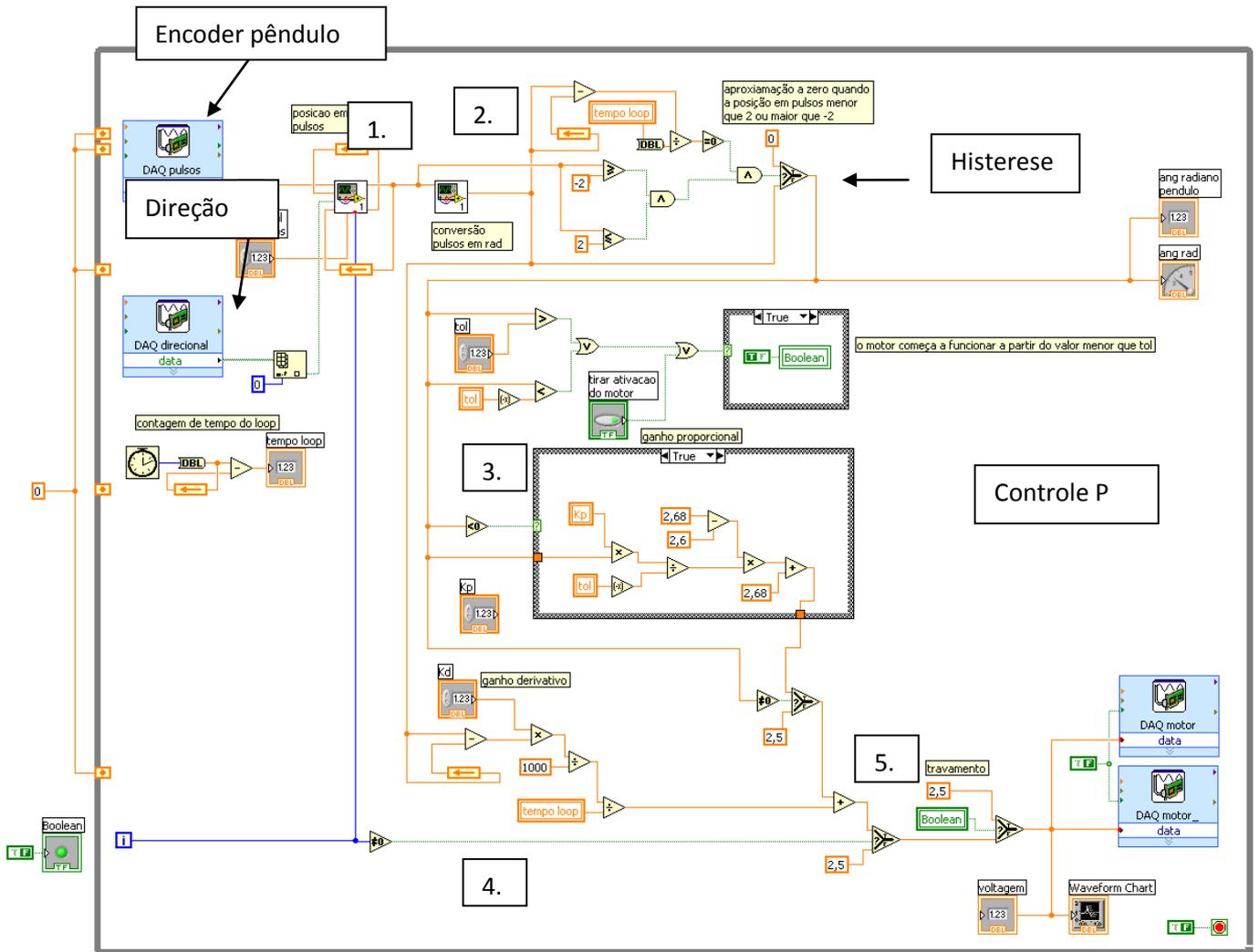


Figura 50- Controle PD utilizando o encoder do pêndulo

3.8 - O erros da análise experimental

Como todas as análises experimentais, existem as pequenas imperfeições que não são levadas em conta na simulação e acumulam erros no sistema. Entre os erros mais primários estaria a própria construção das peças. Tanto a haste quanto o pêndulo foram cortados sem precisão e podem não ter tido o alinhamento correto. A estrutura, à qual o motor e o pêndulo estão fixados, possui uma inclinação de $0,4^\circ$. Este erro pode ser mensurado com uma régua de nível, mas pode ser considerado irrelevante. Para que a estrutura não vibrasse, foram utilizados dois grampos do tipo C que garantem a fixação com a área de trabalho.

Outra fonte de erro percebida foi a folga entre o eixo que gira com o pêndulo e o rolamento dentro do bloco de alumínio. O diâmetro do parafuso está no sistema métrico, enquanto que o rolamento tem suas medidas no padrão inglês. Devido à falta de um parafuso no sistema inglês que se encaixasse no rolamento, um parafuso de medidas comparáveis no sistema métrico foi selecionado. Conseqüentemente, o pêndulo vibrava bem pouco, mas o suficiente para que o encoder detectasse uma variação entre suas “janelas” e marcasse no controlador uma posição diferente da real.

A atuação também se comportava diferentemente do esperado, pois o motor tinha avanço em uma direção. Para que o motor girasse a uma velocidade oposta a uma dada velocidade, era necessária uma tensão diferente. Isto prejudicou o controle, pois a resposta do sistema era diferente quando a posição do pêndulo era positiva ou negativa. Por outro lado, isso impossibilitou o uso do tacômetro, que daria uma resposta mais precisa da velocidade. Este é um dos motivos pelo qual o pêndulo permanecia no máximo 1 ou 2 segundos na vertical.

Por último, o controlador Labview® reiniciava o loop em um intervalo de tempo muito longo quando todas as entradas (4 digitais e 1 analógica) eram lidas simultaneamente. A ordem de grandeza nestas condições chegava a 0,1s, grande parte causada pela leitura analógica. Por este motivo, optou-se por estimar a velocidade do motor do pêndulo como a derivada discreta da posição.

Conclusão

A maior lição que se pode tirar deste trabalho foi que as simulações, em muitos casos, está longe de corresponder à realidade. A modelagem dinâmica do pêndulo pode ter sido corretamente derivada, mas existem inúmeros fatores intrínsecos à aplicação do controle no sistema real e nenhuma simulação é capaz de abranger todos os parâmetros da realidade. Muitos autores tentam prever estes erros, aplicando equivalências em seus modelos matemáticos, como o Filtro de Kalman, que e têm o como objetivo se esquivar das imperfeições dos projetos mecânicos e eletrônicos sempre presentes na engenharia. Desde o começo, a preocupação maior no desenvolvimento do trabalho foi a implementação das técnicas de controle; a eletrônica de controle utilizada para a aquisição de dados e a elaboração do modelo físico foram deixados em segundo plano. Foram utilizados equipamentos consagrados pela experiência obtida no laboratório pelos estudantes, mas como o trabalho introduzia uma metodologia de controle diferenciado, rápido e não-linear, pudemos invalidar vários métodos inicialmente adotados.

O segundo desafiador fator que se pode salientar é o tempo. Em todos os momentos durante o cumprimento das datas e prazos previstos foi necessária uma corrida com dedicação exclusiva e adicional ao trabalho. De qualquer modo, todas as dificuldades encontradas só serviram para fortalecer a capacidade de avaliação, crítica e organização.

No que diz respeito à avaliação do projeto, pudemos considerá-lo desafiador e animador. O pêndulo invertido apresenta uma dinâmica que pode ser interpretada como de um manipulador e essa abordagem ainda não foi encontrada na literatura, tornando esse um aspecto bastante motivador para o trabalho. As equações de movimento puderam ser derivadas a partir de teorias básicas de robótica, conferindo uma nova visão de um problema consagrado clássico pelas estratégias de análise de controle não-linear. Além disso, foi possível fazer a aplicação de teorias muito estudadas pelos alunos no curso de graduação e que se mostraram fundadas e eficientes no ataque a problemas cotidianos.

O trabalho pode ser considerado multidisciplinar, pois envolve o cálculo da dinâmica do sistema, a simulação computacional do modelo, a aplicação das estratégias de controle, a elaboração do projeto mecânico, a pesquisa e a aplicação da eletrônica utilizada e o conhecimento e a experiência de avaliação e de validação dos resultados. Cada uma das áreas apresenta suas particularidades e dificuldades, mas são sempre presentes para profissionais da área de Engenharia de Controle e Automação, que engloba, mesmo que superficialmente, as áreas de mecânica, eletro-eletrônica e computação.

O projeto realizado, mesmo que extenso, não pôde cumprir todos os objetivos em primeiro momento sugeridos por vários fatores que interromperam sua continuidade. Ainda

que os métodos de aquisição de dados tenham sido testados em diferentes meios e aplicações e as pesquisas tenham sido longas e abrangentes, não foi possível implementar o proposto Filtro de Kalman no pêndulo físico projetado. Isso se deu por motivos tais como a imprecisão na captação do sinal de pulso do *encoder*, a baixa velocidade e poder computacional da eletrônica utilizada, a imprecisão mecânica por folgas de projeto, a utilização de um motor debilitado (com avanço e levemente desmagnetizado), a impossibilidade de medir todos os parâmetros do sistema (como a corrente/torque no motor), entre outros. Estes fatores abrem novos caminhos de ataque ao problema, como a implementação de uma eletrônica dedicada para o cálculo mais rápido e para aquisição mais eficiente (ex: LaunchPad da *Texas Instruments*), um contador dedicado para a captação do pulso do *encoder*, a implementação de uma rápida sub-malha de controle dedicada para a medição correta do torque desejado na aplicação ou o estudo de uma arquitetura que permita a construção e controle simplificados do pêndulo.

Finalmente, pode ser considerado que foram obtidos resultados satisfatórios para a simulação computacional da dinâmica e controle do pêndulo proposto, envolvendo estudo da influência de imperfeições de atuação e medição sobre a resposta do sistema. A construção prática do modelo, ainda que não tenha obtido sucesso para o controle, pode ser considerada consistente e satisfatória, uma vez que apresentou problemas que necessitaram da capacidade de interpretação e avaliação para serem resolvidos.

Referências

Furuta, K; “Swing Up Control of Inverted Pendulum”; IECON '91

Furuta, K., Yamakita, M. and Kobayashi, S. (1992) “Swing-up control of inverted pendulum using pseudo-state feedback”, Journal of Systems and Control Engineering, 206(6), 263-269

Gene F. Franklin, J.David Powell, Michael L. Workman; Digital Control of Dynamic Systems, 3rd Edition, Prentice Hall, 1998

Ogata, K; Engenharia de Controle Moderno, 4ª edição, Prentice Hall 2007

Kalman, R.E. (1960). "A new approach to linear filtering and prediction problems". Journal of Basic Engineering

Kalman, R.E.; Bucy, R.S. (1961). New Results in Linear Filtering and Prediction Theory

Meggiolaro, M; “CONTROLE DISCRETO DO ACROBOT” Notas de aula 24/06/2010

Barreto, M. P. F. L. “Projeto, Construção e Simulação de um Manipulador Robótico Paralelogramo”. Projeto de Graduação, PUC-Rio, 2009.2

Asada, H. ; Slotine, J.E. ; “Robot Analysis and Control”, 1986

Meggiolaro , Marco Antonio; “RioBotz Combot Tutorial, version 2.0”, 2009;

Furuta, K., Astrom, K. J.; “Swinging Up a Pendulum by Energy Control”, IFAC 13th World Congress, San Francisco, California, 1996;

van Kats , C.J.A., “Nonlinear control of a Furuta Rotary inverted pendulum”, DCT Report no: 2004.69, 2004

Driver, J., Thorpe, D., “Design, Build and Control of a Single/Double Inverted Rotational Pendulum”, The University of Adelaide, Australia, 2004

Meggiolaro, M; “Introdução à Robótica”, Notas de aula, 2010

APÊNDICES

A. Magmotor S28 – 150

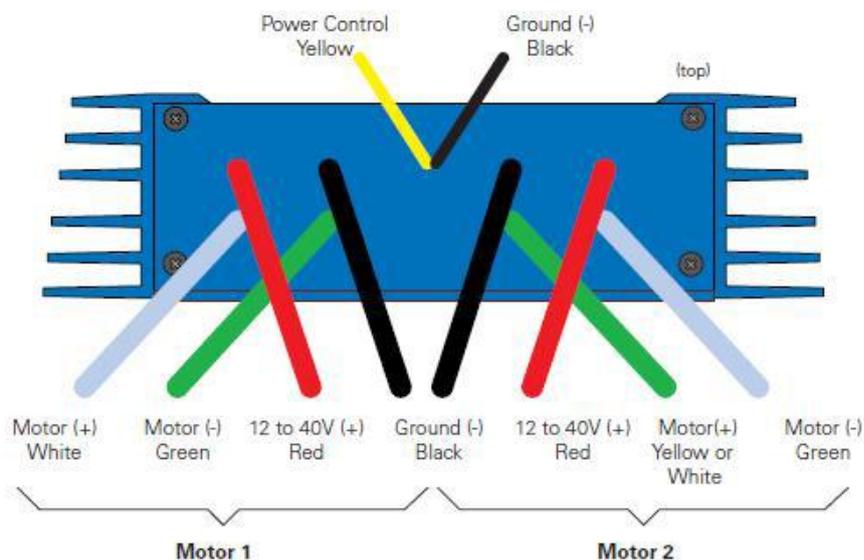
Voltage (V)	24
Potência máxima (W)	2.183
Peso (kg)	1.7
Potência/Peso	1.284
I _{stall} / I _{sem-carga}	110
K _t (N·m/A)	0.03757
K _v (RPM/V)	254
R _{motor} (Ω)	0.064
I _{sem-carga} (A)	3.4

B. RoboteQ AX2550/RS232:

Configurações:

Modo do sinal de controle	Analógico
Modo de controle dos motores	Canais A e B separados
Limite de Corrente	105A
Aceleração	Media
Zona Morta do controle	0%
Tipo de resposta canal um	Linear
Tipo de resposta canal dois	Linear
Ajuste esquerda/direita	Sem ajuste

Cabeamento:



C. Equações de movimento:

Pêndulo Simples:

$$\alpha_1 := \left(-(m_2 l_1 a_0 \sin(\theta_2) - b_1 \omega_1 + \tau) (I_2 + m_2 l_1^2) + m_2^2 l_1^2 a_0 \cos(\theta_2) g \sin(\theta_2) - m_2 l_1 a_0 \cos(\theta_2) b_2 \omega_2 \right) / \left(-I_1 I_2 - I_1 m_2 l_1^2 - m_2 a_0^2 I_2 - m_2^2 a_0^2 l_1^2 + m_2^2 l_1^2 a_0^2 \cos(\theta_2)^2 \right)$$

$$\alpha_2 := \left((m_2 l_1 a_0 \sin(\theta_2) - b_1 \omega_1 + \tau) m_2 l_1 a_0 \cos(\theta_2) - I_1 m_2 g l_1 \sin(\theta_2) + I_1 b_2 \omega_2 - m_2^2 a_0^2 g l_1 \sin(\theta_2) + m_2 a_0^2 b_2 \omega_2 \right) / \left(-I_1 I_2 - I_1 m_2 l_1^2 - m_2 a_0^2 I_2 - m_2^2 a_0^2 l_1^2 + m_2^2 l_1^2 a_0^2 \cos(\theta_2)^2 \right)$$

Pêndulo Duplo:

$$\alpha_1 := \left(- \left(m_3 l_2 a_0 \sin(\theta_2 + \theta_3) \omega_3^2 + (a_0 \sin(\theta_2) m_2 l_1 + a_0 \sin(\theta_2) m_3 a_1) \omega_2^2 + m_3 l_2 a_0 \sin(\theta_2 + \theta_3) \omega_2 \omega_3 + \tau - b_1 \omega_1 \right) (I_2 + m_2 l_1^2 + m_3 a_1^2) (I_3 + m_3 l_2^2) + (m_3 l_2 a_0 \sin(\theta_2 + \theta_3) \omega_3^2 + (a_0 \sin(\theta_2) m_2 l_1 + a_0 \sin(\theta_2) m_3 a_1) \omega_2^2 + m_3 l_2 a_0 \sin(\theta_2 + \theta_3) \omega_2 \omega_3 + \tau - b_1 \omega_1) m_3^2 l_2^2 a_1^2 \cos(\theta_3)^2 + (-m_3 l_2 a_0 \sin(\theta_2 + \theta_3) \omega_1 \omega_3 + m_3 l_2 a_1 \sin(\theta_3) \omega_3^2 + m_2 g l_1 \sin(\theta_2) + m_3 g a_1 \sin(\theta_2) + m_3 g l_2 \sin(\theta_2 + \theta_3) - b_2 \omega_2) (a_0 \cos(\theta_2) m_2 l_1 + a_0 \cos(\theta_2) m_3 a_1) (I_3 + m_3 l_2^2) - (-m_3 l_2 a_0 \sin(\theta_2 + \theta_3) \omega_1 \omega_3 + m_3 l_2 a_1 \sin(\theta_3) \omega_3^2 + m_2 g l_1 \sin(\theta_2) + m_3 g a_1 \sin(\theta_2) + m_3 g l_2 \sin(\theta_2 + \theta_3) - b_2 \omega_2) m_3^2 l_2^2 a_0 \cos(\theta_2 + \theta_3) a_1 \cos(\theta_3) - (m_3 l_2 a_0 \sin(\theta_2 + \theta_3) \omega_1 \omega_2 + m_3 g l_2 \sin(\theta_2 + \theta_3) - b_3 \omega_3) (a_0 \cos(\theta_2) m_2 l_1 + a_0 \cos(\theta_2) m_3 a_1) m_3 l_2 a_1 \cos(\theta_3) + (m_3 l_2 a_0 \sin(\theta_2 + \theta_3) \omega_1 \omega_2 + m_3 g l_2 \sin(\theta_2 + \theta_3) - b_3 \omega_3) m_3 l_2 a_0 \cos(\theta_2 + \theta_3) (I_2 + m_2 l_1^2 + m_3 a_1^2)) \right) / \left(-2 m_3^2 l_2^2 a_0 \cos(\theta_2 + \theta_3) (a_0 \cos(\theta_2) m_2 l_1 + a_0 \cos(\theta_2) m_3 a_1) a_1 \cos(\theta_3) + m_3^2 l_2^2 a_0^2 \cos(\theta_2 + \theta_3)^2 (I_2 + m_2 l_1^2 + m_3 a_1^2) + (a_0 \cos(\theta_2) m_2 l_1 + a_0 \cos(\theta_2) m_3 a_1)^2 (I_3 + m_3 l_2^2) - (I_1 + m_1 a_0^2 + m_2 a_0^2) (I_2 + m_2 l_1^2 + m_3 a_1^2) (I_3 + m_3 l_2^2) + (I_1 + m_1 a_0^2 + m_2 a_0^2) m_3^2 l_2^2 a_1^2 \cos(\theta_3)^2 \right)$$

$$\begin{aligned}
\alpha_2 := & \left((m_3 l_2 a_0 \sin(\theta_2 + \theta_3) \omega_3^2 + (a_0 \sin(\theta_2) m_2 l_1 \right. \\
& + a_0 \sin(\theta_2) m_3 a_1) \omega_2^2 + m_3 l_2 a_0 \sin(\theta_2 + \theta_3) \omega_2 \omega_3 + \tau \\
& - b_1 \omega_1) (a_0 \cos(\theta_2) m_2 l_1 + a_0 \cos(\theta_2) m_3 a_1) (I_3 + m_3 l_2^2) \\
& - (m_3 l_2 a_0 \sin(\theta_2 + \theta_3) \omega_3^2 + (a_0 \sin(\theta_2) m_2 l_1 \\
& + a_0 \sin(\theta_2) m_3 a_1) \omega_2^2 + m_3 l_2 a_0 \sin(\theta_2 + \theta_3) \omega_2 \omega_3 + \tau \\
& - b_1 \omega_1) m_3^2 l_2^2 a_0 \cos(\theta_2 + \theta_3) a_1 \cos(\theta_3) - (\\
& - m_3 l_2 a_0 \sin(\theta_2 + \theta_3) \omega_1 \omega_3 + m_3 l_2 a_1 \sin(\theta_3) \omega_3^2 \\
& + m_2 g l_1 \sin(\theta_2) + m_3 g a_1 \sin(\theta_2) + m_3 g l_2 \sin(\theta_2 + \theta_3) \\
& - b_2 \omega_2) (I_1 + m_1 a_0^2 + m_2 a_0^2) (I_3 + m_3 l_2^2) + (\\
& - m_3 l_2 a_0 \sin(\theta_2 + \theta_3) \omega_1 \omega_3 + m_3 l_2 a_1 \sin(\theta_3) \omega_3^2 \\
& + m_2 g l_1 \sin(\theta_2) + m_3 g a_1 \sin(\theta_2) + m_3 g l_2 \sin(\theta_2 + \theta_3) \\
& - b_2 \omega_2) m_3^2 l_2^2 a_0^2 \cos(\theta_2 + \theta_3)^2 + (m_3 l_2 a_0 \sin(\theta_2 \\
& + \theta_3) \omega_1 \omega_2 + m_3 g l_2 \sin(\theta_2 + \theta_3) - b_3 \omega_3) (I_1 + m_1 a_0^2 \\
& + m_2 a_0^2) m_3 l_2 a_1 \cos(\theta_3) - (m_3 l_2 a_0 \sin(\theta_2 + \theta_3) \omega_1 \omega_2 \\
& + m_3 g l_2 \sin(\theta_2 + \theta_3) - b_3 \omega_3) m_3 l_2 a_0 \cos(\theta_2 \\
& + \theta_3) (a_0 \cos(\theta_2) m_2 l_1 + a_0 \cos(\theta_2) m_3 a_1)) / (-2 m_3^2 \\
& l_2^2 a_0 \cos(\theta_2 + \theta_3) (a_0 \cos(\theta_2) m_2 l_1 \\
& + a_0 \cos(\theta_2) m_3 a_1) a_1 \cos(\theta_3) + m_3^2 l_2^2 a_0^2 \cos(\theta_2 + \theta_3)^2 (I_2 \\
& + m_2 l_1^2 + m_3 a_1^2) + (a_0 \cos(\theta_2) m_2 l_1 \\
& + a_0 \cos(\theta_2) m_3 a_1)^2 (I_3 + m_3 l_2^2) - (I_1 + m_1 a_0^2 + m_2 a_0^2) (I_2 \\
& + m_2 l_1^2 + m_3 a_1^2) (I_3 + m_3 l_2^2) + (I_1 + m_1 a_0^2 + m_2 a_0^2) m_3^2 l_2^2 \\
& a_1^2 \cos(\theta_3)^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_3 := & \left(-\left(m_3 l_2 a_0 \sin(\theta_2 + \theta_3) \omega_3^2 + (a_0 \sin(\theta_2) m_2 l_1 \right. \right. \\
& + a_0 \sin(\theta_2) m_3 a_1) \omega_2^2 + m_3 l_2 a_0 \sin(\theta_2 + \theta_3) \omega_2 \omega_3 + \tau \\
& \left. \left. - b_1 \omega_1 \right) (a_0 \cos(\theta_2) m_2 l_1 \right. \\
& + a_0 \cos(\theta_2) m_3 a_1) m_3 l_2 a_1 \cos(\theta_3) + \left(m_3 l_2 a_0 \sin(\theta_2 \right. \\
& + \theta_3) \omega_3^2 + (a_0 \sin(\theta_2) m_2 l_1 + a_0 \sin(\theta_2) m_3 a_1) \omega_2^2 \\
& + m_3 l_2 a_0 \sin(\theta_2 + \theta_3) \omega_2 \omega_3 + \tau - b_1 \omega_1) m_3 l_2 a_0 \cos(\theta_2 \\
& + \theta_3) (I_2 + m_2 l_1^2 + m_3 a_1^2) + \left(-m_3 l_2 a_0 \sin(\theta_2 + \theta_3) \omega_1 \omega_3 \right. \\
& + m_3 l_2 a_1 \sin(\theta_3) \omega_3^2 + m_2 g l_1 \sin(\theta_2) + m_3 g a_1 \sin(\theta_2) \\
& \left. + m_3 g l_2 \sin(\theta_2 + \theta_3) - b_2 \omega_2 \right) (I_1 + m_1 a_0^2 + m_2 \\
& a_0^2) m_3 l_2 a_1 \cos(\theta_3) - \left(-m_3 l_2 a_0 \sin(\theta_2 + \theta_3) \omega_1 \omega_3 \right. \\
& + m_3 l_2 a_1 \sin(\theta_3) \omega_3^2 + m_2 g l_1 \sin(\theta_2) + m_3 g a_1 \sin(\theta_2) \\
& \left. + m_3 g l_2 \sin(\theta_2 + \theta_3) - b_2 \omega_2 \right) m_3 l_2 a_0 \cos(\theta_2 \\
& + \theta_3) (a_0 \cos(\theta_2) m_2 l_1 + a_0 \cos(\theta_2) m_3 a_1) \\
& - (m_3 l_2 a_0 \sin(\theta_2 + \theta_3) \omega_1 \omega_2 + m_3 g l_2 \sin(\theta_2 + \theta_3) \\
& - b_3 \omega_3) (I_1 + m_1 a_0^2 + m_2 a_0^2) (I_2 + m_2 l_1^2 + m_3 a_1^2) \\
& + (m_3 l_2 a_0 \sin(\theta_2 + \theta_3) \omega_1 \omega_2 + m_3 g l_2 \sin(\theta_2 + \theta_3) \\
& - b_3 \omega_3) (a_0 \cos(\theta_2) m_2 l_1 + a_0 \cos(\theta_2) m_3 a_1)^2 \Big/ \left(-2 m_3^2 \right. \\
& l_2^2 a_0 \cos(\theta_2 + \theta_3) (a_0 \cos(\theta_2) m_2 l_1 \\
& + a_0 \cos(\theta_2) m_3 a_1) a_1 \cos(\theta_3) + m_3^2 l_2^2 a_0^2 \cos(\theta_2 + \theta_3)^2 (I_2 \\
& + m_2 l_1^2 + m_3 a_1^2) + (a_0 \cos(\theta_2) m_2 l_1 \\
& + a_0 \cos(\theta_2) m_3 a_1)^2 (I_3 + m_3 l_2^2) - (I_1 + m_1 a_0^2 + m_2 a_0^2) (I_2 \\
& + m_2 l_1^2 + m_3 a_1^2) (I_3 + m_3 l_2^2) + (I_1 + m_1 a_0^2 + m_2 a_0^2) m_3^2 l_2^2 \\
& \left. a_1^2 \cos(\theta_3)^2 \right)
\end{aligned}$$